Setul I de probleme

1. Să se găsească sumele şi produsele canonice pentru următoarele funcţii:
   (a) $f(x,y,z) = \sum m(0, 3, 6)$;
   (b) $f(x,y,z) = \prod M(1, 2, 7)$.

2. Utilizaţi teoremele algebrei circuitelor de comutaţie pentru rescrierea următoarei expresii într-o formă care necesită cât mai puţine inversiuni cu putinţă:
$$b'c + acd' + a'c + eb' + e(a + c)(a' + d').$$

3. Alcătuiţi tabela de adevăr pentru următoarele expresii booleene:
   (a) $xyz + xy'z'$;
   (b) $abc + ab'c' + a'b'c'$;
   (c) $a(bc' + b'c)$;
   (d) $(a + b)(a + c)(a' + b')$.

4. Demonstraţi următoarele identităţi:
   (a) $ab' + bc' + ca' = a'b + b'c + a'c$;
   (b) $ab + a'c + bcd = ab + a'c$.

5. Calculaţi complementele următoarelor expresii şi verificaţi corectitudinea rezultatelor arătând că: $u * u' = 0$ şi $u + u' = 1$.
   (a) $e = a+ bc$;
   (b) $f = (a+b)(a'c + d)$;
   (c) $g = ab + b'c + a'cd$.

6. Cercetaţi dacă următoarele expresii sunt, sau nu sunt, identităţi:
   (a) $ab + c'd' + a'bcd' + ab'c'd = (a + d')(b + c')$;
   (b) $(a + b')(b + c')(c + a') = (a' + b)(b' + c)(c' + a)$;
   (c) $(a + b)(b + c)(c + a) = (a' + b')(b' + c')(c' + a')$;
   (d) $ab+a'b'c' = (c+a)(c + b)$.

7. În vederea creşterii fiabilităţii unui circuit combinaţional C construit cu porţi ŞI şi SAU, sunt construite trei copii ale respectivului circuit. Este introdus un circuit adiţional M, ale cărui intrări sunt ieşirile z_i ($1 \leq i \leq 3$) ale celor trei copii ale circuitului C, iar semnalul de la ieşirea sa, notaat w, este în concordanţă cu majoritatea semnalelor de la intrări. Global, circuitul astfel constituit va produce un semnal corect la ieşirea sa (ieşirea w a circuitului adiţional M) chiar dacă semnalul de la ieşirea uneia dintre copiile circuitului C este eronat.
   (a) Alcătuiţi tabela de funcţionare pentru circuitul majoritate M;
   (b) Scrieţi specificaţia zecimală echivalentă;
   (c) Stabiliţi o expresie algebrică simplificată a liniei w ca funcţie de z_1, z_2, z_3.

8. Cercetaţi veridicitatea următoarelor propoziţii:
   (a) Fie a şi b două variabile booleene. Atunci $a * b = 0$ şi $a + b = 1$ implică $a = b'$.

(b) Fie *X* şi *Y* două ***expresii*** booleene. Atunci X * Y = 0 şi X + Y = 1 implică X = Y'.

9. Dacă $f = x \oplus y$, atunci exprimaţi f cu ajutorul literalilor x, x', y, y' şi operatorii * şi +.

10. Arătaţi că operatorul $\oplus$ este asociativ: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (z \oplus y)$.

11. Demonstraţi că dacă $x \oplus y = z$, atunci $x \oplus z = y$ şi $x \oplus y \oplus z = 0$.

12. Arătaţi că $x \oplus y = x + y$, dacă $xy = 0$.

13. Demonstraţi că $(a + b) \oplus (a + c) = a' (b \oplus c)$.

14. Demonstraţi identităţile:
    (a) $x + y = x \oplus y \oplus xy$;
    (b) $x + y = x \oplus x' y$.

15. Demonstraţi identităţile:
    (a) $x' \oplus y = x \oplus y'$;
    (b) $x \oplus y = x' \oplus y'$;
    (c) $xy' + x'y = (xy + x'y')'$.

16. Ştiind că $f(w, x, y, z) = w + (x + yz)(y' + xz)$, atunci:
    (a) Calculaţi o expresie sumă de produse pentru f prin *desfacerea parantezelor*.
    (b) Scrieţi expresia duală $f^D(w, x, y, z)$, pentru $f(w, x, y, z)$.
    (c) Stabiliţi o expresie produs de sume pentru $f(w, x, y, z)$ prin efectuarea produselor în expresia calculată la punctul (b) şi apoi calculând duala.

17. Arătaţi că $f^D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dacă şi numai dacă:
$$f'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1', x_2', \ldots, x_n').$$

18. Găsiţi o funcţie cu cât mai puţine variabile, $n \geq 2$ care satisface condiţiile problemei 17.

19. Arătaţi că $f^D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dacă şi numai dacă:
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1', x_2', \ldots, x_n').$$

20. Găsiţi o funcţie cu cât mai puţine variabile, $n \geq 2$ care satisface condiţiile problemei 19.

21. Desenaţi schemele, utilizând porţi ŞI, SAU şi NU, următoarelor funcţii:
    (a) $x(y + z)$
    (b) $xy + xz$
    (c) $(x(y + z))'$
    (d) $x' + y'z'$
    (e) $w(x + yz)$

22. Desenaţi schemele, utilizând porţi SAU-NU şi NU, următoarelor funcţii:

(a) $(x' + (y + z)')'$

(b) $((x' + y')' + (x' + z')')'$

23. Utilizând porţi ŞI-NU şi inversoare desenaţi schemele următoarelor funcţii:

(a) $(x(y'z')'$

(b) $xy + xz$

24. Proiectaţi circuitul de control al luminii unui culoar, având un întrerupător în fiecare capăt al culoarului. Aceste întrerupătoare controlează sursa, unică, de lumină a culoarului. Dacă lumina este stinsă atunci, prin schimbarea poziţiei oricărui întrerupător lumina se aprinde. Similar, dacă lumina este aprinsă atunci, prin schimbarea oricărui îtrerupător lumina se stinge. Determinaţi un tabel de adevăr şi descrieţi cum se implementează această funcţie în termeni de porţi logice sau întrerupătoare.

25. Demonstraţi, utilizând tabele de adevăr că: $xy + yz + x'z = xy + x'z$.

26. Calculaţi complementul următoarelor funcţii utilizând teorema DeMorgan:

(a) $a(b + cd)$

(b) $abc + b(c' + d')$

(c) $x' + y'$

(d) $x + yz'$

(e) $(x + y)z$

(f) $x + (yz)'$

(g) $x(y + zw' + v's)$

27. Determinaţi complementul următoarelor funcţii:

(a) $(a + (bcd)')((a + d)' + b(c' + a))$

(b) $ab'c + (a' + b + d)(abd' + b')$

28. Simplificaţi următoarele funcţii utilizând teoremele algebrei booleene. Pentru fiecare funcţie simplificată calculaţi numărul de literali.

(a) $xy + xy'$

(b) $(x + y)(x + y')$

(c) $yz' + x'yz + xyz$

(d) $(x + y)(x' + y + z)(x' + y + z')$

(e) $x + xyz + x'yz + x'y + wx + w'x$

29. Se consideră funcţia $f(a, b, c, d) = (ad + a'c)(b'(c + bd'))$. Se cere:

(a) desenaţi schema acestei funcţii utilizând porţi ŞI, SAU şi NU.

(b) minimizaţi, utilizând teoremele algebrei booleene, această funcţie şi desenaţi schema corespunzătoare.

30. Se consideră funcţia $f(a, b, c, d) = \Sigma m(0, 1, 2, 7, 8, 9, 10, 15)$.

(a) Scrieţi forma canonică în sumă de produse.

(b) Scrieţi forma canonică în produs de sume.

(c) Scrieţi complementul funcţiei în forma canonică sumă de produse.

(d) Scrieţi complementul funcţiei în forma canonică produs de sume.