UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale
2007-2013

Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

Proiectarea Logică

15. Diagrame Karnaugh

Diagrame Karnaugh

Diagramele Karnaugh sunt reprezentări grafice, simple ale funcţiilor şi expresiilor logice. Aceste diagrame permit o reprezentare convenabilă a funcţiilor cu un număr relativ mic de variabile (5 - 6 variabile reprezintă o limită rezonabilă a metodei) şi sunt mult utilizate în calculul manual al formelor minimizate.

1. Introducere

Aceste diagrame unt foarte utile pentru generarea manuală a setului complet de implicanţi de primi ai unei funcţii scalare dar şi pentru determinarea acoperirii optime, în cazurile mai simple. Diagramele Karnaugh sunt forme tabelare rectangulare, având 2^k celule (k fiind numărul de variabile al diagramei), în care fiecare celulă a diagramei este prin identificată printr-o etichetă orizontală şi una verticală. Etichetele sunt cuvinte ale codului binar reflectat Gray.

Codul Gray cel mai simplu este cel cu un singur rang. Pentru acest cod sunt doar două cuvinte: 0 şi 1. Codul Gray cu două ranguri are patru cuvinte: 00, 01, 11 şi 10.
Printre proprietăţile generice ale codului Gray, invariante cu numărul de ranguri, sunt de reţinut câteva remarcabile:

- Diferenţierea unică între două cuvinte succesive. Două cuvinte succesive ale codului Gray se deosebesc prin cel mult un rang.
- Primul şi ultimul cuvânt de cod satisfac, deasemenea, această proprietate. Acest fapt conferă ciclicitate codului Gray.
- Cuvintele codului Gray cu n ranguri se deduc din cuvintele codului Gray cu n-1 ranguri printr-o generare pseudo-simetrică.

<u>Exemplul 1.1.</u> Se consideră codul Gray cu două ranguri : 00, 01, 11, 10.
Generarea codului Gray cu trei ranguri se poate face astfel:
Cuvintele codului Gray cu două ranguri sunt modificate prin adăugarea unui rang în stânga rangurilor existente iar valoarea acestui rang suplimentar este 0 pentru toate cuvintele de cod:

000, 001, 011, 010 **|**

În continuare, se generează în dreapta barei verticale, pseudo-simetric celelalte cuvinte de cod care vor avea valoarea 1 a rangului suplimentar introdus:

000, 001, 011, 010 **|** 110, 111, 101, 100.

În concluzie, codul Gray cu trei ranguri are cuvintele de cod:
000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100.
◊

Doi mintermi (maxtermi) se spune că sunt logic adiacenţi atunci când aceştia diferă printr-o singură variabilă.
Aceasta revine la a spune, în fapt, că o variabilă (u spre exemplu) apare într-un minterm asertată (u) iar în celălalt complementată (u').

În diagramele Karnaugh, datorită codului Gray, două celule învecinate (în mod imediat ori extins, prin exterior) atât pe verticală cât şi pe orizontală diferă prin paritatea unei singure variabile.

Dacă vecinătatea este orizontală, atunci variabila care va avea paritate diferită (în sensul că, apare la o celulă asertată în timp ce la cealaltă celulă apare complementată) aparţine codurilor orizontale ale celulelor.
Similar pentru vecinătatea verticală. Doi astfel de mintermi se pot combina şi produc un implicant (având o variabilă mai puţin) în baza proprietăţilor algebrelor Boole-ene.
Cu alte cuvinte, diagramele Karnaugh transformă adiacența logică într-o adiacenţă sesizabilă vizual a mintermilor.
Această trăsătură fundamentală este observabilă atunci când se traversează diagrama, pe direcţie verticală (în lungul unei coloane) ori pe direcţie orizontală (de-a lungul unei linii).
Prin proprietatea aceasta se facilitează mult generarea implicanţilor primi (maximali).
Generarea implicanţilor primi, pentru un anumit minterm, are loc prin cuprinderea unui număr de celule într-o grupare materializată printr-un contur (închis ori prin extindere închis) care delimitează gruparea respectivă.

b \ a	0	1
0	0	2
1	1	3

(a) Două variabile

c \ ab	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

(b) Trei variabile

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

(c) Patru variabile

de \ abc	000	001	011	010	100	101	111	110
00	0	4	12	8	16	20	28	24
01	1	5	13	9	17	21	29	25
11	3	7	15	12	19	23	31	27
10	2	6	14	10	18	22	30	26

(d) Cinci variabile

def \ abc	000	001	011	010	100	101	111	110
000	0	8	24	16	32	40	56	48
001	1	9	25	17	33	41	57	49
011	3	11	27	19	35	43	59	51
010	2	10	26	18	34	42	58	50
100	4	12	28	20	36	44	60	52
101	5	13	29	21	37	45	61	53
111	7	15	31	23	39	47	63	25
110	6	14	30	22	38	46	62	54

(e) Şase variabile

Figura 1.1. Diagramele Karnaugh cele mai utilizate.

Locaţia unui minterm, în diagrama Karnaugh, are în imediata vecinătate locaţiile mintermilor potenţiali adiacenţi.

În figura 1.1 sunt prezentate diagramele Karnaugh utilizate curent. Aşa cum se poate remarca din figura 1.1, celulele din diagramele Karnaugh sunt identificabile atât, prin indicii coloanelor şi liniilor, cât şi prin valorile zecimale unice înscrise în respectivele celule.

Celula din prima coloană (indice 0) şi prima linie (indice 0) este etichetată în ordine 00 iar celula din prima coloană şi a doua linie (indice 1) este, similar, etichetată 01, spre exemplu, în figura 1.1 (a).
Indicii liniilor şi coloanelor sunt interpretaţi simbolic utilizând corespondenţa bijectivă care asociază, poziţional, variabila respectivă complementată unei valori zero şi respectiv asociază variabila respectivă asertată unei valori unu.
Astfel, prima coloană are eticheta *a'* iar cea de-a doua coloană are eticheta literală, simbolică, *a,* spre exemplu, în figura 1.1 (a).
Similar, se poate remarca faptul că prima linie este etichetată simbolic prin literalul *c'd',* în timp ce a doua linie are eticheta simbolică *c'd*, în figura 1.1 (c) corespunzătoare diagramei Karnaugh pentru patru variabile.

Valoarea zecimală din interiorul celulelor este determinată prin *vectorul ordonat al indicilor de coloană şi respectiv linie*.
Astfel, celula din ultima coloană şi prima linie este unic identificabilă numeric prin eticheta obţinută din combinaţia 10 (simbolic *ab'*), în figura 1.1 (a). Similar, celula din prima coloana şi a doua linie, în figura 1.1 (a), este unic identificabilă numeric prin eticheta 01 (simbolic *a'b*), etc.
Acest procedeu este corespunzător extensibil şi pentru diagramele Karnaugh pentru trei sau mai multe variabile. Celula din a prima coloană şi doua linie a diagramei Karnaugh cu patru variabile (figura 1.1 (c)) este identificabilă prin eticheta 0001 (simbolic *a'bc'd*), spre exemplu.

Etichetelor celulelor li se ataşează, în ordine ponderi. Aceste ponderi sunt, puteri în baza doi. În cazul diagramei Karnaugh pentru două variabile (din figura 1.1(a)), ponderile sunt 2^1, 2^0, spre exemplu. Iar, în cazul diagramei pentru cinci variabile (figura 1.1 (d)) ponderile, sunt în ordine 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0, asociate variabilelor *abcde,* respectiv.

Aceste ponderi fac posibilă asocierea unei valori zecimale unice fiecărei celule. Pentru fiecare diagramă, din figura 1.1, este înscrisă, în fiecare celulă, valoarea zecimală corespunzătoare. Valorile zecimale înscrise în celulele diagramelor sunt identice cu indicii mintermilor corespunzători respectivelor celule. Această asociere uşurează mult completarea corectă a diagramelor Karnaugh.
Celula cu valoarea zecimală 47, spre exemplu, din diagrama figurii 1.1 (e) corespunde mintermului m_{47} notat simbolic prin produsul variabilelor *ab'cdef,* având respectiv codul binar 101111.

Diagrama Karnaugh pentru funcţiile cu cinci variabile (figura 1.1(d)), a fost alcătuită din două diagrame de patru variabile fiecare, pentru simplitatea utilizării în acest caz.
Diagrama din partea dreaptă a figurii 1.1(d) corespunde atribuirii $a = 0$ iar diagrama din partea stângă corespunde atribuirii $a = 1$. Cele două diagrame sunt într-o relaţie de adiacenţă.
Acesta este motivul pentru care s-au utilizat două diagrame pentru patru variabile chiar dacă sunt specificate cinci variabile.

Similar, în cazul diagramei Karnaugh pentru şase variabile, privite atent cele patru diagrame pentru patru variabile fiecare sunt într-o relaţie de adiacenţă asemănătoare celei dintr-o diagramă Karnaugh pentru două variabile (*a* şi *d*).

2. Reprezentarea funcţiilor scalare utilizând diagramele Karnaugh

		ab 00	01	11	10
c	0	**1**			**1**
	1	**1**			

$f\ (a,\ b,\ c) = m_0 + m_1 + m_4.$

Figura 2.1. Reprezentarea printr-o diagramă Karnaugh a unei funcţii specificate prin mintermi.

Celulelor digramelor Karnaugh le sunt atribuite valori 0 sau 1 după cum sunt definite funcţiile reprezentate.

Exemplul 2.1. Fie funcţia $f\ (a,\ b,\ c) = m_0 + m_1 + m_4$.
O reprezentare utilizând o diagramă Karnaugh pentru trei variabile (*a*, *b* şi *c*) va avea trei unităţi, corespunzătoare celor trei mintermi ai funcţiei, aşa cum se poate vedea din figura 2.1. Celelalte celule se presupune, implicit, că au valoarea 0. Din raţiuni de simplitate se preferă doar evidenţierea celulelor care au valoarea 1.
◊

În mod uzual nu sunt reprezentate explicit valorile zero ale funcţiilor în diagramele Karnaugh. Dar pentru o prezentare completă se arată, în continuare, un exemplu în care o funcţie este reprezentată prin maxtermi (sunt semnificative, la această reprezentare, valorile zero ale respectivei funcţii.)

		ab 00	01	11	10
	00		**0**		
cd	01	**0**			**0**
	11				
	10			**0**	**0**

$g\ (a,\ b,\ c,\ d) = M_1 \cdot M_4 \cdot M_9 \cdot M_{10} \cdot M_{14}$

Figura 2.2. Reprezentarea printr-o diagramă Karnaugh a unei funcţii specificată prin maxtermi.

Exemplul 2.2. Fie funcţia $g(a,\ b,\ c,\ d)$ = = $M_1 \cdot M_4 \cdot M_9 \cdot M_{10} \cdot M_{14}$.
O reprezentare a acestei funcţii utilizând o diagramă Karnaugh pentru patru variabile (*a*, *b*, *c* şi *d*) va avea cinci celule iniţializate cu valoarea 0, tot atâtea câţi maxtermi sunt utilizaţi în specificarea funcţiei (figura 2.2).
Celelalte celule se presupune, implicit ca având valoarea 1. Tot din raţiuni de simplitate se face doar marcarea celulelor pentru care funcţia are valoarea 0.
◊

Atunci când funcţiile sunt specificate prin sume de produse ne-canonice (implicanţi oarecari) se poate proceda în două maniere:

(a) termenii necanonici sunt expandaţi în termeni canonici (mintermi) după care completarea diagramei se face ca în exemplul 2.1, sau

(b) diagrama Karnaugh este completată prin considerarea ariilor corespunzătoare termenilor produse necanonice, aşa cum se arată în Exemplul 2.3.

		ab 00	01	11	10
c	0	**1**			**1**
	1				**1**

h (*a*, *b*, *c*) = *ab'* + *b'c'*.

Figura 2.3. Reprezentarea printr-o diagramă Karnaugh a unei funcţii specificate prin implicanţi necanonici.

Exemplul 2.3. Se consideră funcţia *h*(*a*, *b*, *c*) = *ab'* + *b'c'*.
În continuare se va utiliza indicele zecimal pentru identificarea fiecărei celule din diagrama Karnaugh (figura 1.1 (b)).
Variabila *a* corespunde mulţimii celulelor {4, 5, 6 şi 7}. Se poate afirma, cu alte cuvinte, toate celulele pentru care *a* = 1.

Pentru *b'* vor fi considerate celulele din mulţimea {0, 1, 4 şi 5} (toate celulele unde *b'* = 1). Atunci, pentru produsul *ab'* va corespunde intersecţiei celor două mulţimi specificate anterior: {4, 5, 6 şi 7} ∩ {4, 5, 6 şi 7} = {4 şi 5}.

Similar, pentru produsul *b'c'* se vor intersecta mulţimile de celule {0, 1, 4 şi 5} şi {0, 2, 6 şi 4} (cea de-a doua mulţime corespunde celulelor pentru care *c'* =1). În consecinţă, pentru *b'c'* se va utiliza mulţimea {0 şi 4}. În final se reunesc (+) cele două mulţimi de celule determinate: {4 şi 5} ∪ {0 şi 4} = {0, 4 şi 5}. Funcţia va fi reprezentată prin doar trei unităţi, plasate în cele trei celule aşa cum se poate vedea în figura 2.3.
◊

Ca o concluzie, faţă de exemplul 2.3, se poate afirma că pentru o funcţie (cu *n* variabile) descrisă, între alţi implicanţi, printr-un implicant care are doar *p* variabile ($p < n$) atunci, se vor iniţializa prin 1, în total 2^{n-p} celule din respectiva diagramă Karnaugh.
Următorul exemplu abordează o problemă similară dar în cazul unei funcţii specificate prin implicaţi (termeni produs) necanonici.

		ab 00	01	11	10
c	0		**0**		
	1		**0**	**0**	

j(*a*, *b*, *c*) = (*a* + *b'*)(*b'* + *c'*).

Figura 2.4. Reprezentarea printr-o diagramă Karnaugh a unei funcţii specificate prin implicaţi necanonici.

Exemplul 2.4. Se consideră funcţia *j*(*a*, *b*, *c*) = (*a* + *b'*)(*b'* + *c'*).
Procedeul de reprezentare printr-o diagramă Karnaugh pentru produse de implicaţi necanonici stabileşte, pentru început celulele din diagramă în care funcţia are valori 0. Astfel, pentru ca primul produs să fie 0 trebuie ca atât *a* = 0 cât şi ca *b'*= 0, cu alte cuvinte *a* = 0 şi *b* = 1, ceea ce desemnează a doua coloană din stânga diagramei Karnaugh din figura 2.4.

Cel de-al doilea implicat $b' + c' = 0$, conduce la concluzia $b = 1$ şi $c = 1$, ceea ce indică intersecţia dintre coloanele $b = 1$ şi linia $c = 1$ rezultând încă o celulă iniţializată prin zero (celula $abc = 0$).
Reprezentarea acestei funcţii printr-o diagrama Karnaugh corespunzătoare este înfăţişată în figura 2.4.

◊