Seminar 4
Discretizarea sistemelor liniare netede

Problema 1

Fie SL N cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+5)(s+2)}$$

și $h > 0$ un pas de discretizare.

Să se determine sistemul discretizat $H_d(s)$.

Rezolvare

Relația directă de calcul este:

$$H_d(z) = (z-1) \sum_{\text{polii}\frac{H(s)}{s}} \text{rez}\left[\frac{H(s)}{s} \cdot \frac{1}{z - e^{sh}}\right]$$

$$H_d(z) = (z-1) \sum_{\substack{p1=0,\ m1=2 \\ p2=-5,\ m2=1 \\ p3=-2,\ m3=1}} \text{rez}\left[\frac{10(s+1)}{s^2(s+5)(s+2)} \cdot \frac{1}{z - e^{sh}}\right]$$

Se pot calcula separat rezidurile.

$$\text{rez}_1[\ ] = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[s^2 \cdot \frac{10(s+1)}{s^2(s+5)(s+2)} \cdot \frac{1}{z-e^{sh}}\right]\right\} =$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[\frac{10(s+1)}{(s+5)(s+2)} \cdot \frac{1}{z-e^{sh}}\right] =$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{10(s^2+7s+10)\left(z-e^{sh}\right) - 10(s+1)\left[(2s+7)\left(z-e^{sh}\right) + (s^2+7s+10)(-he^{sh})\right]}{(s+5)^2(s+2)^2(z-e^{sh})^2} =$$

$$= \frac{10 \cdot 10 \cdot (z-1) - 10 \cdot [7 \cdot (z-1) + 10 \cdot (-h)]}{25 \cdot 4 \cdot (z-1)^2} =$$

$$= \frac{30 \cdot (z-1) + 100 \cdot h}{100 \cdot (z-1)^2} = \frac{0.3(z-1) + h}{(z-1)^2}$$

$$\text{rez}_2[\ ] = \lim_{s\to -5}\frac{1}{0!}\left[(s+5) \cdot \frac{10(s+1)}{s^2(s+5)(s+2)} \cdot \frac{1}{z-e^{sh}}\right] =$$

$$= \frac{10 \cdot (-4)}{25 \cdot (-3)} \cdot \frac{1}{z - e^{-5h}} = \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{z - e^{-5h}}$$

$$\text{rez}_3[\ ] = \lim_{s \to -2} \frac{1}{0!}\left[(s+2) \cdot \frac{10(s+1)}{s^2(s+5)(s+2)} \cdot \frac{1}{z - e^{sh}}\right] =$$

$$= \frac{10 \cdot (-1)}{4 \cdot 3} \cdot \frac{1}{z - e^{-2h}} = -\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{z - e^{-2h}}$$

Se poate determina acum $H_d(z)$ prin însumarea celor 3 reziduri

$$H_d(z) = (z-1)\left[\frac{0.3(z-1)+h}{(z-1)^2} + \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{z - e^{-5h}} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{z - e^{-2h}}\right]$$

$H_d(z)$ trebuie să iasă strict proprie i.e. ordinul numitorului strict mai mare decât cel al numărătorului.

$$H_d(z) = (z-1)\left[\frac{0.3(z-1)+h}{(z-1)^2} + \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{z - e^{-5h}} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{z - e^{-2h}}\right] =$$

$$= (z-1)\,\frac{[0.3(z-1)+h](z - e^{-5h})(z - e^{-2h}) + \frac{8}{15}(z-1)^2(z - e^{-2h}) -}{(z-1)^2(z - e^{-5h})(z - e^{-2h})}$$

$$\frac{-\frac{5}{6}(z-1)^2(z - e^{-5h})}{(z-1)^2(z - e^{-5h})(z - e^{-2h})} = z^3\left(\frac{3}{10} + \frac{8}{15} - \frac{5}{6}\right) +$$

$$+ z^2\left[0.3 + h - 0.3(e^{-2h} + e^{-5h}) - \frac{16}{15} - \frac{8}{15}e^{-2h} + \frac{5}{3} + \frac{5}{6}e^{-5h}\right] +$$

$$+ z\left[0.3e^{-7h} + 0.3(e^{-2h} + e^{-5h}) - h(e^{-2h} + e^{-5h}) + \frac{16}{15}e^{-2h} + \frac{8}{15} - \frac{5}{6} - \frac{5}{3}e^{-5h}\right] - 0.3e^{-7h} + h\,e^{-7h} - \frac{8}{15}e^{-2h} + \frac{5}{6}e^{-5h}$$

Coeficientul lui z^3 este 0 $\rightarrow$ $H_d(z)$ este strict proprie.

Problema 2

Fie SL N cu realizarea de stare:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Să se determine sistemul discretizat (A_d, B_d, C_d) cu pasul de discretizare $h > 0$.

Rezolvare

$$A_d = e^{Ah} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$B_d = \int_0^h e^{A\theta} \cdot B d\theta$$

$$C_d = C$$

Pentru rezolvare se propune definirea unei matrici *M* care va permite calcularea atât a matricei A_d cât și a matricei B_d, fără a fi nevoie pentru cea din urmă de aplicarea formulei teoretice.

Astfel,

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow e^{Mh} = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - M)^{-1}]$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (sI - M) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 5 & s+6 & -1 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}; \quad (sI - M)^T = \begin{bmatrix} s & 5 & 0 \\ -1 & s+6 & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - M) = s^2(s+6) + 5s = s(s+1)(s+5)$$

$$(sI - M)^* = \begin{bmatrix} s^2 + 6s & s & 1 \\ -5s & s^2 & s \\ 0 & 0 & s^2 + 6s + 5 \end{bmatrix}$$

Determinarea matricei discretizate A_d

Este nevoie de calcularea lui $\mathcal{L}^{-1}[(sI - M)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{s+6}{(s+1)(s+5)} & \frac{1}{(s+1)(s+5)} & \frac{1}{s(s+1)(s+5)} \\ \frac{-5}{(s+1)(s+5)} & \frac{s}{(s+1)(s+5)} & \frac{1}{(s+1)(s+5)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$

A_d se calculează pentru tabloul din stânga sus al matricei mai devreme definită. Pentru fiecare element în parte (din cele 4) se va face despărțire în fracții simple.

După determinarea coeficienților se poate scrie:

$$A_d = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+5} & \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+5}\right) \\ -\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+5}\right) & -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{s+5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}\cdot e^{-t} - \frac{1}{4}\cdot e^{-5t} & \frac{1}{4}\cdot(e^{-t} - e^{-5t}) \\ -\frac{5}{4}\cdot(e^{-t} - e^{-5t}) & -\frac{1}{4}\cdot e^{-t} + \frac{5}{4}\cdot e^{-5t} \end{bmatrix}$$

Determinarea matricei discretizate B_d

Se poate face în două moduri:

- Fie folosind matricea definită *M* și aplicând $\mathcal{L}^{-1}$ pe primele două componente de pe ultima coloană;
- Fie aplicând direct formula de definiție: $B_d = \int_0^h e^{A\theta} \cdot B d\theta$.

$$B_d = \int_0^h e^{A\theta} \cdot B d\theta = \int_0^h \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot (e^{-t} - e^{-5t}) \\ -\frac{1}{4} \cdot e^{-t} + \frac{5}{4} \cdot e^{-5t} \end{bmatrix} dt = \left. \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \cdot e^{-t} + \frac{1}{20} \cdot e^{-5t} \\ \frac{1}{4} \cdot e^{-t} - \frac{1}{4} \cdot e^{-5t} \end{bmatrix} \right|_0^h =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \cdot e^{-h} + \frac{1}{20} \cdot e^{-5h} + \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} \cdot e^{-h} - \frac{1}{4} \cdot e^{-5h} \end{bmatrix}$$

$$C_d = C = [\,2 \quad 1\,]$$

Probleme propuse

Se dă funcția $f: R \to R$,

$$f(t) = (t^2 + 2t + 3) \cdot 1(t)$$

și $h > 0$ un pas de discretizare.

Să se determine $f_d(z)$ prin cele două metode prezentate.

Observații

În cadrul problemelor, s-au folosit formulele transformatelor Laplace și *Z*, formula lui Euler precum și proprietățile de paritate/imparitate ale semnalelor armonice *sin* și *cos*.