Seminar 2
Calculul analitic al răspunsului sistemelor liniare discrete (SL D)

Problema 1

Se consideră SL D definit de realizarea de stare:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

Să se determine *y(t)* dacă x_0 are valoarea precizată mai sus iar intrarea este semnal polinomial $u(t) = C_t^1 \cdot 1(t)$.

Rezolvare

Se vor folosi expresiile:

$$x(z) = \frac{1}{\chi(z)}(zI - A)^*[zx_0 + Bu(z)] \qquad (1)$$

$$y(z) = \frac{1}{\chi(z)}C(zI - A)^*[zx_0 + Bu(z)] \qquad (2)$$

Determinarea adjunctei se va face numai cât este necesar, prin elementele care sunt activate de factorii colaterali (nu se determină cele ce urmează să fie înmulțite cu zero).

Pas1: Determinarea lui *u(z)*

Transformata Z a semnalului polinomial

$$\mathcal{Z}[\mathrm{C}_\mathrm{t}^\mathrm{m} \cdot 1(t)] = \frac{z}{(z-1)^{m+1}}$$

$$u(t) = C_t^1 \cdot 1(t) \quad \rightarrow \quad u(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Pas 2: Determinarea lui $zx_0 + Bu(z)$

$$zx_0 + Bu(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \begin{bmatrix} -3 \cdot \frac{z}{(z-1)^2} \\ \frac{z}{(z-1)^2} - z \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{z}{(z-1)^2} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 - (z-1)^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obs: $\frac{z}{(z-1)^2}$ se va duce lângă polinomul caracteristic $\frac{1}{\chi(z)}$

Pas 3: Determinarea lui $zI - A$

$$zI - A = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ -1 & z & -2 \\ 0 & -1 & z-1 \end{bmatrix}$$

Pas 4: Determinarea lui $\chi(z)$ = det $(zI - A)$ factorizat cu coeficienți reali

$$det(zI - A) = z^2(z-1) - 2z = z(z^2 - z - 2) = z(z-2)(z+1)$$

$$\chi(z) = z(z-2)(z+1)$$

Pas 5: Determinarea lui *y(z)* conform relației (2), calculând adjuncta numai cât este necesar pentru a minimiza volumul de calcul!

$$(zI - A)^T = \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0 & -2 & z-1 \end{bmatrix}$$

$$x(z) = \frac{1}{z(z-2)(z+1)} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{11}^* & \varphi_{12}^* & ? \\ \varphi_{21}^* & \varphi_{22}^* & ? \\ \varphi_{31}^* & \varphi_{32}^* & ? \end{bmatrix} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ z(2-z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(z) = \frac{1}{(z-2)(z+1)(z-1)^2} \cdot [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ \varphi_{31}^* & \varphi_{32}^* & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ z(2-z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{31}^* = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ z & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\varphi_{32}^* = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} z & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = z$$

$$y(z) = \frac{-z^3 + 2z^2 - 3}{(z-2)(z+1)(z-1)^2} = \frac{-z^2 + 3z - 3}{(z-2)(z-1)^2}$$

Pas 6: Ilustrarea revenirii în domeniul timp

$$\frac{y(z)}{z} = \frac{-z^2 + 3z - 3}{z(z-2)(z-1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{(z-1)^2}$$

z^3: $A + B + C = 0$

z^2: $-4A - 2B - 3C + D = -1$

z^1: $5A + B + 2C - 2D = 3$

z^0: $-2A = -3$

$$A = \frac{3}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = -1, D = 1$$

$$y(z) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$y(t) = \frac{3}{2} \cdot u_0(t) - \frac{1}{2} \cdot 2^t \cdot 1(t) - 1(t) + C_t^1 \cdot 1(t)$$

$$y(t) = \left[\frac{3}{2} \cdot u_0(t) - \frac{1}{2} \cdot 2^t\right] 1(t)$$

Problema 2

Fie SL D cu funcția de transfer

$$H(z) = \frac{z+2}{z^2+z+1}.$$

Să se determine *y(t)* dacă mărimea de intrare este

$$u(t) = \cos\frac{2\pi t}{3} \cdot 1(t).$$

Rezolvare

Se va ține cont de următoarele transformate Z

- Pentru semnalele armonice:

$$\mathcal{Z}[\sin(\omega t) \cdot 1(t)] = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

$$\mathcal{Z}[\cos(\omega t) \cdot 1(t)] = \frac{z(z - \cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

- Pentru semnalele armonice modulate de timp

$$\mathcal{Z}[\mathrm{t} \cdot \sin(\omega t) \cdot 1(t)] = \frac{z\,(z^2-1)\sin\omega}{(z^2 - 2z\cos\omega + 1)^2}$$

$$\mathcal{Z}[\mathrm{t} \cdot \cos(\omega t) \cdot 1(t)] = \frac{z(z^2\cos\omega - 2z + \cos\omega)}{(z^2 - 2z\cos\omega + 1)^2}$$

Pas1: Determinarea lui $u(z)$

$$u(t) = \cos\frac{2\pi t}{3} \cdot 1(t)$$

$$u(z) = \frac{z(z - \cos\frac{2\pi}{3})}{z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{3} + 1} = \frac{z\left(z + \frac{1}{2}\right)}{z^2 + z + 1}$$

Pas 2: Determinarea lui $y(z) = H(z) \cdot u(z)$

$$y(z) = \frac{z + 2}{z^2 + z + 1} \cdot \frac{z\left(z + \frac{1}{2}\right)}{z^2 + z + 1}$$

$$\frac{y(z)}{z} = \frac{(z + 2)\left(z + \frac{1}{2}\right)}{(z^2 + z + 1)^2} = \frac{Az + B}{z^2 + z + 1} + \frac{Cz + D}{(z^2 + z + 1)^2}$$

$z^3: A = 0$

$z^2: A + B = 1$

$z^1: A + B + C = \frac{5}{2}$

$z^0: B + D = 1$

$$A = 0, B = 1, C = \frac{3}{2}, D = 0$$

$$y(z) = \frac{z}{z^2 + z + 1} + \frac{\frac{3}{2}z^2}{(z^2 + z + 1)^2} = y_0(z) + y_1(z)$$

$$y_0(z) = \frac{z}{z^2 + z + 1} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot z \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{z^2 - 2z \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot z \cdot \sin\frac{2\pi}{3}}{z^2 - 2z \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + 1}$$

$$y_0(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{2\pi t}{3} \cdot 1(t)$$

Probleme propuse

Să se determine $y_1(t)$ definit în problema 2, folosindu-vă de formulele semnalelor armonice prezentate mai sus.