# Seminar 1
# Calculul analitic al răspunsului sistemelor liniare netede (SL N)

## Problema 1

Se consideră SL N definit de realizarea de stare:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -20 \\ 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Să se determine răspunsul sistemului atât pentru mărimea de stare cât și pentru cea de ieșire având valoarea lui $x_0$ specificată iar intrarea este $u(t) = t \cdot 1(t)$.

**Rezolvare**

*Obs. O astfel de problemă se rezolvă exclusiv în operațional. O rezolvare în timp ar genera calcule complexe consumatoare de timp.*

Se vor folosi expresiile:

$$x(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}Bu(s) = (sI - A)^{-1}[x_0 + Bu(s)]$$

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + C(sI - A)^{-1}Bu(s) = C(sI - A)^{-1}[x_0 + Bu(s)]$$

sau

$$x(s) = \frac{1}{\chi(s)}(sI - A)^{*}[x_0 + Bu(s)] \qquad (1)$$

$$y(s) = \frac{1}{\chi(s)}C(sI - A)^{*}[x_0 + Bu(s)] \qquad (2)$$

Determinarea adjunctei se va face numai cât este necesar, prin elementele care sunt activate de factorii colaterali (nu se determină cele ce urmează să fie înmulțite cu zero!).

*Pas1*: Determinarea lui *u(s)*

$$u(t) = \frac{t}{1!} \cdot 1(t) \quad \rightarrow \quad u(s) = \frac{1}{s^2}$$

*Pas 2:* Determinarea lui $x_0 + Bu(s)$

$$x_0 + Bu(s) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \cdot \frac{1}{s^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} 20 - s^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obs: $\frac{1}{s^2}$ se va duce lângă polinomul caracteristic $\frac{1}{\chi(s)}$

*Pas 3:* Determinarea lui $sI - A$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -20 \\ 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 20 \\ -1 & s & 14 \\ 0 & -1 & s+4 \end{bmatrix}$$

*Pas 4:* Determinarea polinomului caracteristic $\chi(s)$ = det $(sI - A)$ ce trebuie factorizat.

$$\det(sI - A) = s[s(s+4)] + 20 + 14s = s^3 + 4s^2 + 14s + 20$$

$$\chi(s) = (s+2)(s^2 + 2s + 10)$$

*Pas 5:* Determinarea lui *x(s)* și *y(s)* conform relațiilor (1) și (2), calculând adjuncta numai cât este necesar pentru a minimiza volumul de calcul!

$$(sI - A)^T = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 20 & 14 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$x(s) = \frac{1}{s^2(s+2)(s^2+2s+10)} \begin{bmatrix} \varphi_{11}^* & ? & ? \\ \varphi_{21}^* & ? & ? \\ \varphi_{31}^* & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 - s^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(s) = \frac{1}{s^2(s+2)(s^2+2s+10)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ \varphi_{31}^* & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 - s^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{11}^* = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} s & -1 \\ 14 & s+4 \end{vmatrix} = s(s+4) + 14$$

$$\varphi_{21}^* = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 14 & s+4 \end{vmatrix} = s + 4$$

$$\varphi_{31}^* = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ s & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$x(s) = \frac{1}{s^2(s+2)(s^2+2s+10)} \begin{bmatrix} [s(s+4) + 14](20 - s^2) \\ (s+4)(20 - s^2) \\ (20 - s^2) \end{bmatrix}$$

$$x(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{(-s^2+20)(s^2+4s+14)}{s^2(s+2)(s^2+2s+10)} \\ \dfrac{(-s^2+20)(s+4)}{s^2(s+2)(s^2+2s+10)} \\ \dfrac{(-s^2+20)}{s^2(s+2)(s^2+2s+10)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \end{bmatrix}$$

$$y(s) = \frac{-s^2+20}{s^2(s+2)(s^2+2s+10)}$$

*Pas 6:* Ilustrarea revenirii în domeniul timp se face pentru cea mai complicată componentă $x_1(s)$

$$x_1(s) = \frac{(-s^2+20)(s^2+4s+14)}{s^2(s+2)(s^2+2s+10)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{Ds+E}{s^2+2s+10}$$

$s^4: A + C + D = -1$

$s^3: 4A + B + 2C + 2D + E = -4$

$s^2: 14A + 4B + 10C + 2E = 6$

$s^1: 20A + 10B + 4B = 80$

$s^0: 20B = 280$

$$A = -\frac{29}{5}, B = 14, C = 4, D = \frac{4}{5}, E = -\frac{22}{5}$$

$$x_1(s) = -\frac{29}{5}\cdot\frac{1}{s} + 14\cdot\frac{1}{s^2} + 4\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{\frac{4}{5}\cdot s - \frac{22}{5}}{(s+1)^2+3^2}$$

$$x_1(s) = -\frac{29}{5}\cdot\frac{1}{s} + 14\cdot\frac{1}{s^2} + 4\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{(s+1)}{(s+1)^2+3^2} - \frac{26}{15}\cdot\frac{3}{(s+1)^2+3^2}$$

$$x_1(t) = \left[-\frac{29}{5} + 14\cdot t + 4\cdot e^{-2t} + \frac{4}{5}\cdot e^{-t}\left(\cos 3t - \frac{13}{6}\sin 3t\right)\right]\cdot 1(t)$$

Verificare primară

$$x_1(0) = -1$$

$$x_1(0) = -\frac{29}{5} + 4 + \frac{4}{5} = -1$$

## Problema 2

Fie SL N cu funcția de transfer

$$H(s) = \frac{8(s+2)}{(s+1)(s^2+4)}.$$

Să se determine *y(t)* dacă mărimea de intrare este

$$u(t) = (\cos 2t - \sin 2t) \cdot 1(t).$$

**Rezolvare**

*Pas1*: Determinarea lui $u(s)$

$$\mathrm{u}(\mathrm{t}) = (\cos 2\mathrm{t} - \sin 2\mathrm{t}) \cdot 1(\mathrm{t})$$

$$\mathrm{u}(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2+4} - \frac{2}{\mathrm{s}^2+4} = \frac{\mathrm{s}-2}{\mathrm{s}^2+4}$$

*Pas 2:* Determinarea lui $y(s) = H(s) \cdot u(s)$

$$\mathrm{y}(\mathrm{s}) = \frac{8(\mathrm{s}+2)}{(\mathrm{s}+1)(\mathrm{s}^2+4)} \cdot \frac{\mathrm{s}-2}{\mathrm{s}^2+4} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}+1} + \frac{\mathrm{Bs}+\mathrm{C}}{\mathrm{s}^2+4} + \frac{\mathrm{Ds}+\mathrm{E}}{(\mathrm{s}^2+4)^2}$$

$$\mathrm{A}(\mathrm{s}^2+4)^2 + (\mathrm{Bs}+\mathrm{C})(\mathrm{s}+1)(\mathrm{s}^2+4) + (\mathrm{Ds}+\mathrm{E})(\mathrm{s}+1) \equiv 8\mathrm{s}^2 - 32$$

$s^4$: $A + B = 0$

$s^3$: $B + C = 0$

$s^2$: $8A + 4B + C + D = 8$

$s^1$: $4A + 4C + D + E = 0$

$s^0$: $16A + 4C + E = 32$

$$A = -\frac{24}{25}, B = \frac{24}{25}, C = -\frac{24}{25}, D = \frac{64}{5}, E = -\frac{64}{5}$$

$$\mathrm{y}(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}+1} + \frac{\mathrm{Bs}+\mathrm{C}}{\mathrm{s}^2+4} + \frac{\mathrm{Ds}+\mathrm{E}}{(\mathrm{s}^2+4)^2}$$

$$\mathrm{y}(\mathrm{s}) = -\frac{24}{25} \cdot \frac{1}{\mathrm{s}+1} + \frac{\frac{24}{25}\mathrm{s} - \frac{24}{25}}{\mathrm{s}^2+4} + \frac{\frac{64}{5}\mathrm{s} - \frac{64}{5}}{(\mathrm{s}^2+4)^2}$$

*Pas 3:* Determinarea lui $y(t)$

$$\mathrm{y}(\mathrm{t}) = -\frac{24}{25} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + \frac{24}{25} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{s}-1}{\mathrm{s}^2+4}\right)\right) + \frac{64}{5} \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{s}-1}{(\mathrm{s}^2+4)^2}\right)\right)$$

$$y(t) = -\frac{24}{25}\cdot e^{-t} + \frac{24}{25}\cdot\left(\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + \frac{64}{5}\cdot\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s^2+4)^2}\right)\right)$$

Se încearcă descompunerea ultimului termen în fracții simple făcând combinații cunoscute ale semnalelor armonice și a celor armonice modulate de timp pentru a genera ușor transformatele Laplace cunoscute.

$$\frac{s-1}{(s^2+4)^2} = A\cdot\frac{s}{s^2+4} + B\cdot\frac{2}{s^2+4} + C\cdot\frac{4s}{(s^2+4)^2} + D\cdot\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

$$As(s^2+4) + 2B(s^2+4) + 4Cs + D(s^2-4) \equiv s-1$$

$$A = 0, B = -\frac{1}{16}, C = \frac{1}{4}, D = \frac{1}{8}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s^2+4)^2}\right) = -\frac{1}{16}\sin 2t + \frac{1}{4}t\cdot\sin 2t + \frac{1}{8}t\cdot\cos 2t$$

$$y(t) = -\frac{24}{25}\cdot e^{-t} + \frac{24}{25}\cdot\left(\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + \frac{16}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\sin 2t + t\cdot\sin 2t + \frac{1}{2}t\cdot\cos 2t\right)$$

## Problema 3

Se consideră SL N definit de realizarea de stare:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -11 & -5 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Să se determine răspunsul sistemului atât pentru mărimea de stare cât și pentru cea de ieșire având valoarea lui $x_0$ specificată iar intrarea este $u(t) = 1(t)$.

**Rezolvare**

Se vor folosi expresiile:

$$x(s) = \frac{1}{\chi(s)}(sI - A)^*[x_0 + Bu(s)] \qquad (1)$$

$$y(s) = \frac{1}{\chi(s)}C(sI - A)^*[x_0 + Bu(s)] \qquad (2)$$

Determinarea adjunctei se va face numai cât este necesar, prin elementele care sunt activate de factorii colaterali (nu se determină cele ce urmează să fie înmulțite cu zero!).

*Pas1*: Determinarea lui *u(s)*

$$u(t) = 1(t) \quad \rightarrow \quad u(s) = \frac{1}{s}$$

*Pas 2:* Determinarea lui $x_0 + Bu(s)$

$$x_0 + Bu(s) = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s+1 \end{bmatrix}$$

Obs: $\frac{1}{s}$ se va duce lângă polinomul caracteristic

*Pas 3:* Determinarea lui $sI - A$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 15 & 11 & s+5 \end{bmatrix}$$

*Pas 4:* Determinarea lui $\chi(s)$ = det $(sI - A)$ factorizat cu coeficienți reali

$$\det(sI - A) = s^2(s+5) + 15 + 11s = s^3 + 5s^2 + 11s + 15$$

$$\chi(s) = (s+3)(s^2 + 2s + 5)$$

*Pas 5:* Determinarea lui *x(s)* și *y(s)* conform relațiilor (1) și (2), calculând adjuncta numai cât este necesar pentru a reduce substanțial volumul de calcul!

$$(sI - A)^T = \begin{bmatrix} s & 0 & 15 \\ -1 & s & 11 \\ 0 & -1 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$x(s) = \frac{1}{s(s+3)(s^2 + 2s + 5)}\begin{bmatrix} ? & ? & \varphi_{13}^* \\ ? & ? & \varphi_{23}^* \\ ? & ? & \varphi_{33}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s+1 \end{bmatrix}$$

$$y(s) = \frac{1}{s(s+3)(s^2 + 2s + 5)}\begin{bmatrix} 15 & 5 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ? & ? & \varphi_{13}^* \\ ? & ? & \varphi_{23}^* \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s+1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{13}^* = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & s \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\varphi_{23}^* = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = s$$

$$\varphi_{33}^* = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2$$

$$x(s) = \frac{1}{s(s+3)(s^2+2s+5)}\begin{bmatrix} s+1 \\ s(s+1) \\ s^2(s+1) \end{bmatrix}$$

$$x(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s(s+3)(s^2+2s+5)} \\ \dfrac{s+1}{(s+3)(s^2+2s+5)} \\ \dfrac{s(s+3)}{(s+3)(s^2+2s+5)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \end{bmatrix}$$

$$y(s) = \frac{1}{s(s+3)(s^2+2s+5)}\begin{bmatrix} 15 & 5 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+1 \\ s(s+1) \\ s^2(s+1) \end{bmatrix}$$

$$y(s) = \frac{1}{s(s+3)(s^2+2s+5)}\begin{bmatrix} 15(s+1) + 5s(s+1) \\ 15(s+1) \end{bmatrix}$$

$$y(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{5(s+1)}{s(s^2+2s+5)} \\ \dfrac{15(s+1)}{s(s+3)(s^2+2s+5)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix}$$

Ultima relația indică faptul că răspunsul *y(s)* este identic egal cu vectorul de ieșire pe componente în operațional.

*Pas 6:* Ilustrarea revenirii în domeniul timp se face pentru cea mai complicată componentă pe care o condiderăm $x_1(s)$

$$x_1(s) = \frac{s+1}{s(s+3)(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{Cs+E}{s^2+2s+5}$$

$s^3$: $A + B + C = 0$

$s^2$: $5A + 2B + 3C + D = 0$

$s^1$: $11A + 5B + 3D = 1$

$s^0$: $15A = 1$

$$A = \frac{1}{15}, B = \frac{1}{12}, C = -\frac{3}{20}, D = -\frac{1}{20}$$

$$x_1(s) = \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s+3} + \frac{-\frac{3}{20}\cdot s - \frac{1}{20}}{s^2+2s+5}$$

$$x_1(s) = \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s+3} - \frac{3}{20}\cdot\frac{s+\frac{1}{3}}{s^2+2s+5}$$

$$x_1(s) = \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s+3} - \frac{3}{20}\cdot\frac{(s+1)-\frac{2}{3}}{(s+1)^2+2^2}$$

$$x_1(t) = \left[\frac{1}{15} + \frac{1}{12}\cdot e^{-3t} - \frac{3}{20}\cdot e^{-t}\left(\cos 2t - \frac{1}{3}\sin 2t\right)\right]\cdot 1(t)$$

Verificare primară

$$x_1(0) = 0$$

$$x_1(0) = \frac{1}{15} + \frac{1}{12} - \frac{3}{20}\cdot 1\left(1 - \frac{1}{3}0\right) = \frac{9}{60} - \frac{3}{20} = 0$$

## Problema 4

Fie SL N cu funcția de transfer

$$H(s) = \frac{8}{(s+1)^2(s^2+4)}$$

Să se determine *y(t)* dacă mărimea de intrare este

$$u\,(t) = \sin 2t\ \cdot 1(t)$$

**Rezolvare**

*Pas1*: Determinarea lui $u(s)$

$$u\,(t) = \sin 2t\ \cdot 1(t)$$

$$u\,(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

*Pas 2:* Determinarea lui $y(s) = H(s)\cdot u(s)$

$$y(s) = \frac{16}{(s+1)^2(s^2+4)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4} + \frac{Es+F}{(s^2+4)^2}$$

$$A(s+1)(s^2+4)^2 + B(s^2+4)^2 + (Cs+D)(s+1)^2(s^2+4) + (Es+F)(s+1)^2 \equiv 16$$

$s^5$: $A + C = 0$

$s^4$: $A + B + 2C + D = 0$

$s^3$: $8A + 5C + 2D + E = 0$

$s^2: 8A + 8B + 8C + 5D + 2E + F = 0$

$s^1: 16A + 4C + 8D + E + 2F = 0$

$s^0: 16A + 16B + 4D + F = 16$

$$A = \frac{64}{125}, B = \frac{16}{25}, C = -\frac{64}{125}, D = -\frac{16}{125}, E = -\frac{32}{25}, F = -\frac{48}{25}$$

$$y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4} + \frac{Es+F}{(s^2+4)^2}$$

$$y(s) = \frac{64}{125}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{16}{25}\cdot\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{-\frac{64}{125}s - \frac{16}{125}}{s^2+4} + \frac{-\frac{32}{25}s - \frac{48}{25}}{(s^2+4)^2}$$

*Pas 3:* Determinarea lui $y(t)$

$$y(t) = \frac{64}{125}\cdot e^{-t} + \frac{16}{25}\cdot t\cdot e^{-t} - \frac{8}{125}\cdot(8\cdot\cos 2t - \sin 2t) - \frac{16}{25}\cdot\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+3}{(s^2+4)^2}\right)\right)$$

Pentru evaluarea ultimului termen avem:

$$\frac{2s+3}{(s^2+4)^2} = A\cdot\frac{s}{s^2+4} + B\cdot\frac{2}{s^2+4} + C\cdot\frac{4s}{(s^2+4)^2} + D\cdot\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

Identificăm coeficienții:

$$As(s^2+4) + 2B(s^2+4) + 4Cs + D(s^2-4) \equiv 2s+3$$

$s^3: A = 0$

$s^2: 2B + D = 0$

$s^1: 4A + 4C = 2$

$s^0: 8B - 4D = 3$

$$A = 0, B = \frac{3}{16}, C = \frac{1}{2}, D = -\frac{3}{8}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+3}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{3}{16}\sin 2t + \frac{1}{2}t\cdot\sin 2t - \frac{3}{8}t\cdot\cos 2t$$

$$y(t) = \frac{64}{125}\cdot e^{-t} + \frac{16}{25}\cdot t\cdot e^{-t} - \frac{8}{125}\cdot(8\cdot\cos 2t - \sin 2t) - \frac{16}{25}\cdot \cdot\left(\frac{3}{16}\sin 2t + \frac{1}{2}t\cdot\sin 2t - \frac{3}{8}t\cdot\cos 2t\right)$$