

Laborator 8

Clase de probleme

Responsabil: Arcălianu Alexandra – arcalianu.alexandra@gmail.com

- 1) Se consideră problema: să se verifice dacă elementul x se găsește în matricea A de m linii și n coloane.
 - a) Scrieți un algoritm determinist care rezolvă problema.
 - b) Scrieți un algoritm nedeterminist de complexitate $O(1)$ care rezolvă problema.
 - c) Scrieți un algoritm nedeterminist de complexitate $O(n)$ care rezolvă problema.

- 2) Să se demonstreze folosind proprietățile P_1 și P_2 de la curs cele patru teoreme și cele două corolare de la secțiunea NP – completitudine.

1)

```
a) caută(A, m, n, x) {
    for i = 1..m {
        for j = 1..n {
            if A[i][j] = x {
                return 1
            }
        }
    }
    return 0
}
```

```
b) caută1(A, m, n, x) {
    (i, j) = choice({1..m} × {1..n})
    if A[i][j] = x {
        success
    }
    fail
}
```

```
caută2(A, m, n, x) {
    i = choice({1..m})
    for j = 1..n {
        if A[i][j] = x {
            success
        }
    }
    fail
}
```

2) a) T_1 : Problema Q este NP – dură $\Leftrightarrow \exists$ o problemă $Q' \in \text{NP}$ – completă a.î. $Q' \leq_p Q$.

Demonstrație:

“ \Rightarrow ”

Q este NP – dură $\Rightarrow \forall Q' \in \text{NP}$ avem $Q' \leq_p Q$ $\left| \Rightarrow \exists Q' \in \text{NPC}$ a.î. $Q' \leq_p Q$.
 $\text{NPC} \subseteq \text{NP}$ și $\text{NPC} \neq \emptyset \Rightarrow$ alegem $Q' \in \text{NPC}$

“ \Leftarrow ”

Fie $Q' \in \text{NPC} \Rightarrow Q' \in \text{NPD} \Rightarrow \forall Q'' \in \text{NP}$ avem $Q'' \leq_p Q'$ $\left| \begin{array}{l} \text{--- transitivity ---} \\ Q' \leq_p Q \end{array} \right. \Rightarrow$

$\forall Q'' \in \text{NP}$ avem $Q'' \leq_p Q \Rightarrow Q \in \text{NPD}$.

b) T_2 : Fie Q_1, Q_2 probleme NP- complete $\Rightarrow Q_1 \leq_p Q_2$ și $Q_2 \leq_p Q_1$.

Demonstrație:

$Q_2 \in \text{NPC} \Rightarrow Q_2 \in \text{NPD} \Rightarrow \forall Q'' \in \text{NP}$ avem $Q'' \leq_p Q_2$ $\left| \Rightarrow Q_1 \leq_p Q_2$
 $Q_1 \in \text{NPC} \Rightarrow Q_1 \in \text{NP}$

$Q_1 \in \text{NPC} \Rightarrow Q_1 \in \text{NPD} \Rightarrow \forall Q'' \in \text{NP}$ avem $Q'' \leq_p Q_1$ $\left| \Rightarrow Q_2 \leq_p Q_1$
 $Q_2 \in \text{NPC} \Rightarrow Q_2 \in \text{NP}$

c) T_3 : Dacă există o problemă NP – completă care este și în P atunci $P = \text{NP}$.

Demonstrație:

Fie $Q_2 \in \text{NPC}$ și $Q_2 \in P$.

$Q_2 \in \text{NPC} \Rightarrow Q_2 \in \text{NPD}$

Fie Q_1 arbitrar ales din NP $\left| \Rightarrow \begin{array}{l} Q_1 \leq_p Q_2 \\ Q_2 \in P \end{array} \right. \xrightarrow{P_1} \begin{array}{l} Q_1 \in P \Rightarrow \text{NPC} \subseteq P \\ \text{Cum } P \subseteq \text{NP} \end{array} \left| \Rightarrow$

$\Rightarrow P = \text{NP}$.

Corolar: Dacă există o problemă NP – completă care este și în P atunci toate problemele NP – complete sunt în P.

Demonstrație:

Fie Q a.î. $Q \in \text{NPC}$ și $Q \in P \xrightarrow{T_3} \begin{array}{l} P = \text{NP} \\ \text{NPC} \subseteq \text{NP} \end{array} \left| \Rightarrow \text{NPC} \subseteq P$.

d) T_4 : Dacă există o problemă NP – dură care este și în P atunci $P = NP$.

Demonstrație:

Fie $Q_2 \in \text{NPD}$ și $Q_2 \in P$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } Q_1 \text{ arbitrar ales din NP} \\ \text{Cum } Q_2 \in \text{NPD} \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q_1 \leq_p Q_2 \\ Q_2 \in P \end{array} \right| \xrightarrow{P_1} \left. \begin{array}{l} Q_1 \in P \Rightarrow NP \subseteq P \\ \text{Cum } P \subseteq NP \end{array} \right| \Rightarrow P = NP.$$

Corolar: Dacă există o problemă NP – dură care este și în P atunci toate problemele NP – complete sunt în P.

Demonstrație:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } Q \text{ a.î. } Q \in \text{NPD și } Q \in P \end{array} \right| \xrightarrow{T_4} \left. \begin{array}{l} P = NP \\ NPC \subseteq NP \end{array} \right| \Rightarrow NPC \subseteq P.$$