

Test 1 AA

28.11.2012

Nota: Suma punctajelor este 12.

Demonstrati ca:

$$\forall L \in \text{List}(\text{Integer}) \bullet \text{size}(\text{reverse}(L)) = \text{size}(L).$$

1. (1p + 1p) Fie urmatoarea recurenta:

$$T(n) = \begin{cases} 6T(n/3) + 2^{3 \log_{10} n} & n \geq 5 \\ \Theta(1) & 1 \leq n < 5. \end{cases}$$

(a) Determinati margini superioare si inferioare stranse.

(b) Demonstrati marginile gasite, prin metoda substitutiei.

2. (2p) Rezolvati, prin metoda iterativa, folosind, eventual, arbori de recurenta, urmatoarea ecuatie:

$$T(n) = T(n/4) + T(3n/4) + n.$$

3. (1p) Justificati valoarea de adevar a urmatoarei propozitii: "Daca $f(n) = \Theta(g(n))$, atunci $|f(n) - g(n)| = \Theta(f(n) + g(n))$ ".

4. (1p) $|O(f(n)) - O(g(n))| = \dots$ Justificati.

5. (1p + 1p) Consideram implementarea unui inel (*Ring*), folosind doua liste, $\langle L, R \rangle$. Consideram ca operatia de inversare (*reverse*) aplicata unei liste se realizeaza in timp liniar in raport cu numarul de elemente din lista.

(a) Aratati ca, pentru orice secventa S de operatii *insert* si *move* aplicate asupra inelului, $\text{cost}(S) = O(n)$, unde n reprezinta numarul de operatii din secventa.

(b) Folosind functia de potential $\Phi(\langle L, R \rangle) = \text{size}(L)$, identificati costurile amortizate ale operatiilor *insert* si *move*.

6. (2p) Fie urmatoarea specificatie a tipului de date abstract $\text{List}(T)$:

$$\begin{aligned} & \text{List}(T) \\ \overline{\square} & : \rightarrow \overline{\text{List}}(T) \\ :: & T \times \text{List}(T) \rightarrow \text{List}(T) \end{aligned}$$

$$\text{size} : \text{List}(T) \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(s1) \text{ size}(\overline{\square}) = 0$$

$$(s2) \text{ size}(e : L) = 1 + \text{size}(L)$$

$$++ : \text{List}(T) \times \text{List}(T) \rightarrow \text{List}(T)$$

$$(a1) \overline{\square} ++ L = L$$

$$(a2) (e : L) ++ L' = e : (L ++ L')$$

$$\text{reverse} : \text{List}(T) \rightarrow \text{List}(T)$$

$$(r1) \text{ reverse}(\overline{\square}) = \overline{\square}$$

$$(r2) \text{ reverse}(e : L) = \text{reverse}(L) ++ (e : \overline{\square})$$

7. (1p + 1p) Fie tipul de date abstract $\text{List}(T)$ definit anterior, si $\text{Tree}(T)$ definit mai jos.

$$\overline{\text{Tree}}(T)$$

$$\langle \rangle : \rightarrow \overline{\text{Tree}}(T)$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \text{Tree}(T) \times T \times \text{Tree}(T) \rightarrow \overline{\text{Tree}}(T).$$

Constructorul intern al tipului $\text{Tree}(T)$ este utilizat in expresii de forma $\langle \text{left}, \text{key}, \text{right} \rangle$, unde *key* este cheia, iar *left* si *right* sunt subarborii stang, respectiv drept.

Fie $P(t)$ urmatoarea proprietate: "pentru orice nod n din arborele t , cheia lui n este mai mare sau egala cu orice cheie din subarborii lui stang, si mai mica sau egala cu orice cheie din subarborii lui drept".

(a) Definiti axiome pentru operatorul

$$\text{flatten} : \text{Tree}(T) \rightarrow \text{List}(T)$$

astfel incat urmatoarea proprietate sa fie indeplinita:

$$\forall t \in \text{Tree}(T) \bullet P(t) \Rightarrow (\text{flatten}(t) \text{ este o lista sortata}).$$

(b) Demonstrati ca specificatia voastra respecta proprietatea enuntata mai sus.