# Optimizarea circuitelor logice combinaţionale

Note de curs
Dr.Ing.Mat. Ion I. Bucur

## Introducere.

În cele ce urmează se va aborda optimizarea circuitelor logice combinaţionale modelate prin expresii formate din sume de produse (SDP) în două niveluri sau, echivalent, prin forme tabelare (FT) cum ar fi, spre exemplu, tabelele de implicanţi. Translatarea între cele două forme este imediată, în ambele sensuri. Dat fiind faptul că translatarea între cele doua forme este fără echivoc, pentru fixarea ideilor, se poate considera în continuare că orice circuit este prezentat sub prima formă, suma de produse.

Minimizarea exactă unei funcţii scalare Booleene are drept principal obiectiv, pentru respectiva funcţie, stabilirea unei expresii algebrice echivalente, prin sume de produse, minime ca număr de termeni şi având, eventual, un număr minim de literali.
Astfel de exprimare se mai numeşte, tradiţional, acoperire prin sumă de produse. Sunt utilizate, în acest scop, toate punctele din domeniul de definiţie în care funcţia este definită prin valoarea 1 şi punctele în care valoarea funcţiei nu este precizată, dacă astfel de puncte există în specificaţia funcţiei.
Găsirea unei forme în produs de sume este similară şi simplu de dedus din forma în sumă de produse.

Înainte să se considere aspecte atât teoretice cât şi de natură tehnologică, pragmatice, este util să se aibă în vedere un exemplu, de complexitate redusă dar care să contureze aspectele definitorii ale acestei probleme, esenţiale în proiectarea logică.

*Exemplul* 1. Pentru funcţia specificată prin suma de mintermi:
$f = m_5 + m_6 + m_9 + m_{10} + m_{13} + m_{14}$,
se doreşte stabilirea unor posibile implementări, cât mai simple
Numărul (minim) de variabile pentru această funcţie este patru, şi aceste variabile vor fi notate prin: $x_8$, $x_4$, $x_2$ şi $x_1$.

Exprimarea mintermilor în format binar este prezentată în tabelul 1:

*Tabelul* 1

| Mintermii funcţiei $f$ | Variabilele funcţiei $x_8$ | $x_4$ | $x_2$ | $x_1$ |
|---|---|---|---|---|
| $m_5$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $m_6$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $m_9$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $m_{10}$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $m_{13}$ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $m_{14}$ | 1 | 1 | 1 | 0 |

Translatarea literală, în ordine, a mintermilor funcţiei conduce la această expresie a funcţiei considerate:

$$f = x_8'x_4x_2'x_1 + x_8'x_4x_2x_1' + x_8x_4'x_2'x_1 + x_8x_4'x_2x_1' + x_8x_4x_2'x_1 + x_8x_4x_2x_1', \tag{1}$$

Ţinând cont de comutativitatea operatorului + şi de faptul că în algebrele Booleene are loc identitatea $a + a = a$, expresia funcţiei $f$ se poate scrie, după o grupare convenabilă a termenilor produs, astfel:

$$f = (x_8'x_4x_2'x_1 + x_8x_4x_2'x_1) + (x_8x_4'x_2'x_1 + x_8x_4x_2'x_1) + (x_8'x_4x_2x_1' + x_8x_4x_2x_1') + (x_8x_4'x_2x_1' + x_8x_4x_2x_1'), \tag{2}$$

În expresia anterioară a funcţiei $f$, din fiecare paranteză se pot factoriza produse de câte trei variabile, astfel:

$$f = x_4x_2'x_1(x_8' + x_8) + x_8x_2'x_1(x_4 + x_4') + x_4x_2x_1'(x_8' + x_8) + x_8x_2x_1'(x_4' + x_4), \tag{3}$$

Considerând identităţile Booleene $a + a' = 1$ şi $a \cdot 1 = a$, expresia funcţiei $f$ se rescrie astfel:

$$f = x_4x_2'x_1 + x_8x_2'x_1 + x_4x_2x_1' + x_8x_2x_1'. \tag{4}$$

Se poate remarca, în expresia anterioară a funcţiei $f$, următoarea factorizare:

$$f = (x_4 + x_8)x_2'x_1 + (x_4 + x_8)x_2x_1'. \tag{5}$$

Expresia iniţială a funcţiei, expresia (1), forma minimizată (4) şi forma factorizată (5) sunt reprezentate schematic, simbolic, în figura 2 (a), (b) şi respectiv (c).

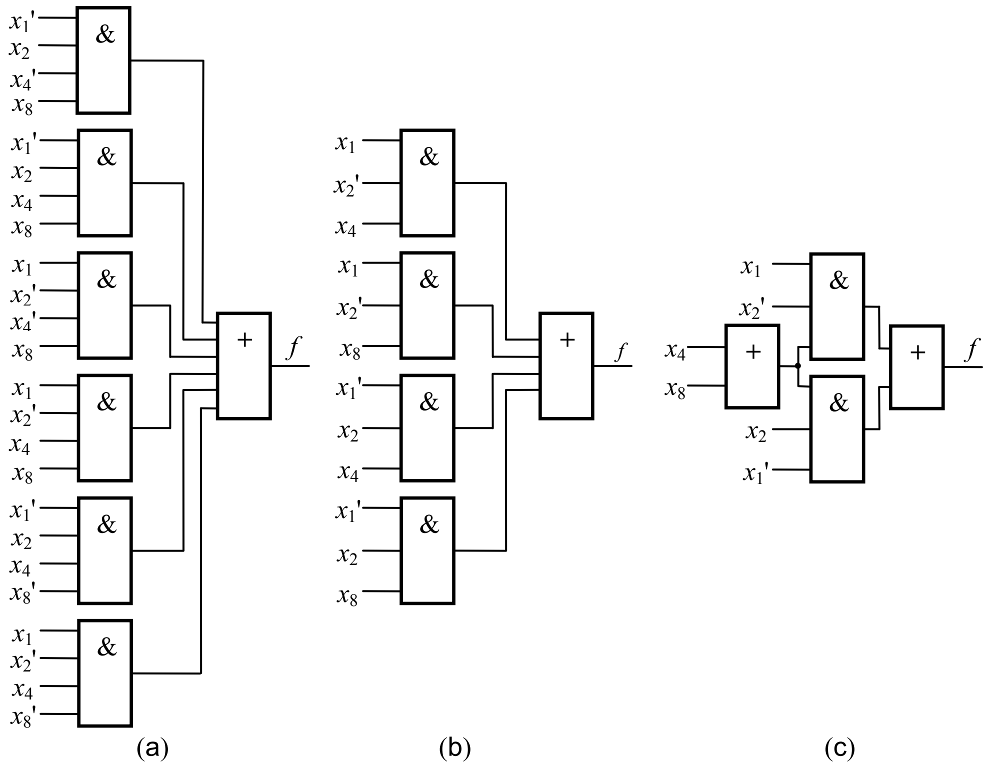


Figura 2.1. Realizări posibile ale funcţiei din exemplul 1.

Cercetând circuitele din figura 2.1 se poate observa cu uşurinţă că dintre cele trei realizări ale funcţiei $f$, cea mai complexă este cea din figura 2.1.(a).

Comparând, în continuare, circuitele 2.1.(b) şi 2.1.(c) se poate spune că în cazul circuitului 2.(c) sunt utilizate mai puţine componente dar, în acelaşi timp se observă că, spre deosebire de celelalte două circuite are mai multe niveluri. Un număr crescut de niveluri poate implica, depinzând de tehnologie, o viteză de lucru mai scăzută pentru un circuit combinaţional.

Alegerea între un circuit mai economicos, dar mai lent, şi unul mai costisitor, dar mai rapid, este tranşată prin considerente care ţin seama de contextul în care este plasat circuitul aflat în discuţie. Este de reţinut că toate considerentele ce vor fi făcute în continuare se vor referi exclusiv la circuitele cu două niveluri.

De remarcat faptul că în cazul circuitelor combinaţionale cu două niveluri, aşa cum se poate vedea în figura 2.(b), fiecare produs din suma de produse reprezintă o poartă (ŞI) iar fiecare literal dintr-un produs reprezintă o intrare într-o poartă. Întreaga sumă de produse corespunde unei porţi (SAU). Similar se întâmplă în cazul implementării circuitelor combinaţionale prin produse de sume: fiecare sumă reprezintă o poartă (SAU) iar întregul circuit este realizat printr-o poartă (ŞI). Ca şi în cazul sumelor de produse, un literal dintr-o sumă este o linie de intrare într-o poartă SAU. Trebuie remarcat, pe scurt, că numărul de linii de intrare într-o poartă este, în general, limitat iar numărul respectiv depinde de tehnologia în care este construită poarta în cauză.

Porţile au costuri după cum şi liniile de intrare în porţi au costurile lor. Raportul dintre costul unei linii de intrare într-o poartă şi costul acelei porţi este dependent de tipul porţii, de tehnologia în care se realizează poarta etc. Se poate aprecia, în general, că atunci când se pune problema unei porţi suplimentare, costul acesteia este de câteva ori mai mare decât costul unei linii de intrare într-o poartă deja existentă în circuitul respectiv. Din acest punct de vedere, micşorarea numărului de porţi este un criteriu important în găsirea, în general, a unei forme mai simple pentru o funcție Booleeană dată.

## Principiile optimizării logice.

Obiectivul minimizării logice în două niveluri este reducerea mărimii reprezentării funcţiilor Booleene în oricare din formele de reprezentare *sume de produse* ori *produse de sume*.
Se poate remarca faptul că oricare din cele două forme ale funcţiilor Booleene poate fi dedusă din cealaltă cu ajutorul legilor De Morgan iar această transformare păstrează numărul de termeni şi de literali. Prin urmare, se poate concentra abordarea doar asupra minimizării unei singure forme şi anume suma de produse, fără să se piardă din generalitate.

Obiectivul detaliat al minimizării logice în două niveluri poate varia puţin în funcţie de stilurile de implementare. Circuitele PLA sunt un astfel de stil de implementare. Prima ţintă a minimizării logice, pentru acest stil de implementare este reducerea numărului de produse şi ţinta secundară este reducerea literalilor din produse.

Alte obiective de optimizare sunt relevante atunci când funcţiile modelate prin forme în două niveluri sunt implementate altfel decât prin PLA-uri. Reprezentările logice în doua niveluri pentru funcţii scalare, spre exemplu, pot fi implementate prin porţi complexe a căror mărime este corelată cu numărul de literali din forma factorizată a acelei reprezentări. În astfel de situaţii obiectivul major este minimizarea numărului de literali.

Minimizarea logică pentru o funcţie scalară sau o funcţie vectorială se face după aceleaşi principii, dar cazul vectorial este mult mai complex. Minimizarea disjunctă a componentelor scalare ale unei funcţii vectoriale poate conduce la rezultate suboptimale deoarece optimizarea nu poate exploata comunitatea unor termeni produs. Un rezultat important în optimizarea logică în două niveluri este echivalenţa funcţiilor vectoriale binare de variabile binare cu funcţiile binare scalare de variabile multi-valorice. Din astfel de raţiuni, pentru început, abordarea se va concentra asupra tehnicilor de optimizare ale funcţiilor scalare de variabile bi-valorice.

## Definiţii

Se vor considera funcţii binare (Booleene) de variabile binare incomplet specificate, de forma:

$$\boldsymbol{f}: B^n \to \{0, 1, *\}^m,$$

deoarece funcţiile complet specificate sunt un caz particular al funcţiilor cu puncte nedefinite, nespecificate (“*don’t care*”).

Pentru fiecare linie de ieşire $f_i$ $(1 \leq i \leq m)$ se definesc trei mulţimi de puncte disjuncte, partiţii ale domeniului de definiţie:

- mulţimea punctelor în care funcţia $f_i$ are valoarea 1,
- mulţimea punctelor în care funcţia $f_i$ are valoarea 0 şi
- mulţimea punctelor în care funcţia $f_i$ are valoarea * sau mulţimea punctelor nedefinite.

Aceste partiţii sunt notate respectiv prin $mp1$, $mp0$, respectiv $mp*$ (submulţimi ale domeniului de definiţie $B^n$).
Prin această partiţionare a domeniului de definiţie, fiecare funcţie scalară incomplet specificată poate fi privită ca un triplet de funcţii complet specificate.

Funcţiile sunt reprezentate (prin sume de produse ori tabelar) ca liste de implicanţi. Conceptul implicantului *multi-ieşire* (*multi-funcţie*) este general ca natură, deoarece combină vectorul valorilor liniilor de intrare cu vectorul valorilor corespunzătoare liniilor de ieşire.
În consideraţiile care urmează se va restricţiona noţiunea de implicant doar la valoarea 1 sau * (neprecizată) a unei funcţii. Rezultă că partea de ieşire a unui implicant multi-ieşire este bivalorică pentru o componentă scalară a respectivei funcţii vectoriale cu următoarea semnificaţie:
- o valoare 1 implică fie o valoare 1, fie o valoare * a componentei scalare respective, în timp ce,
- o valoare 0 nu implică atribuirea unei valori a respectivei componente scalare; pur şi simplu acea componentă scalară este ignorată în punctul corespunzător părţii de intrare.

În astfel de situaţii partea de intrare a implicantului, cu alte cuvinte, se referă la unul sau mai multe puncte din domeniul de definiţie, unde anumite componente scalare ale funcţiei vectoriale iau valoarea 1 ori * şi anume acele componente pentru care partea de ieşire a implicantului multi-valoric este nenulă.

> Definiţia 2.1 Un *implicant multi-ieşire* (multi-funcţie) al unei funcţii vectoriale
> $$\boldsymbol{f}: B^n \to \{0, 1, *\}^m$$
> este o pereche de vectori linie de dimensiune $n$ şi $m$ numiţi *partea de intrare* şi respectiv *partea de ieşire*.

Partea de intrare are componente cu valori din mulţimea {0, 1, *} şi reprezintă un produs de literali. Partea de ieşire are componente cu valori din mulţimea {0, 1}. Pentru fiecare componenta a ieşirii o valoare nenulă implică o valoare 1 sau * a respectivei funcţii scalare în punctul (punctele) corespunzător (corespunzătoare) părţii de intrare.

Mintermii multi-ieşire sunt implicanţi supuşi unor restricţii speciale.

> Definiţia 2.2 Un *minterm multi-ieşire* al unei funcţii precum cea definită anterior este un implicant multi-ieşire a cărui parte de intrare are componente cu valori din mulţimea {0, 1} (exact $n$ literali) şi care implică valoare nenulă pentru una şi numai pentru una dintre componentele (funcţiile scalare) de ieşire.

Exemplul 2.1. $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$; $f_1 = a'b'c' + a'b'c + ab'c + abc + abc'$

$f_2 = a'b'c + ab'c$

Un implicant multi-ieşire al acestei funcţii vectoriale ***f*** este (*01|11) .
Acest implicant multi-ieşire corespunde la patru mintermi multi-ieşire:
(001|10), (101|10), (001|01) şi (101|01).

Definiţia 2.3 O *acoperire* a unei funcţii vectoriale binare este o mulţime (o listă) de implicanţi care conţin (acoperă) mintermii acelei funcţii.

Se notează prin ***F*** acoperirea funcţiei ***f***. Mulţimile *mp*1, *mp*0, *mp** pot fi modelate prin acoperiri, unde implicanţii şi mintermii sunt corespunzători funcţiilor complet specificate respective. Acoperirile *mp*1, *mp*0 şi *mp** sunt notate, tradiţional, prin $F^{ON}$, $F^{OFF}$ şi respectiv $F^{DC}$. O acoperire ***F*** a unei funcţii ***f*** satisface inegalitatea: $\boldsymbol{F}^{ON} \subseteq \boldsymbol{F} \subseteq \boldsymbol{F}^{ON} \cup \boldsymbol{F}^{DC}$. Atunci când o funcţie este complet definită, $\boldsymbol{F}^{ON}$ şi ***F*** sunt identice (deoarece $\boldsymbol{F}^{DC}$ este mulţimea vidă).

Mărimea sau cardinalitatea unei acoperiri este numărul de implicanţi ai acelei acoperiri.

Definiţia 2.4. O *acoperire minimă* este o acoperire de cardinalitate minimă.

În cele ce urmează se va considera că obiectivul minimizării logice combinaţionale exacte în două niveluri este determinarea unei acoperiri minime. Este, adesea, util să se determine acoperiri minimale, locale, numite *acoperiri minimale*, deoarece calculul acestora poate fi atins cu resurse (memorie şi timp) mai reduse. Obiectivul minimizării euristice logice combinaţionale în două niveluri este determinarea unei acoperiri minimale. Astfel de acoperiri sunt adesea foarte apropiate în cardinalitate de acoperirile minime şi pot astfel oferi soluţii eficiente pentru problemele practice. În mod normal minimalitatea locală se defineşte în termeni de conţinere, includere.

Definiţia 2.5 O acoperire *iredundantă* a unei funcţii este o acoperire care nu este un superset propriu al niciunei alte acoperiri pentru aceeaşi funcţie.

Altfel spus, îndepărtarea oricărui implicant dintr-o acoperire minimă nu mai acoperă, nu mai conţine, funcţia. Echivalent, nici un implicant nu este conţinut în orice subset de implicanţi ai acoperirii. O proprietate de minimalitate mai slabă este minimalitatea în raport cu conţinerea unui singur implicant, numită adeseori, conţinerea singulară.

Definiţia 2.6 O acoperire este *minimală* în *raport cu conţinerea singulară* dacă nici un implicant nu este conţinut în orice alt implicant al acoperirii.

O acoperire iredundantă este deasemenea minimală în raport cu conţinerea singulară, dar nu şi reciproc. Raţiunea acestei afirmaţii este aceea că un implicant poate fi redundant deoarece este conţinut de un subset de implicanţi ai acoperirii şi nu de un singur implicant. Din acest motiv, redundanţa este o proprietate mai tare.

Exemplul 2.2. Se reia funcţia ***f*** = ($f_1$, $f_2$) din exemplul 2.1.
O acoperire minimală de cardinalitate trei este dată de:

(00*|10)
(*01|11)
(11*|10)

O acoperire iredundantă de cardinalitate patru este dată de:

(00*|10)
(*01|01)
(1*1|10)
(11*|10)

O acoperire redundantă de cardinalitate cinci, dar care este minimală în raport cu conţinerea singulară este dată de:

(00*|10)
(*01|01)
→ (*01|10)
(1*1|10)
(11*|10)

Al treilea implicant este conţinut în reuniunea dintre primul şi cel de-al patrulea implicant.

O altă proprietate a implicanţilor şi a acoperirilor este aceea de a fi primi, respectiv prime.

Definiţia 2.7. Un implicant este *prim* dacă nu este conţinut de nici un alt implicant al funcţiei. O acoperire este *primă* dacă toţi implicanţii săi sunt primi.

Legat de definiţia 2.7 se cuvin făcute câteva remarci:
- definiţia calităţii de implicant prim a unui implicant este legată de toţi implicanţii posibili ai funcţiei şi nu doar de cei ai acoperirii considerate;
- pentru funcţiile scalare, un implicant prim corespunde unui produs de literali, unde nici un literal nu poate fi eliminat fără să se piardă proprietatea de implicant.

În termeni generici, un implicant prim corespunde unui implicant cu dimensiune maximală. Dimensiunea maximală înseamnă cea mai mare dimensiune ce poate fi atinsă fără să se intersecteze $\boldsymbol{F}^{OFF}$ sau, echivalent, *mp*0. Pentru funcţiile vectoriale, un implicant prim conţine şi un număr maxim de componente scalare (funcţii scalare) ale funcţiei vectoriale reprezentate în partea de ieşire a implicantului. Implicanţii primi sunt adesea numiţi primi, pentru o exprimare mai scurtă, mai simplă, fără să existe riscul de echivoc.

Exemplul 2.3. Se reia funcţia vectorială de variabile binare din exemplele precedente. Lista tuturor implicanţilor primi arată astfel:

(00*|10)
(*01|11)
(1*1|10)
(11*|10)

Prin definiţie nici un implicant prim nu este conţinut în alt implicant prim al funcţiei. Implicanţii anteriori reprezintă o acoperire primă, dar care nu este minimă. In adevăr, al treilea implicant prim este conţinut în reuniunea dintre al doilea şi al patrulea implicant prim. Prin definiţia unui implicant prim, dacă acoperirea este primă, atunci aceasta este minimală în raport cu conţinerea singulară. Înlăturând cel de-al treilea implicant prim se obţine o acoperire minimă care este necesar iredundantă.
Se presupune, acum, că funcţia este incomplet specificată şi *mp** sau $\boldsymbol{F}^{DC}$ pentru ambele ieşiri este specificată, simplu, prin implicantul cu partea de intrare 100. Atunci, implicanţii primi ar fi:

(*0*|10),
(*01|11),
(1**|10).

Aceştia formează o acoperire minimă.

Anumiţi implicanţi primi au proprietatea specială că trebuie să fie incluşi în orice acoperire a funcţiei. Aceşti implicanţi sunt numiţi implicanţi primi esenţiali.

Definiţia 2.8. Un implicant prim este *esenţial* dacă există un minterm al funcţiei acoperit (conţinut) în exclusivitate (faţă de mulţimea tuturor implicanţilor primi ai funcţiei) de acest implicant prim.

Exemplul 2.4. Funcţia considerată în exemplele anterioare are aceşti implicanţi primi:

(00*|10)

(*01|11)
(1*1|10)
(11*|10)

Pentru prima componentă scalară se observă că primul implicant prim este esenţial deoarece acoperă în exclusivitate mintermul (000|10), iar al patrulea implicant prim este esenţial pentru că acoperă în exclusivitate mintermul (110 |10). A doua funcţie scalara este implicata de numai un singur implicant, al doilea, care este, în consecinţă, esențial. Dintre toți implicanţii primi doar al treilea nu este esenţial.

## Minimizarea logică exactă

Minimizarea logică exactă vizează rezolvarea găsirii unei acoperiri minimale. Este considerată o problema clasică în teoria funcţiilor binare de variabile discrete şi primul rezultat remarcabil în găsirea unei acoperiri minime a fost formulat de Quine şi McCluskey. Soluţia problemei, aşa cum a fost formulată de autori, se bazează pe teorema lui Quine, teoremă care delimitează spaţiul căutărilor soluţiei optime.

**<u>Teorema Quine</u>**

Există o acoperire minimă care este primă.

*<u>Demonstrație</u>* Se consideră o acoperire minimă care nu este alcătuită din implicanţi primi. Fiecare implicant neprim poate fi înlocuit printr-un implicant prim care-l conţine. Astfel, mulţimea rezultată de implicanţi este o acoperire şi are aceeaşi cardinalitate ca şi acoperirea iniţială. În consecinţă, există o acoperire minimă care este alcătuită doar din implicanţi primi.

Teorema Quine permite limitarea căutării unei acoperiri minimale la acele acoperiri care constau exclusiv din implicanţi primi. Se remarcă faptul ca teorema se poate generaliza pentru a manevra definiţii mai largi ale acoperirii minime, unde costul unui implicant este întotdeauna mai mic sau egal cu costul unui implicant pe care-l conţine. Teorema se aplică, spre exemplu, cazului de minimizare al numărului literalilor pentru funcţiile scalare (cu o singură ieşire).

E. McCluskey a formulat căutarea unei acoperiri minime ca o problema de acoperire într-un *tabel de implicanţi primi*. Se va aborda aceasta formulare considerând funcţii scalare complet definite.
Un tabel de implicanţi primi este o matrice binară $\boldsymbol{A}$ ale cărei coloane sunt în corespondenţă biunivocă cu implicanţii primi ai funcţiei $f$, iar rândurile sunt în corespondenţă biunivocă cu mintermii funcţiei. Un element $a_{i,j} \in \boldsymbol{A}$ este 1 dacă şi numai dacă cel de-al $j$-lea prim acoperă (conţine) cel de-al $i$-lea minterm. O acoperire minimă este o mulţime minimă de coloane care acoperă toate liniile, sau echivalent: o mulţime minimă de primi ce acoperă (conţin) toţi mintermii funcţiei.
Se poate observa că:
Problema acoperirii poate fi văzută ca fiind problema găsirii unui vector binar $\boldsymbol{x}$ reprezentând o mulţime de implicanţi primi cu cardinalitate ( $|\boldsymbol{x}|$ ) minimă astfel încât :

$$\boldsymbol{A x} >= 1 \qquad (1)$$

Matricea $\boldsymbol{A}$ poate fi privită ca matricea de incidenţă a unui hipergraf ale cărui noduri corespund mintermilor, iar arcele corespund implicanţilor primi. Atunci problema acoperirii corespunde unei acoperiri cu arce ale hipergrafului.

<u>Exemplul 2.5.</u> Fie $f = a'b'c' + a'b'c + ab'c + abc + abc'$

Implicanţii primi ai acestei funcţii sunt aceştia:

($p$) 00*|1
($q$) *01|1
($r$) 1*1|1
($s$) 11*|1

Ţinând seama de implicanţii primi *p, q, r* şi s, matricea ***A*** arată astfel:

| | p | q | r | s |
|---|---|---|---|---|
| 000 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 001 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 101 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 111 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 110 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Vectorul x= $[1101]^T$ reprezintă o acoperire, pentru că ***Ax*** >= 1.
Vectorul ***x*** selectează implicanţii primi *p*,*q* şi *s*.

Minimizarea exactă poate fi rezolvată calculând întâi tabelul de implicanţi primi şi apoi soluţionând problema de acoperire rezultată. De remarcat faptul că problema de acoperire în acest caz este unată, deoarece toate clauzele de acoperire pot fi exprimate ca o disjuncţie de implicanţi. Dificultatea abordării constă din intractabilitatea problemei de acoperire şi din mărimea tabelului de implicanţi.
O funcţie scalară binară cu $n$ variabile binare poate avea $3^n/n$ primi şi $2^{n-1}$ mintermi. De aceea, un algoritm exponenţial al unei probleme de mărime exponenţială este probabil să necesite un timp lung de calcul şi un volum mare de memorie. Rezultatele actuale arată că multe probleme practice de minimizarea logică ale unor funcţii dificile pot fi rezolvate exact prin algoritmi performanţi care exploatează natura problemei şi structuri de date eficiente.

Tabelul de implicanţi poate fi redus. Se pot extrage coloanele esenţiale corespunzătoare implicanţilor primi esenţiali, deoarece aceştia oricum trebuie să aparţină oricărei soluţii. Se pot înlătura liniile dominante şi coloanele dominate.
Extracţia implicanţilor primi esenţiali şi înlăturarea coloanelor dominate şi a liniilor dominante se poate face iterativ. Se obţine astfel, în final, tabelul redus al implicanţilor primi.
Dacă tabelul redus se întâmplă sa fie vid, atunci s-a găsit soluția deja, prin implicanţii primi esenţiali anterior extraşi.
Altfel, tabelul redus se spune că este ciclic şi modelează aşa-zisul *miez ciclic al problemei*. Metoda originală propusă de E. McCluskey revine la branşări, adică se aleg diferite combinaţii de coloane (implicanţi primi) şi se evaluează costul corespunzător. Chiar dacă alegerea unei coloane (prim implicant) poate conduce la simplificări bazate pe regulile de dominanţă şi de esenţiali, procesul este exponenţial (în cel mai defavorabil caz) în mărimea tabelei reduse .

Exemplul 2.6. Se consideră tabelul implicanţilor primi din exemplul 2.5. Implicanţii *p* şi *s* sunt esenţiali. Aceasta revine la a spune că implicanţii primi *p* şi *s* aparţin oricărei acoperiri. De aceea, coloanele corespunzătoare pot fi şterse la fel ca şi liniile incidente lor. Acum, tabelul redus arată astfel :

| | q | r |
|---|---|---|
| 101 | 1 | 1 |

În acest caz tabelul arată că oricare din implicanţii *q* şi *r* poate fi folosit pentru a completa o acoperire minimă. Tabelul redus nu este ciclic şi nu este necesar un proces de branşare.

O altă abordare clasică, numită, adesea metoda lui Petrick, constă în scrierea clauzelor de acoperire ale tabelului (redus) de implicanţi în forma unui produs de sume. Fiecare clauză (sau, echivalent, fiecare sumă din acest produs) corespunde unui minterm şi aceasta reprezintă disjuncţia implicanţilor primi care acoperă respectivul minterm. Produsul de sume este apoi transformat într-o suma de produse ce este satisfăcută ori de câte ori un termen al său ia valoarea 1. În acest caz, termenii produs reprezintă implicanţii primi care au fost aleşi. Costul unei acoperiri este legat de numărul de literali din produs. Ca rezultat, o acoperire minimă este identificată prin orice termen produs al SDP cu cei mai puţini literali.

Exemplul 2.7. Se aplică metoda lui Petrick tabelei de implicanţi primi din exemplul 2.5. Clauza care stabileşte acoperirea primului minterm este $p$; clauza relativă la cel de-al doilea minterm este $p + q$, etc. Produsul de sume este:

$(p)(p + q)(q + r)(r + s)(s) = 1$

Calculând produsele se obţine forma SDP:

$pqs + prs = 1$

ceea ce arată că exista două acoperiri minime de cardinalitate 3.

Prima acoperire este alcătuită această submulţime $\{p, q, s\}$ a implicanţilor primi, iar a doua este această submulţime a implicanţilor primi $\{p, r, s\}$.

De remarcat că metoda lui Petrick s-ar fi putut aplica tabelului redus de implicanţi primi şi ar fi condus la o singura clauză:

$\beta+\gamma = 1$

Astfel, ori implicantul prim $q$ ori implicantul prim $r$, împreună cu implicanţii primi esenţiali $\{p, s\}$ determină o acoperire minimă cu implicanţi primi ai funcţiei considerate.

Chiar dacă exprimarea produsului de sume şi alegerea termenului produs din suma de produse sunt imediate, transformarea produsului de sume într-o sumă de produse (SDP) implică un număr exponenţial de operaţii. Acest fapt limitează metoda Petrick la tabele cu dimensiuni relativ mici.

Algoritmul Quine-McCluskey poate fi extins la funcţii vectoriale prin calculul implicanţilor primi multi-ieşire şi a tabelei corespunzătoare. Extensii pentru a opera cu funcţii incomplet specificate sunt, de asemenea, ușor de dedus şi de aplicat.

## Utilizarea diagramelor Karnaugh în minimizarea logică

Diagramele Karnaugh sunt reprezentări ale funcţiilor şi expresiilor logice. Aceste diagrame permit o reprezentare convenabilă a funcţiilor cu un număr relativ mic de variabile (5-6 variabile este o limită rezonabilă a metodei) şi sunt mult utilizate în calculul manual al formelor minimizate. Sunt foarte utile pentru generarea manuală a setului complet de implicanţi de primi dar şi pentru determinarea acoperirii optime, în cazurile mai simple. Diagramele Karnaugh sunt tabele rectangulare în care fiecare celulă a tabelului este prin identificată printr-o etichetă orizontală şi una verticală. Etichetele sunt cuvinte ale codului binar reflectat Gray.

Codul Gray cel mai simplu este cel cu un singur rang. Pentru acest cod sunt doar două cuvinte: 0 şi 1. Codul Gray cu două ranguri are patru cuvinte: 00, 01, 11 şi 10.

Printre proprietăţile generice ale codului Gray, invariante cu numărul de ranguri, sunt de reţinut câteva remarcabile:

- Diferenţierea unică între două cuvinte succesive. Două cuvinte succesive de cod Gray diferă prin cel mult un rang.
- Primul şi ultimul cuvânt de cod satisfac, deasemenea, această proprietate. Acest fapt conferă ciclicitate codului Gray.
- Cuvintele codului Gray cu $n$ ranguri se deduc din cuvintele codului Gray cu $n$-1 ranguri printr-o generare pseudo-simetrică.

Exemplul 2.9. Se consideră codul Gray cu două ranguri : 00, 01, 11, 10.

Generarea codului Gray cu trei ranguri se poate face astfel:

Cuvintele codului Gray cu două ranguri sunt modificate prin adăugarea unui rang în stânga rangurilor existente iar valoarea acestui rang suplimentar este 0 pentru toate cuvintele de cod:

000, 001, 011, 010 **|**

În continuare se generează în dreapta barei verticale, pseudo-simetric celelalte cuvinte de cod care vor avea valoarea 1 a rangului suplimentar introdus:

000, 001, 011, 010 **|** 110, 111, 101, 100.

Astfel codul Gray cu trei ranguri are cuvintele de cod: 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100.

Doi mintermi (maxtermi) se spune că sunt logic adiacenţi atunci când aceştia diferă printr-o singură variabilă. Aceasta înseamnă că o variabilă apare la un minterm asertată iar la celălalt complementată.

| $b$ \ $a$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $m_0$ | $m_2$ |
| 1 | $m_1$ | $m_3$ |

(a) Două variabile

| $c$ \ $ab$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $m_0$ | $m_2$ | $m_6$ | $m_4$ |
| 1 | $m_1$ | $m_3$ | $m_7$ | $m_5$ |

(b) Trei variabile

| $cd$ \ $ab$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_0$ | $m_4$ | $m_{12}$ | $m_8$ |
| 01 | $m_1$ | $m_5$ | $m_{13}$ | $m_9$ |
| 11 | $m_3$ | $m_7$ | $m_{15}$ | $m_{12}$ |
| 10 | $m_2$ | $m_6$ | $m_{14}$ | $m_{10}$ |

(c) Patru variabile

| $de$ \ $bc$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_0$ | $m_4$ | $m_{12}$ | $m_8$ |
| 01 | $m_1$ | $m_5$ | $m_{13}$ | $m_9$ |
| 11 | $m_3$ | $m_7$ | $m_{15}$ | $m_{12}$ |
| 10 | $m_2$ | $m_6$ | $m_{14}$ | $m_{10}$ |

$a'$

| $de$ \ $bc$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_{16}$ | $m_{20}$ | $m_{28}$ | $m_{24}$ |
| 01 | $m_{17}$ | $m_{21}$ | $m_{29}$ | $m_{25}$ |
| 11 | $m_{19}$ | $m_{23}$ | $m_{31}$ | $m_{27}$ |
| 10 | $m_{18}$ | $m_{22}$ | $m_{30}$ | $m_{26}$ |

$a$

(d) Cinci variabile

| $ef$ \ $cd$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_0$ | $m_8$ | $m_{24}$ | $m_{16}$ |
| 01 | $m_1$ | $m_9$ | $m_{25}$ | $m_{17}$ |
| 11 | $m_3$ | $m_{11}$ | $m_{27}$ | $m_{19}$ |
| 10 | $m_2$ | $m_{10}$ | $m_{26}$ | $m_{18}$ |

$a'b'$

| $ef$ \ $cd$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_{32}$ | $m_{40}$ | $m_{56}$ | $m_{48}$ |
| 01 | $m_{33}$ | $m_{41}$ | $m_{57}$ | $m_{49}$ |
| 11 | $m_{35}$ | $m_{43}$ | $m_{59}$ | $m_{51}$ |
| 10 | $m_{34}$ | $m_{42}$ | $m_{58}$ | $m_{50}$ |

$a\,b'$

| $ef$ \ $cd$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_4$ | $m_{12}$ | $m_{28}$ | $m_{20}$ |
| 01 | $m_5$ | $m_{13}$ | $m_{29}$ | $m_{21}$ |
| 11 | $m_7$ | $m_{15}$ | $m_{31}$ | $m_{23}$ |
| 10 | $m_6$ | $m_{14}$ | $m_{30}$ | $m_{22}$ |

$a'b$

| $ef$ \ $cd$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_{36}$ | $m_{44}$ | $m_{60}$ | $m_{52}$ |
| 01 | $m_{37}$ | $m_{45}$ | $m_{61}$ | $m_{53}$ |
| 11 | $m_{39}$ | $m_{47}$ | $m_{63}$ | $m_{25}$ |
| 10 | $m_{38}$ | $m_{46}$ | $m_{62}$ | $m_{54}$ |

$ab$

(e) Şase variabile

Figura 2.2. Diagramele Karnaugh cele mai uzitate.

În diagramele Karnaugh, datorită codului Gray, sunt plasate în celule învecinate unităţi corespunzătoare mintermilor respectivi care, astfel, diferă printr-o singură variabilă. Doi astfel de mintermi se pot combina şi produc un implicant în baza proprietăţilor algebrelor Boole-ene. Cu alte cuvinte, diagramele Karnaugh transformă adiacenţa logică în adiacenţă geometrică, fizică, a mintermilor.

Locaţia unui minterm, în diagrama Karnaugh, are în imediata vecinătate locaţiile mintermilor potenţiali adiacenţi.
În figura 2.X sunt prezentate diagramele Karnaugh utilizate curent. Pentru o mai clară înţelegere a utilizării Diagramelor Karnaugh se consideră un exemplu simplu.

<u>Exemplul 2.10.</u> Se consideră funcţia $h$(u,v) = $m_0 + m_2 + m_3$. Diagrama Karnaugh, generică, pentru funcţii cu două variabile este prezentată în figura 2.2 (a) iar reprezentarea funcţiei $h$ este prezentată în figura 2.2(b).

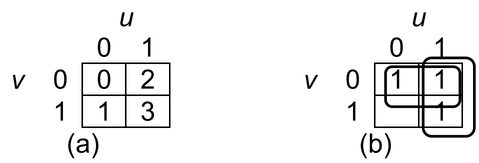



Figura 2.3.
(a) Diagrama Karnaugh generică pentru funcţii cu două variabile.
(b) Reprezentarea funcţiei din exemplul 2.10 printr-o diagramă Karnaugh.

Diagrama generică are în fiecare din cele patru celule înscris un număr, corespunzător indexului mintermului ori maxtermului. Astfel, deoarece funcţia $h$ are trei mintermi, s-au înscris, corespunzător, trei unităţi pentru cei trei mintermi (figura 2.2(b)). Cele două contururi din figura 2.2(b) vin să puncteze asocierile, în vederea minimizării funcţiei, dintre cei trei mintermi. Cei trei mintermi sunt $m_0 = u'v'$, $m_2 = uv'$ şi $m_3 = uv$. Conform primului contur, cel orizontal, se scrie expresia: $m_0 + m_2 = u'v' + uv' = (u' + u)v' = v'$. Similar, pentru cel de-al doilea contur, se scrie expresia: $m_3 + m_2 = uv + uv' = (v' + v)u = u$.
Se poate concluziona asupra unei proprietăţi esenţiale a diagramelor Karnaugh:
- o pereche de unităţi adiacente cuprinse într-un contur produc un implicant care are o variabilă mai puţin. Variabila care s-au menţinut au proprietatea că au paritate constantă în conturul respectiv (adică, sunt fie constant asertate ori constant complementate).
Fiecare contur a determinat câte un implicant, respectiv $p = v'$ şi $q = u$. Se poate uşor constata faptul că ambii implicanţi sunt primi (funcţia are doar două variabile).
Tabelul implicanţilor primi, pentru această funcţie, arată astfel:

| | $m_0$ | $m_2$ | $m_3$ |
|---|---|---|---|
| $p$ | 1 | 1 | |
| $q$ | | 1 | 1 |

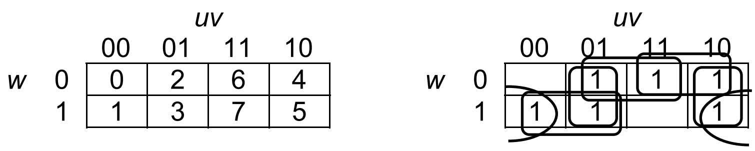
Se remarcă faptul că atât $p$ cât şi $q$ sunt implicanţi primi esenţiali.
Rezultă, în adevăr, expresia minimizată: $h$(u,v) = $u + v'$.

Aşa cum s-a putut vedea în exemplul 2.10 contururile desenate peste două unităţi vecine, dintr-o diagramă Karnaugh pentru două variabile, au produs doi implicanţi primi, în acest caz.
Atunci când două unităţi (învecinate) sunt prinse într-un contur rezultă un implicant care are o variabilă mai puţin. Variabila redusă corespunde variabilei care în respectivul contur, cu două unităţi, îşi schimbă paritatea (adică, apare atât asertată cât şi complementată).
Un contur, în general, va genera un implicant care va păstra doar variabilele care au aceeaşi paritate de-alungul conturului respectiv.
Contururile pot include o unitate, două unităţi, patru unităţi, 16 unităţi, în general o expresie de forma $2^n$. Din raţiuni pragmatice $n$ este, în general, cel mult 5.
Exemplul următor introduce utilizarea diagramei Karnaugh pentru funcţiile cu trei variabile.

Exemplul 2.11. Se consideră funcţia $f(u, v, w) = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$.
În figura 2.4 (a) este prezentată diagrama Karnaugh generică, pentru funcţiile cu trei variabile.

Diagrama generică are în fiecare din cele opt celule înscris un număr, corespunzător indexului mintermului ori maxtermului corespunzător.
Astfel, deoarece funcţia *f* este reprezentată prin şase mintermi, s-au înscris, corespunzător, şase unităţi pentru cei şase mintermi (figura 2.4(b)).
Contururile desenate în figura 2.4(b) epuizează toate posibilităţile de grupare de unităţi, două câte două.
Este introdus şi un contur nou (pentru cele două unităţi aflate în extremităţile ultimei linii). Acesta sugerează cuprinderea celor două unităţi (corespunzătoare mintermilor $m_1$ şi $m_5$) printr-un contur generalizat. Acest contur generalizat (prin exteriorul diagramei) este trasat în baza vecinătăţii unităţilor respective (ciclicitatea codului Gray).
Implicanţii generaţi prin aceste contururi sunt etichetaţi astfel:
$n = m_2 + m_6$, $p = m_6 + m_4$, $q = m_2 + m_3$, $r = m_1 + m_3$, $s = m_4 + m_5$, $t = m_1 + m_5$.

Aceşti implicanţi au următoarele expresii algebrice:
$n = vw'$, $p = uw'$, $q = u'v$, $r = u'w$, $s = uv'$, $t = v'w$.
Mulţimea implicanţilor generaţi este maximă. Nu mai există alţi implicanţi, pentru această funcţie, în afară de aceştia.
Toţi implicanţii generaţi sunt primi întrucât nu există alţi implicanţi ori reuniuni de implicanţi care să-i conţină.




(a) (b)

Figura 2.4.
(b) Diagrama Karnaugh, generică, pentru funcţii cu trei variabile.
(c) Diagrama Karnaugh pentru funcţia din exemplul 2.11.

Tabelul implicanţilor primi pentru această funcţie arată astfel:

| | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ | $m_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *n* | | 1 | | | | 1 | |
| *p* | | | | 1 | | 1 | *e* |
| *q* | | 1 | 1 | | | | |
| *r* | 1 | | 1 | | | | *e* |
| *s* | | 1 | 1 | | | | |
| *t* | | | | | 1 | 1 | *e* |

Implicantul *r* este esenţial, deoarece acoperă în exclusivitate mintermul $m_1$. Similar, implicantul *p* este esenţial (acoperă în exclusivitate mintermul $m_4$), după cum şi implicantul *t* este esenţial (acoperă în exclusivitate mintermul $m_5$). Aceşti trei implicanţi primi esenţiali vor face parte din orice acoperire minimală iredundantă a funcţiei *f*. În tabelul implicanţilor s-au marcat implicanţii primi esenţiali prin caracterul *e* plasat în stânga tabelului, în dreptul liniilor respective.
Se aplică metoda lui Petrick tabelului cu implicanţi primi. Clauza care stabileşte acoperirea primului minterm este *r*; clauza relativă la cel de-al doilea minterm este $n + q + s$, etc. Produsul de sume este:
$(r)(n + q + s)(q + r + s)(p)(t)(n+p+t) = 1$,
Se poate remarca:
$(r)(q + r + s) = (r)$ şi $(t)(n+p+t) = (t)$, ceea ce micşorează mult efortul de calcul Boole-ean al produsului de sume:
$(r)(n + q + s)(p)(t) = 1$, rezultând în final:
$nprt + pqrt + prst = 1$.
În consecinţă sunt trei acoperiri cu aceeaşi cardinalitate:
(1) $f(u, v, w) = vw' + uw' + u'w + v'w$, $(nprt)$;

(2) $f(u, v, w) = uw' + u'v + u'w + v'w,$     $(pqrt)$;
(3) $f(u, v, w) = uw' + uv' + u'w + v'w,$     $(prst)$.

Exemplul care urmează punctează, utilizând în continuare diagrama Karnaugh pentru trei variabile, alte contururi tipice pentru această diagramă.

Exemplul 2.12. Patru funcţii Booleene *f, g, h* şi *j* sunt definite după cum urmează:
$f(u, v, w) = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6,$
$g(u, v, w) = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_7,$
$h(u, v, w) = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7,$
$j(u, v, w) = m_1 + m_2 + m_4 + m_7.$
Cele patru funcţii sunt reprezentate prin diagramele Karnaugh corespunzătoare din figura 2.4.
Pentru funcţia *f* sunt desenate două contururi, ambele cu câte patru unităţi. Primul contur, care cuprinde prima linie din diagramă, poate fi considerat ca fiind compus din suma a două contururi cu câte două unităţi fiecare: $(m_0 + m_2) + (m_7 + m_5) = (u'w') + (uw') = w'$.
Conturul care cuprinde de asemenea patru unități, format prin exteriorul diagramei peste cele două coloane din marginile diagramei, poate fi considerat ca fiind alcătuit din două contururi care închid fiecare câte două unităţi: $(m_0 + m_1) + (m_4 + m_5) = (u'v') + (uv') = v'$.
Drept concluzie se poate spune că un contur cu patru unităţi va crea un implicant care păstrează doar două variabile, acelea care au paritate constantă în conturul respectiv.

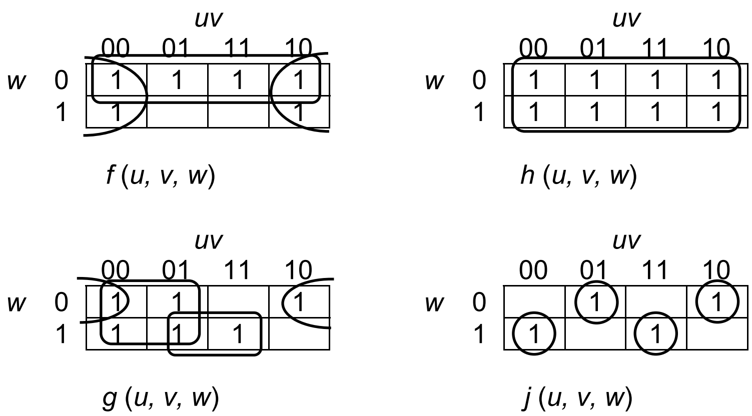



Figura 2.4. Diagramele Karnaugh pentru funcţiile *f, g, h* şi *j.*

În final funcţia *f* are forma minimizată: $f = w' + v'$.
Funcţia *g* are un contur cu patru unităţi care poate fi descompus în două contururi cu câte două unităţi: $(m_0 + m_2) + (m_1 + m_3) = (u'w') + (u'w) = u'$. Celelalte două contururi sunt cu câte două unităţi: $(m_0 + m_4) = v'w'$ şi respectiv $(m_3 + m_7) = vw$. Simplificarea funcţiei conduce la expresia algebrică $g = u' + vw + v'w'$.

Minimizarea exactă funcţiilor scalare boolene este fundamentată teoretic prin următoarea teoremă:

> **Teorema lui Quine.** Există o acoperire minimă care este primă.
> *Demonstraţia*. Se consideră o acoperire minimă care nu este primă. Fiecare implicant ne-prim poate fi înlocuit printr-un implicant prim care-l conţine. Astfel, mulţimea de implicanţi rezultată este o acoperire care are aceeaşi cardinalitate ca şi acoperirea iniţială. În concluzie, există o acoperire minimă care este primă.

Teorema lui Quine pune în evidenţă rolul implicanţilor primi ai unei funcţii scalare. Căutarea soluţiei problemei de acoperire, în baza teoremei Quine, se restrânge doar la acoperirile minimale *alcătuite exclusiv din implicanţi primi*.
Faptul că, pentru o funcţie scalară Booleeană, există o acoperire minimă, cel puţin una, constituită din implicaţi primi conduce la următoare metodă generală, bipartită, de calcul a minimizării exacte a funcţiilor scalare Booleene:

(a) Generarea implicanţilor primi ai unei funcţii scalare, precizate.
(b) Găsirea acoperirii de cardinalitate minimă pentru respectiva funcţie.

Referitor la cel de-al doilea pas al metodei de minimizare exactă, McCluskey a formulat căutarea acoperirii minime ca o problemă de acoperire printr-o *matrice de incidenţă a implicanţilor primi şi a mintermilor* asociaţi funcţiei specificate.
Această problemă de acoperire este *unată*, pentru că toate clauzele de acoperire pot fi exprimate prin disjuncţii de implicanţi primi.

Calculul mulţimii, tuturor implicanţilor primi ai unei funcţii scalare cu $n$ variabile este o problemă dificilă. Dificultatea abordării rezidă în *intractabilitatea problemei şi în mărimea matricii de incidenţă*.
În adevăr, pentru o funcţie scalară de $n$ variabile, sunt posibil de considerat $2^{n-1}$ mintermi şi $3^n/n$ implicanţi primi. Un algoritm al unei probleme de mărime exponenţială este foarte probabil să necesite resurse de calcul (memorie şi timp) prohibitiv de mari.

Metodele eficiente de generare a implicanţilor primi pentru o funcţie booleeană scalară fac uz de reprezentarea funcţiei prin diagramele Karnaugh sau de o metodă tabelară, sistematică, care generează algebric toţi implicanţii primi.
Ambele metode sunt utilizabile, pentru un număr relativ restrâns de variabile, în calcul manual, Cea de-a doua metodă se poate utiliza pentru calcul automat prin implementarea unor aplicaţii programate.

Reuniunea tuturor membrilor mulţimii implicanţilor primi ai unei funcţii formează ceea ce se numeşte, tradiţional, *suma completă* a unei funcţii. Cu toate că această sumă completă poate fi utilizată ca o acoperire a funcţiei, soluţia este departe, în general, de soluţia minimă. O situaţie particulară o reprezintă cazul în care toţi implicanţii primi ai unei funcţii sunt esenţiali. În astfel de situaţii, suma completă este şi soluţia minimă a acoperirii funcţiei respective.

<u>*Exemplul* 1</u>

În acest exemplu se va considera funcţia specificată prin suma de mintermi:
$f = m_0 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{12} + m_{13} + m_{14}$.
Numărul minim de variabile este patru, şi vor fi notat prin: $x_8$, $x_4$, $x_2$ şi $x_1$.

Exprimarea mintermilor în format binar este prezentată în tabelul 1.*a*:

*Tabelul* 1

| Mintermii funcţiei | Variabilele funcţiei $x_8$ | $x_4$ | $x_2$ | $x_1$ |
|---|---|---|---|---|
| $m_0$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $m_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $m_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $m_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $m_6$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $m_7$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $m_8$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $m_9$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $m_{10}$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $m_{12}$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $m_{13}$ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $m_{14}$ | 1 | 1 | 1 | 0 |

Diagrama Karnaugh corespunzătoare acestei funcţii:

| $x_2x_1$ \ $x_8x_4$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | | | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | | |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Figura 1. Diagrama Karnaugh pentru funcţia exemplului 1.

Din diagrama Karnaugh rezultă că suma completă (suma tuturor implicanţilor primi) pentru funcţia considerată arată astfel:

$$f = x_1' + x_8x_2' + x_8'x_2.$$

Analiza implicanţilor primi, generaţi prin diagrama Karnaugh, va face uz de matricea de incidenţă implicanţi primi / mintermi aşa cum se poate urmări în tabelul 2.

*Tabelul* 2

| Implicanţii primi | | Mintermii funcţiei $m_0$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_6$ | $m_7$ | $m_8$ | $m_9$ | $m_{10}$ | $m_{12}$ | $m_{13}$ | $m_{14}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1'$ | (E) | $\underline{*}$ | * | | * | * | | * | | * | * | | * |
| $x_8x_2'$ | (E) | | | | | | | * | $\underline{*}$ | | * | * | |
| $x_8'x_2$ | (E) | | * | $\underline{*}$ | | * | * | | | | | | |

Considerând tabelul de acoperire rezultă că toţi implicanţii primi sunt şi esenţiali, deci suma completă este o sumă minimă.

□

## Generarea şi analiza implicanţilor primi, ai unei funcţii scalare, utilizând diagrame Karnaugh

Diagramele Karnaugh sunt o reprezentare convenabilă, echivalentă tabelului de adevăr, pentru o funcţie scalară booleeană. Contururile, suprafeţele, care grupează valorile 1 şi x, dacă acestea din urmă există, definesc implicanţi ai funcţiei reprezentate.
Aceste suprafeţe sunt caracterizate, în mod esenţial, prin numărul de valori cuprinse. Valorile respective trebuie să fie, întodeauna, puteri ale lui 2 (1, 2, 4, 8 ş.a.m.d.) limitate, fireşte, la numărul maxim de celule ale unei diagrame.
Suprafeţele sunt asociate valorilor 1 ale funcţiei şi pot fi, eventual, maximizate utilizând şi valori neprecizate ale funcţiei. Acele suprafeţele care cuprind un număr maxim de valori 1 şi x, fiind trasate în jurul unor valori 1 ale funcţiei desemnează grupări ale termenilor produs care produc implicanţi primi.

O analiză a mulţimii implicanţilor primi ai unei funcţii scalare date, arată că între aceştia se pot stabili anumite relaţii, printre care una care crează o categorie aparte, numită *implicanţii primi esenţiali*. Implicanţii primi esenţiali au proprietatea să acopere anumiţi mintermi care nu mai sunt acoperiţi, conţinuţi, în alţi implicanţi primi.
Această proprietate de exclusivitate a acoperirii unor puncte din domeniul de definiţie (având valoarea1 a funcţiei) conduce la prezenţa implicanţilor primi esenţiali, atunci când aceştia există, în orice soluţie minimă a acoperirii funţiei.
Această analiză se poate efectua, pentru o funcţie scalară precizată, prin determinarea unei matrici de incidenţă implicanţi primi / mintermi.

*Exemplul* 2

Se consideră funcţia specificată prin suma canonică:
$f = m_0 + m_2 + m_3 + m_5 + m_7$.
Numărul de variabile este trei, variabilele fiind notate prin *x*,*y* şi *z*.
Corespondentul binar al celor cinci mintermi este prezentat în tabelul 3.

*Tabelul* 3.

| Mintermii funcţiei | Variabilele *x* | *y* | *z* |
|---|---|---|---|
| $m_0$ | 0 | 0 | 0 |
| $m_2$ | 0 | 1 | 0 |
| $m_3$ | 0 | 1 | 1 |
| $m_5$ | 1 | 0 | 1 |
| $m_7$ | 1 | 1 | 1 |

Diagrama Karnaugh asociată acestei funcţii este prezentată în figura 3.

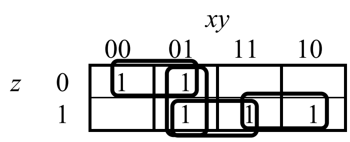



Figura 2. Diagrama Karnaugh
pentru funcţia exemplului 2.

Pe diagrama Karnaugh din figura 2 s-au putut genera patru implicanţi primi.
Aceştia sunt notatţi după cum urmează:

$p_1 = x'z'$, $p_2 = x'y$, $p_3 = xz$ şi $p_4 = yz$.

Matricea de incidenţă pentru această funcţie este înfăţişată în tabelul 4.a.

*Tabelul* 4.a

| Implicanţii primi | Mintermii funcţiei $m_0$ $x'y'z'$ | $m_2$ $x'yz'$ | $m_3$ $x'yz$ | $m_5$ $xy'z$ | $m_7$ $xyz$ | Obs. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1 = x'z'$ | * | * | | | | E |
| $p_2 = x'y$ | | * | * | | | |
| $p_3 = xz$ | | | | * | * | E |
| $p_4 = yz$ | | | * | | * | |

Se deduce din matricea de incidenţă faptul că implicanţii primi:

$p_1 = x'z'$ (acoperă esenţial $m_0$) şi $p_3 = xz$ (acoperă esenţial $m_5$),

sunt esenţiali deoarece acoperă în exclusivitate mintermii $m_0$ şi respectiv $m_5$.

Aceşti implicanţi primi esenţiali vor face parte din orice soluţie de minimizare a acestei funcţii.

Din matricea de incidenţă sunt îndepărtate liniile corespunzătoare celor doi implicanţi dar, sunt în egală măsură îndepărtate coloanele, corespunzătoare, mintermilor acoperiţi de cei doi implicanţi primi esenţiali anterior menţionaţi: $m_0$, $m_2$, $m_5$, şi $m_7$.

Matricea de incidenţă modificată este prezentată în tabelul 4.b.

*Tabelul* 4.b

| Implicanţii primi | Minterm $m_3$ $x'yz$ | Obs |
|---|---|---|
| $p_2 = x'y$ | * | |
| $p_4 = yz$ | * | |

Corespunzător actualei matrice de incidenţă funcţia considerată admite două soluţii minime cu cardinalitatea trei:

$$\{ p_1, p_3 , p_2 \} \text{ şi}$$
$$\{ p_1, p_3 , p_4 \}$$

□

Exemplul precedent a dovedit că şi atunci când funcţiile au un număr mic de variabile, pot exista mai multe soluţii minime ale acoperirii funcţiei. Exemplul care urmează face vizibile alte aspecte ale minimizării funcţiilor scalare Booleene.

<u>*Exemplul* 3</u>

Se consideră funcţia specificată prin suma canonică:

$f = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_{10} + m_{11} + m_{13} + m_{15}$.

Numărul minim de variabile al acestei funcţii este patru, notate prin $a, b, c$ şi $d$.

Translatarea în binar a mintermilor acestei funcţii, este arătată în tabelul 5:

*Tabelul* 5.

| Mintermii funcţiei | Variabilele funcţiei $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $m_0$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $m_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $m_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $m_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $m_5$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $m_{10}$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $m_{11}$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $m_{13}$ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $m_{15}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

Diagrama Karnaugh corespunzătoare funcţiei *f* este prezentată în figura 3:

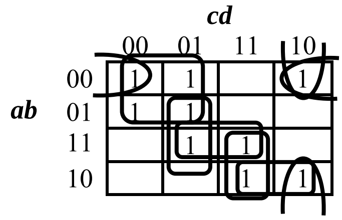



Figura 3. Diagrama Karnaugh a funcţiei
din exemplul 3.

Calculul mulţimii tuturor implicanţilor primi procedează unitate cu unitate, astfel:
Pentru fiecare unitate din diagramă se caută toate suprafaţele maxime (1, 2, 4 sau 8) care se pot trasa în jurul acelei unităţi.
Fiecare suprafaţă maximă delimitează teremenii produs care produc un implicant prim. Din diagramă rezultă că, pentru funcţia considerată, mulţimea implicanţilor primi arată astfel:

$$P = \{a'c',\ b\,c'd,\ a\,b\,d,\ a\,c\,d,\ a\,b'\,c,\ b'\,c\,d',\ a'\,b'd'\}.$$

Matricea de incidenţă mintermi / implicanţi primi, este prezentată în tabelul 6.*a*:

*Tabelul* 6.*a*

| Implicanţii primi | $m_0$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_4$ | $m_5$ | $m_{10}$ | $m_{11}$ | $m_{13}$ | $m_{15}$ | Obs |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1 = a'c'$ | * | * | | * | * | | | | | E |
| $p_2 = b\,c'd$ | | | | | * | | | * | | |
| $p_3 = a\,b\,d$ | | | | | | | | * | * | |
| $p_4 = a\,c\,d$ | | | | | | | * | | * | |
| $p_5 = a\,b'c$ | | | | | | * | * | | | |
| $p_6 = b'\,c\,d'$ | | | * | | | * | | | | |
| $p_7 = a'\,b'd'$ | * | | * | | | | | | | |

Se observă ca $p_1 = a'c'$ este singurul implicant prim esenţial, deoarece $m_1$ este acoperit doar de acesta. Implicantul prim esenţial $p_1 = a'c'$este extras din matrice si adăugat acoperirii (acoperirilor) minime. Din cauză că $p_1$ acoperă şi mintermii $m_0$ şi $m_5$ (aşa cum se poate remarca din matricea de incidenţă) aceşti aceşti mintermi vor fi îndepărtaţi din matricea de incidenţă. Îndepărtarea celor doi mintermi se justifică, simplu, prin faptul că implicantul prim $p_1$, odată ales acoperă, implicit, şi aceşti mintermi simplificând problema alegerii celorlalţi implicanţi primi ce vor defini o soluţie ori alta a acoperirii prime a funcţiei. După aceste modificări matricea de incidenţă arată ca în tabelul 6.*b*.

*Tabelul* 6.*b*

| Implicanţii primi | $m_2$ | $m_{10}$ | $m_{11}$ | $m_{13}$ | $m_{15}$ | Obs |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_2 = b\,c'd$ | | | | * | | Incidenţă unică |
| $p_3 = a\,b\,d$ | | | | * | * | |
| $p_4 = a\,c\,d$ | | | * | | * | |
| $p_5 = a\,b'c$ | | * | * | | | |
| $p_6 = b'\,c\,d'$ | * | * | | | | |
| $p_7 = a'\,b'd'$ | * | | | | | Incidenţă unică |

Urmare a modificărilor aplicate matricei de incidenţă se poate remarca apariţia unor situaţii speciale. Implicanţii primi $p_2 = b\,c'd$ şi $p_7 = a'\,b'd'$ au incidenţă unică, dar ne-esenţială.
O analiză simplă relevă faptul că, în configuraţia actuală, matricea de incidenţă arată că aceşti doi implicanţi nu mai sunt, în acest context, primi.
În adevăr $p_2 \subseteq p_3$ şi $p_7 \subseteq p_6$ din cauza îndepărtării mintermii $m_0$ şi respectiv $m_5$.

Dar, faptul că aceşti doi implicanţi nu mai sunt, în actuala configuraţie a matricei de incidenţă, implicanţi primi conduce la descalificarea lor pentru posibile alegeri în soluţii minime de acoprire.
Sunt îndepărtaţi din matrice şi aceşti doi implicanţi.

Matricea de incidenţă arată acum aşa cum se poate vedea în tabelul 6.*c*.

*Tabelul* 6.*c*

| Implicanţii primi | Mintermii funcţiei $m_2$ | $m_{10}$ | $m_{11}$ | $m_{13}$ | $m_{15}$ | Obs |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_3 = a\,b\,d$ | | | | * | * | E |
| $p_4 = a\,c\,d$ | | | * | | * | |
| $p_5 = a\,b'c$ | | * | * | | | |
| $p_6 = b'\,c\,d'$ | * | * | | | | E |

Ultima modificare a matricei de incidenţă a făcut să apară implicanţi esenţiali consecutivi.
Au apărut doi noi implicanţi esenţiali: $p_3 = a\,b\,d$ (coloana $m_{13}$) şi $p_6 = b'\,c\,d'$ (coloana $m_2$).
Aceşti implicanţi primi vor fi îndepărtaţi din matrice şi adăugaţi acoperirii minime.
Corespunzător acestei îndepărtări sunt eliminate coloanele mintermilor $m_{15}$, $m_{13}$, $m_{10}$ şi $m_2$.

*Tabelul* 6.*d*

| Implicanţii primi | Minterm $m_{11}$ | Obs |
|---|---|---|
| $p_4 = a\,c\,d$ | * | |
| $p_5 = a\,b'c$ | * | |

Matricea de incidenţă rezulată dupa precedentele modificări este înfăţişată în tabelul 6.*d*. Au mai rămas doar doi implicanţi primi, echivalenţi. Aceşti implicanţi primi vor desemna două soluţii minime ale problemei considerate. Există două soluţii minime, fiecare cu câte patru implicanţi primi.
Soluţiile minime de acoperire pentru funcţia considerată în acest exemplu arată astfel:

$$\{p_2, p_3, p_6, p_4\} \text{ sau}$$
$$\{p_2, p_3, p_6, p_5\}.$$

□

**Utilizarea diagramelor Karnaugh pentru genrarea implicanţilor primi ai funcţiilor scalare având mai mult de 4 variabile**

Numărul de variabile reprezentabile prin sistemele de diagrame Karnaugh poate fi într-o oarecare măsură mărit, nefiind limitat strict la cel mult patru variabile.
Există posibilitatea alcătuirii unor diagrame pentru funcţii având mai mult de 4 variabile dar sesizarea grupărilor celor mai eficiente poate fi ceva mai delicată şi poate compromite eficienţa utilizării acestor diagrame Karnaugh de rang superior. Sesizarea grupărilor celor mai potrivite în diagramele cu mai mult de patru variabile necesită o experienţă peste medie.

Există numeroase abordări ale acestei probleme în literatura de specialitate. Ideia care a fost mult utilizată şi încercată practic s-a focalizat pe utilizarea unor diagrame Karnaugh, bine cunoscute şi uşor de reţinut, care să fie, la randul lor, în aşa fel grupate încât să sugereze modalităţi cât mai simple de minimizare. În exemplele care urmează sunt considerate funcţii cu mai mult decât patru variabile pentru ilustrarea metodei.

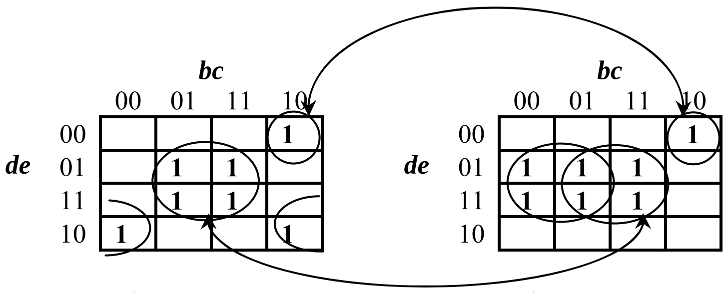
## Exemplul 4.

Se consideră funcţia cu cinci argumente: $u(a, b, c, d, e) = m_2 + m_5 + m_7 + m_8 + m_{10} + m_{13} + m_{15} + m_{17} + m_{19} + m_{21} + m_{23} + m_{24} + m_{29} + m_{31}$. Diagrama completă, pentru cinci varaibile (aşa cum este prezentată în figura 2.4) se descompune în două diagrame de patru variabile fiecare, dar corespunzând una pentru valorile 0 ale variabilei *a* iar cealaltă pentru valorile 1 ale aceleiaşi variabile. Prezenţa unor grupări simetrice, în cele două diagrame Karnaugh cu patru variabile, conduce la concluzia că respectivele grupări, fiind reprezentabile prin aceleaşi expresii în variabilele *c*, *b, d,* şi *e*, oferă factorizarea respectivelor expresii şi reducerea, implicită a variabilei *a*.

| ***de*** \ ***abc*** | 000 | 001 | 011 | 010 | 110 | 111 | 101 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | **1** | **1** | | | |
| 01 | | **1** | **1** | | | **1** | **1** | **1** |
| 11 | | **1** | **1** | | | **1** | **1** | **1** |
| 10 | **1** | | | **1** | | | | |

$u(a, b, c, d, e) = m_2 + m_5 + m_7 + m_8 + m_{10} + m_{13} + m_{15} + m_{17} + m_{19} + m_{21} + m_{23} + m_{24} + m_{29} + m_{31}$.

**Figura 4a.** Diagrama Karnaugh cu cinci variabile pentru funcţia exemplului 4.




($\boldsymbol{a} = 0$)
**Figura 4b.** Diagrama Karnaugh corespunzătoare mintermilor funcţiei *u* din exemplul 4 care conţin $a = 0$.

($\boldsymbol{a} = 1$)
**Figura 4c.** Diagrama Karnaugh corespunzătoare mintermilor funcţiei *u* din exemplul 4 care conţin $a = 1$.

În continuare este prezenată şi transcrierea algebrică a grupărilor din cele două diagrame, precum şi grupările dintre diagrame:
$u(a, b, c, d, e) = a'(c'de') + (a' + a)ce + (a' + a)\, bc'd'e' + ab'e = a'c'de' + ce + bc'd'e' + ab'e$.

| ***de*** \ ***bc*** | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | ***a+a'*** |
| 01 | ***a*** | ***a+a'*** | ***a+a'*** | |
| 11 | ***a*** | ***a+a'*** | ***a+a'*** | |
| 10 | ***a'*** | | | ***a'*** |

**Figura 4d.** Diagrama Karnaugh corespunzătoare funcţiei *u* din exemplul 4 conţinând expresii în variabila *a*.

O altă abordare a acestei metode este substituirea unităţilor din diagramele Karnaugh prin expresii algebrice alcătuite cu variabilele care etichetează diagramele (în cazul de faţă este o singură variabilă şi anume variabila *a*). Aşa cum se poate remarca din figura 4d grupările omoloage din figurile 4b şi 4c au condus la expresiile *a*+*a'*, care se reduc (*a*+*a'*=1).

Pe de altă parte, grupările care n-au avut corespondenţi între cele două diagrame Karnaugh din figurile 4b şi 4c, au păstrat expresii în *a* (*a* şi respectiv *a*') aşa cum se poate vedea din diagrama Karnaugh prezentată în figura 4d.
Expresia, simplificată, a funcţiei *u*(*a, b, c, d, e*) prin utilizarea diagramei Karnaugh cu expresii în varaiabila *a*, este prezentată în figura 4e.

| **de** \ **bc** | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | **1** |
| 01 | ***a*** | **1** | **1** | |
| 11 | ***a*** | **1** | **1** | |
| 10 | ***a'*** | | | ***a'*** |

*u*(*a, b, c, d, e*) = *bc'd'e'* + *ce* + *ab'e* + *a'c'de'*

**Figura 4e.** Diagrama Karnaugh corespunzătoare mintermilor funcţiei *u* din exemplul 4 conţinând expresii simplificate în variabila *a*.

Metoda utilizării expresiilor algebrice, în locul unităţilor, în diagramele Karnaugh se poate face pornind direct de la forma algebrică în sumă de termeni canonici prin factorizarea cuburilor care nu conţin variabilele de etichetare. Pentru uşurinţa calculelor se poate observa că variabila *a* va apare doar în mintermii având indicele mai mare sau egal cu 16, în timp ce variabila *a'* va apare în mintermii cu indicele strict mai mic sau egal cu 15. Astfel, funcţia *u*(*a, b, c, d, e*) se poate scrie astfel:

*u*(*a, b, c, d, e*) = (*b'cd'e* + *bcd'e* + *b'cde* + *bcde* + *bc'd'e'*)(*a* + *a'*) + (*b'c'de'* + *bc'de'*)*a'* + (*b'c'd'e* + *b'cd'e* + *b'c'de* + *b'cde*)*a*.

Alcătuirea unei diagrame Karnaugh utilizând variabilele *b, c, d,* şi *e* cu expresii în variabila *a* va arăta ca în figura 4.e. Implicanţii primi astfel obţinuţi sunt esenţiali.

Exemplul care urmează abordează o funcţie cu şase variabile schiţând o metoda mai generală de tratare a funcţiilor cu şase variabile utilizând un cadran cu patru diagrame Karnaugh, fiecare cu câte patru variabile. Metoda vizează utilizarea şabloanelor diagramelor Karnaugh cu patru variabile pentru funcţii cu şase variabile.
Ca şi în cazul exemplului precedent se utilizează introducerea unor expresii algebrice în locul unităţilor, procedeul uzat în mod curent. În maniera acesta se deschide o abordare care poate permite, în continuare, extinderea diagramelor Karnaugh pentru funcţii cu un număr mai mare decât se utilizează tradiţional.

*Exemplul* 5.

Se consideră funcţia cu şase variabile: $v(a, b, c, d, e, f) = m_2 + m_8 + m_{10} + m_{18} + m_{24} + m_{26} + m_{34} + m_{37} + m_{42} + m_{45} + m_{50} + m_{53} + m_{58} + m_{61}$. Diagrama Karnaugh cu şase variabile a acestei funcţii este prezentată în figura 5a. O reprezentare a acestei funcţii divizată în patru diagrame Karnaugh de patru variabile fiecare este prezentată în figura 5b.

| **bef** \ **acd** | 000 | 001 | 011 | 010 | 110 | 111 | 101 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | | | | **1** | | | | |
| 001 | | | | | | **1** | **1** | |
| 011 | | | | | | | | |
| 010 | **1** | | | **1** | **1** | | | **1** |
| 110 | **1** | | | **1** | **1** | | | **1** |
| 111 | | | | | | | | |
| 101 | | | | | | **1** | **1** | |
| 100 | | | | **1** | | | | |

**Figura 5a.** Diagrama Karnaugh pentru funcţia $v(a, b, c, d, e, f) = m_2 + m_8 + m_{10} + m_{18} + m_{24} + m_{26} + m_{34} + m_{37} + m_{42} + m_{45} + m_{50} + m_{53} + m_{58} + m_{61}$, din exemplul 5.

Grupările pentru această funcţie, în figura 5b, au fost desenate astfel încât prin grosimea şi forma liniei unei grupări sunt sugerate modul în care acestea sunt considerate.
Astfel, cu linie punctată marunt sunt marcate două grupări similare din diagramele corespunzătoare ($ab$ = 00) şi ($ab$ = 01), $a'cd'f'(b' + b) = a'cd'f'$.
Tot cu linie punctată, dar mai mai mare, sunt desemnate două grupări din diagramele ($ab$ = 10) şi respectiv ($ab$ = 11), $ade'f(b' + b) = ade'f$.
Cu linie plină îngroşată este marcat un grup de 8 unităţi, câte două din fiecare diagramă şi situate la baza diagramelor respective $d'ef'(a'b' + ab' + a'b + ab) = d'ef'$. Rezultă că forma minimizată a acestei funcţii este:

$$v(a, b, c, d, e, f) = a'cd'f' + ade'f + d'ef'.$$

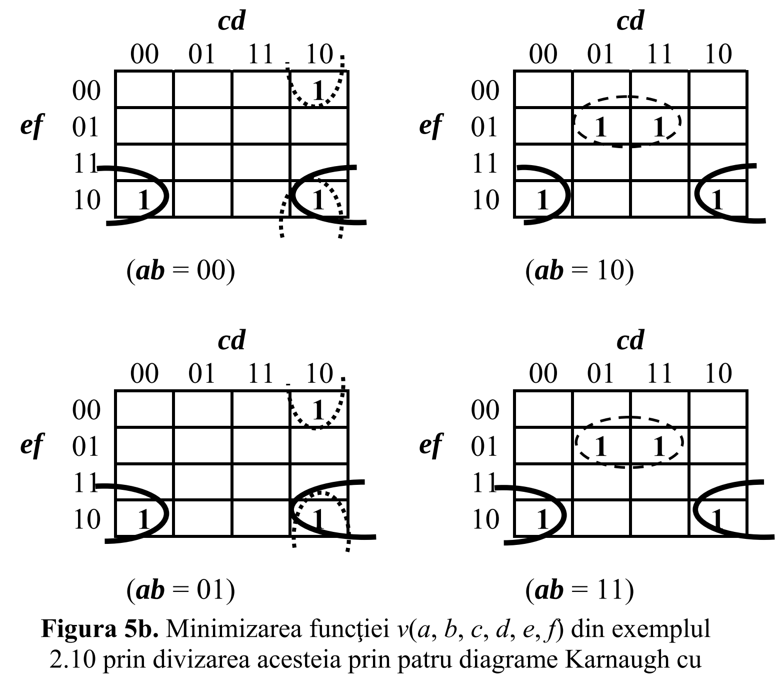



**Figura 5b.** Minimizarea funcţiei $v(a, b, c, d, e, f)$ din exemplul 2.10 prin divizarea acesteia prin patru diagrame Karnaugh cu câte patru variabile fiecare.

Aplicând substituirea unităţilor din diagramele Karnaugh din figura 5b prin expresii construite cu etichetele diagramelor respective se obţine diagrama Karnaugh din figura 5c.

| ***ef*** \ ***cd*** | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | ***a'*** |
| 01 | | ***a*** | ***a*** | |
| 11 | | | | |
| 10 | **1** | | | **1** |

$$v(a, b, c, d, e, f) = a'cd'f' + ade'f + d'ef'.$$

**Figura 5c.** Diagrama Karnaugh corespunzătoare mintermilor funcţiei *v* din exemplul 5 conţinând expresii simplificate în variabilele *a* şi *b*.

Se poate remarca, în final, faptul că:

- grupul celor două unităţi din diagramele etichetate $ab$ = 10 şi $ab$ = 11 ($c'de'f$ şi $cde'f$ în figura 5b), apar în figura 5c prin variabila $a$,
- grupul celor opt unităţi sunt reprezentate în diagrama din figura 5c prin constanta 1 (cele două variabile ale etichetelor s-au redus), iar
- cele două unităţi ($cd'e'f'$) din diagramele etichetate prin $ab$ = 00 şi $ab$ = 01 (figura 5b) sunt reprezentate prin expresia $a'$ în diagrama Karnaugh din figura 5c;
- Implicanţii primi, astfel obţinuţi, sunt esenţiali.

□

<u>*Exemplul 6.*</u>

**Procedeul general de alegere al implicanţilor primi**

Alegerea implicanţilor primi utilizează reprezentare matricială de incidenţe, aşa cum s-a remarcat din exemplele anterioare, pentru sintetizarea raporturilor dintre implicanţii primi, pe de-o parte, şi termenii canonici pe de-altă parte.

Matricea de incidenţă are câte o coloană pentru fiecare termen canonic al funcţiei, şi câte o linie pentru fiecare implicant prim calculat prin algoritmul precedent.

Este de menţionat un aspect esenţial legat de termenii canonici neprecizaţi ai funcţiei. Aceştia sunt utilizaţi atunci când s-au generat implicanţii primi, dar nu vor fi consideraţi în problema de acoperire deoarece termenii, pentru care funcţia are valoare neprecizată, nu trebuie acoperiţi.

Matricea de incidenţă se completează linie cu linie.
Deîndată ce implicantul prim $p_i$, corespunzător liniei $i$ din matrice, acoperă, sau conţine, termenul canonic $m_j$ corespunzător coloanei $j$, atunci elementul matricii $a_{ij}$, este marcat cu simbolul *, altfel spaţiu. În maniera aceasta sunt marcate toate elementele matricii.

Ideia de bază, în continuare, este să se aleagă un număr cât mai mic de implicanţi primi care, fiecare în parte, să acopere cât mai mulţi termeni canonici, iar reuniunea lor să acopere în totalitate termenii canonici, mintermii, funcţiei.

Pentru aceasta, după completarea întregii matrice, se examinează rând pe rând coloanele (corespunzătoare termenilor canonici precizaţi) şi liniile (corespunzătoare implicanţilor primi) matricii pentru anumite situaţii particulare.

**Implicanţii primi esenţiali**

Ori de câte ori pe o coloană apare un singur marcaj (*), corespunzător acesteia, se găseşte un implicant prim $p_i$ care acoperă în *exclusivitate* termenul canonic respectiv, $m_j$.

Implicantul prim respectiv trebuie, aşa cum s-a arătat, inclus în orice acoperire a funcţiei deoarece este singurul care acoperă mintermul $m_j$ neacoperit (neconţinut) de alţi implicanţi primi. Astfel de implicanţi primi se numesc *implicanţi primi esenţiali*.

Extragerea liniei implicanţilor primi esenţiali din tabelă se soldează cu îndepărtarea a cel puţin o coloană, corespunzătoare termenului canonic acoperit în exclusivitate.
Mai pot fi şi alte coloane acoperite de implicantul prim $p_i$. Acestea, dacă există, sunt îndepărtate din matrice deoarece sunt acoperite de implicantul prim $p_i$ care acum face parte în mod cert din soluţia (soluţiile) minime de acoperire.

De multe ori aceste extrageri provocate de un implicant prim esenţial provoacă *esenţializări* ale altor coloane, care la rândul lor vor desemna alegeri certe ale unor implicanţi primi şi, în consecinţă, micşorarea tabelei (implicit şi a dificultăţii problemei). Pot apare şi dominanţe de linii, în urma eliminării esenţialilor.

**Dominanţa liniilor**

O altă situaţie care poate reduce dimensiunile matricii se referă la cazurile în care o linie din matricea de incidenţă este conţinută în întregime în altă linie. Aparent pare să fie o situaţie imposibilă.

Un implicant prim nu poate fi conţinut în alt implicant, exact din raţiuni de definiţie a implicanţilor primi.
Dar, dacă un implicant prim a fost generat utilizând mulţi termeni canonici corespunzători punctelor neprecizate din domeniul de definiţie al funcţiei iar în matrice punctele neprecizate nu sunt reprezentate, atunci poate să apară această situaţie.

Practic, astfel de situaţii descalifică un implicant prim privitor la selecţia acestuia într-o posibilă soluţie. Deoarece, astfel de implicant nu mai are calitatea de a fi prim. Acesta este îndepărtat din matrice, se micşorează dimensiunea matricii şi se uşurează sarcina de găsire a unei acoperiri optime (optimale).

**Dominanţa coloanelor**

Dacă în matrice apare o coloană *j* al cărei conţinut este cuprins, inclus, în totalitate în conţinutul altei coloane *k*, se spune că prima coloană este dominată de cea de-a doua (sau, alternativ, se spune că coloana *k* domină coloana *j*).

O coloană dominantă poate fi scoasă din matricea de incidenţe deoarece acoperirea coloanei dominate printr-o alegere sau alta de implicanţi primi va acoperi, în mod cert, şi coloana dominantă.

Îndepărtarea unei coloane din matrice datorită faptului că aceasta include o altă coloană, poartă denumirea de *îndepărtare a coloanelor dominante*. Este încă o cale de micşorare a complexităţii problemei.

Aplicarea celor trei căi de reducere a dimensiunii problemei se face alternativ şi iterativ până când:

- se construişte astfel, o soluţie unică (matricea dispare) sau,
- se constată că matricea nu mai poate fi redusă ajungându-se la situaţie în care matricea de incidenţă este ireductibilă.

Cel de-al doilea caz face să apară ceea ce se numeşte *nucleul dur* al problemei. Se poate proceda prin heuristici pentru găsirea unei soluţii peste acest nucleu dur, sau se pot calcula, atunci când dimensiunea nucleului dur permite, toate soluţiile posibile.
Această metodă, spre deosebire de metoda diagramelor Karnaugh (DK), este utilizabilă – în principiu – pentru minimizarea funcţiilor cu un număr arbitrar de variabile. Metoda se poate utiliza pentru programerea unui calcul automat de minimizare. Similar metodei DK, minimizarea are loc în doi paşi:

(1) stabilirea implicanţilor primi, şi
(2) calculul acoperirii minimale pentru funcţia respectivă.

Metoda utilizează scrierea binară a mintermilor funcţiei şi printr-o ordonare judicioasă facilitează găsirea implicanţilor adiacenţi dar şi calculul implicanţilor de ordin superior rezultaţi.

Într-o primă abordare vor fi prezentate principalele repere ale metodei aplicate funcţiilor scalare. Acestea vor facilita mult înţelegerea metodei în cazul general, funcţiilor Booleene vectoriale.

## Generarea şi analiza implicanţilor primi, ai unei funcţii, utilizând metoda Quine-McCluskey

În calculul implicanţilor primi, descris în cele ce urmează, mintermii funcţiei sunt, adeseori, numiţi implicanţi, sau cuburi, de ordinul 0 ai funcţiei. În timp ce, implicanţii care rezultă prin reducerea unei variabile sau a două sau mai multor variabile, sunt implicanţi de ordinul unu, respectiv de ordinul doi ori  superior. Calculul implicanţilor primi se efectuează considerând atât mintermii funcţiei cât şi mintermii neprecizaţi ai acesteia (dacă există).

Într-o primă etapă se calculează pentru fiecare implicant de ordinul 0 al funcţiei ponderea acestuia. Prin ponderea unui implicant se înţelege numărul de unităţi din reprezentarea binară a respectivului implicant.

Astfel, spre exemplu, implicanţii (de ordinul 0), 0101 şi 1101 au ponderea 2, respectiv 3, iar implicanţii -1-1 şi 01-0 au ponderea 2 (ordinul 2), respectiv 1 (ordinul 1).

Toţi implicanţii de acelaşi ordin şi având aceeaşi pondere sunt grupaţi în aceiaşi clasă.
Pe durata calculului implicanţilor primi, implicanţii de ordine diferite, chiar dacă au aceiaşi pondere, fac parte din clase distincte.

Procesul de calcul al implicanţilor primi începe prin aşezarea implicanţilor iniţiali (adică implicanţii de ordinul 0) care au aceeşi pondere, într-o aceeaşi clasă. Clasele sunt întotdeauna etichetate prin valoarea ponderii implicanţilor lor.

Etapa a doua, iterativă, este dedicată găsirii implicanţilor de ordin superior (implicanţii rezultaţi prin contopirea a doi implicanţi adiacenţi).
Termenii adiacenţi se găsesc întotdeauna printre implicanţii de acelaşi ordin din două clase succesive.
Bunăoară, printre implicanţii claselor 0 şi 1, dar şi printre implicanţii claselor 2 şi 3 etc, de ordinul 0. Astfel, se va cerceta sistematic adiacenţa termenilor dintre clasa 0 şi clasa 1, apoi adiacenţa dintre termenii claselor 1 şi 2 etc. Se începe ordonat cu implicanţii clasei cu cea mai mică pondere, dacă aceştia există (clasa 0, spre exemplu, dacă aceasta este nevidă).

Este util de remarcat faptul că, implicanţii clasei 1-a, spre exemplu, sunt cercetaţi mai întâi în raport cu adiacenţa faţă de implicanţii clasei 0 (venind dinspre aceasta), iar apoi sunt cercetaţi în raport cu adiacenţa faţă de implicanţii clasei a 2-a. Fireşte, dacă respectivele clase sunt nevide.

Adiacenţa, este definită, la fel ca şi la metoda diagramelor Karnaugh, astfel : doi implicanţi sunt adiacenţi dacă şi numai dacă diferă prin valoarea unui singur rang cu valoare binară, în rest cei doi implicanţi fiind identici.

Deîndată ce doi implicanţi se dovedesc adiacenţi, este creat un implicant de ordin imediat superior. Implicanţii adiacenţi respectivi sunt, fiecare în parte, marcaţi. Marcajul implicanţilor adiacenţi semnifică faptul că ambii au un succesor (reprezentant) de ordin superior. Implicantul de ordin imediat superior este stocat într-o clasă, cu pondere corespunzătoare, de implicanţi de acelaşi ordin.

Dacă s-au identificat doi implicanţi adiacenţi din clasele a 3-a şi a 4-a, de ordinul 0, se va genera un implicant care va fi din clasa a 2-a, dar de ordinul 1, spre exemplu.
Odată încheiat ciclul prin care s-au cercetat implicanţii de ordinul zero se continuă cu implicanţii de ordin 1 (toţi aceşti implicanţi au o variabilă redusă) dacă există cel puţin două clase succesive nevide.

Criteriul adiacenţei acestora este, în principiu acelaşi, cu menţiunea că doi implicanţi aparţinând unor clase consecutive, de ordinul 1, trebuie să aibă, suplimentar, variabila redusă corespunzător aceluiaşi rang. Adiacenţa implicanţilor de ordinul al doilea, sau mai mare, se extinde similar, impunându-se ca rangurile variabilelor reduse să coincidă. Pentru rangurile cu valori binare (nereduse) se menţine acelaşi criteriu : să existe un singur rang prin care să difere.

Această etapă, de stabilirea a adiacenţelor şi de producere a implicanţilor de ordin superior este, aşa cum s-a mai menţionat, iterativă. Fiecare iteraţie va fi reluată, cu clasele implicanţilor de ordin superior, atâta vreme cât se pot genera implicanţi de ordin superior celor existenţi la începutul iteraţiei. Procesul iterativ se încheie atunci când nu se mai pot genera implicanţi de ordin superior.

În acel moment, mulţimea implicanţilor de ordin maxim (de la care începând, nu s-au mai generat implicanţi superiori acestora) reunită cu mulţimea tuturor implicanţilor, din ordinele inferioare, *nemarcaţi* (inclusiv implicanţii de ordin zero nemarcaţi), formează mulţimea implicanţilor primi pentru funcţia respectivă.
<u>*Exemplul* 6</u>

Se consideră funcţia:
$w = m_0 + m_3 + m_4 + m_7 + m_8 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{14} + m_{15} + m_{18} + m_{19} + m_{23} + m_{26} + m_{28} + m_{29} + m_{30}$.
Se observă, cu uşurinţă, că funcţia are 5 variabile notate prin : $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ şi $x_4$.

*Tabelul* 7.a

Implicanţii de ordinul 0

| Grupa | Indicii | $x_4x_3x_2x_1x_0$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 00000 √ |
| 1 | 4 | 00100 √ |
| | 8 | 01000 √ |
| 2 | 3 | 00011 √ |
| | 10 | 01010 √ |
| | 12 | 01100 √ |
| | 18 | 10010 √ |
| 3 | 7 | 00111 √ |
| | 11 | 01011 √ |
| | 14 | 01110 √ |
| | 19 | 10011 √ |
| | 26 | 11010 √ |
| | 28 | 11100 √ |
| 4 | 15 | 01111 √ |
| | 23 | 10111 √ |
| | 29 | 11101 √ |
| | 30 | 11110 √ |

Transcriind şi grupând în clase mintermii (implicanţii de ordin 0) ai funcţiei se poate începe etapa iterativă a procesului de generare a tuturor implicanţilor primi (a se vedea tabelul 7.a).

*Tabelul* 7.b

Implicanţii de ordinul 1

| Grupa | Indicii | $x_4x_3x_2x_1x_0$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,4 | 00-00 √ |
| | 0,8 | 0-000 √ |
| 1 | 4,12 | 0-100 √ |
| | 8,10 | 010-0 √ |
| | 8,12 | 01-00 √ |
| 2 | 3,7 | 00-11 √ |
| | 3,11 | 0-011 √ |
| | 3,19 | -0011 √ |
| | 10,11 | 0101- √ |
| | 10,14 | 01-10 √ |
| | 10,26 | -1010 √ |
| | 12,14 | 011-0 √ |
| | 12,28 | -1100 √ |
| | 18,19 | 1001- |
| | 18,26 | 1-010 |
| 3 | 7,15 | 0-111 √ |
| | 7,23 | -0111 √ |
| | 11,15 | 01-11 √ |
| | 14,15 | 0111- √ |
| | 14,30 | -1110 √ |
| | 19,23 | 10-11 √ |
| | 26,30 | 11-10 √ |
| | 28,29 | 1110- |
| | 28,30 | 111-0 √ |

Tabelul 7.b are, pentru raţiuni de claritate, incluse anumite elemente suplimentare (redundante) şi simboluri în plus faţă de expunerea algoritmului. Astfel, apar coloanele indicilor în care sunt notate, în zecimal, informaţiile echivalente informaţiei binare alăturate.

Aceste coloane sunt extrem de utile pentru urmărirea procesului de generare al implicanţilor succesivi până la implicanţii primi, aşa cum se poate urmări în tabelul 7.b în care sunt prezentaţi implicanţii de ordinul 1 generaţi din implicanţii de ordinul 0.

Caracterul √, insertat în dreapta imaginii binare a implicanţilor, reprezintă marcajul aplicat implicanţilor care au participat la generarea unor implicanţi de ordin superior (succesori).

*Tabelul* 7.c

Implicanţii de ordinul 2

| Grupa | Indicii | $x_4x_3x_2x_1x_0$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,4,8,12 | 0--00 |
| | 0,8,4,12 | (0--00 ) |
| 1 | 8,10,12,14 | 01--0 |
| | 812,10,14 | (01--0) |
| 2 | 3,7,11,15 | 0--11 |
| | 3,7,19,23 | -0-11 |
| | 3,11,7,15 | (0--11) |
| | 3,19,7,23 | (-0-11) |
| | 10,11,14,15 | 01-1- |
| | 10,14,26,30 | -1-10 |
| | 10,26,14,30 | (-1-10) |
| | 12,14,28,30 | -11-0 |
| | 12,28,14,30 | (-11-0) |

Parantezele rotunde între care sunt scrişi unii dintre implicanţii de ordinul 2 vin să sublinieze faptul că acei implicanţi se repetă şi sunt consideraţi o singură dată (cei care nu sunt încadraţi între paranteze, vor fi luaţi în consideraţie). Din calculul reprezentat succint se pot afla toţi implicanţii primi ai funcţiei.

Aceştia sunt (18,19), (18,26), (28,29), (0,4,8,12), (8,10,12,14), (3,7,11,15), (3,19,7,23), (10,11,14,15), (10,14,26,30) şi (12,14,28,30).
Ca un rezultat al procedeului de calcul al implicanţilor primi, în cazul acesta, se poate scrie formula completă a funcţiei:
$w = x_4x_3'x_2'x_1 + x_4x_2'x_1x_0' + x_4x_3x_2x_1' + x_4'x_1'x_0' + x_4'x_3x_0' + x_4'x_1x_0 + x_3'x_1x_0 + x_4'x_3x_1 + x_3x_1x_0' + x_3x_2x_0'$.

Această formulă nu este minimă, în sensul că există multiple variante de obţinere a unei acoperiri minime (ori minimale, după un criteriu sau altul) care să cuprindă mai puţini termeni produs. Calculul prin care se găsesc acoperirile minimale iredundante este realizat în cel de-al doilea pas prin construirea şi interpretarea matricei de incidenţă.

Pentru găsirea formei disjunctive (sumă de produse) minime trebuiesc aleşi numai acei implicanţi primi care includ toţi termenii canonici (toate punctele din domeniul de definiţie al funcţiei) astfel încât reprezentarea să fie iredundantă (nici un implicant prim să nu fie inclus într-o reuniune a altor implicanţi primi) şi să satisfacă anumite *criterii de cost optim*.

Implicanţii primi care satisfac aceste restricţii formează soluţia optimă. Această soluţie poate să nu fie, întotdeauna, unică. O cale mult utilizată este găsirea, înainte de toate, a acoperirilor prime iredundante iar acestor acoperiri li se aplică un calcul şi o selecţie după criteriile de cost.

Costul unei acoperiri (eventual) prime iredundante este, în general, o funcţie aditivă cu implicanţii. Astfel costul unui implicant prim cu *n-j* variabile, al unei funcţii cu *n* variabile introduce o îmbunătăţire a costului proporţională cu *j* numărul variabilelor reduse (îndepărtate).

Costul unei funcţii este de forma:

$$C_1(f) = \Sigma\, m_j\,(n - j),\ \text{unde}$$

$m_j$ este numărul de implicanţi primi cu $n$-$j$ variabile din acoperirea primă considerată pentru funcţia $f$, iar însumarea se face după $0 \leq j \leq n$-1.

Se consideră, în general, că se realizează un cost minim al acoperirii atunci când suma costurilor implicanţilor primi este minimă.

În cazul implementării un circuit combinaţional cu porţi costul implementării este mai mic dacă sunt utilizate mai puţine porţi iar porţile respective au mai puţine linii de intrare. Din acest motiv expresia costului, în acest caz, devine :

$$C_2(f) = p + \Sigma\, m_j\,(n\text{-}j),\ \text{unde}$$

$p$ este numărul de porţi din implementare ($p = \Sigma\, m_j$)şi, tot, $p$ fiind numărul de implicanţi primi ai acoperirii.

Se face presupunerea că fiecare implicant prim se implementează separat printr-un circuit). Atunci, formula anterioară se poate rescrie astfel :

$$C_2(f) = \Sigma m_j\,(n - j) + \Sigma\, m_j = \Sigma\, m_j\,(\,n - j + 1).$$

S-a constat, adesea, că acoperirile minime (minimale) de implicanţi primi satisfac atât costul $C_1$ cât şi costul $C_2$.

<u>*Exemplul* 7</u>

Funcţia Booleană din Exemplul 6 are următorii termeni canonici:
$f = m_0 + m_3 + m_4 + m_7 + m_8 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{14} + m_{15} + m_{18} + m_{19} + m_{23} + m_{26} + m_{28} + m_{29} + m_{30}$,
funcţia având 5 variabile : $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ şi $x_4$.

Forma completă, mulţimea implicanţilor primi, pentru această funcţie este, aşa cum s-a calculat in exemplul 6:
$f = x_4x_3'x_2'x_1 + x_4x_2'x_1x_0' + x_4x_3x_2x_1' + x_4'x_1'x_0' + x_4'x_3x_0' + x_4'x_1x_0 + x_3'x_1x_0 + x_4'x_3x_1 + x_3x_1x_0' + x_3x_2x_0'$.

*Tabelul* 8.a

Matricea de incidenţă, forma iniţială.

| Implicanţii primi | Mintermii funcţiei | | | | | | | | | | | | | | | | | Obs. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $m_0$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_7$ | $m_8$ | $m_{10}$ | $m_{11}$ | $m_{12}$ | $m_{14}$ | $m_{15}$ | $m_{18}$ | $m_{19}$ | $m_{23}$ | $m_{26}$ | $m_{28}$ | $m_{29}$ | $m_{30}$ | |
| 1001- | | | | | | | | | | | * | * | | | | | | |
| 1-010 | | | | | | | | | | | * | | | * | | | | |
| 1110- | | | | | | | | | | | | | | | * | * | | E |
| 0--00 | * | | * | | * | | | * | | | | | | | | | | E |
| 01--0 | | | | | * | * | | * | * | | | | | | | | | |
| 0--11 | | * | | * | | | * | | | * | | | | | | | | |
| -0-11 | | * | | * | | | | | | | | * | * | | | | | E |
| 01-1- | | | | | | * | * | | * | * | | | | | | | | |
| -1-10 | | | | | | * | | | * | | | | | * | | | * | |
| -11-0 | | | | | | | | * | * | | | | | | * | | * | |

Matricea de incidenţă a termenilor canonici şi a implicanţilor primi a fost construită, după metoda generală aşa cum s-a arătat anterior, şi este prezentată în tabelul 8.a.
Deoarece implicantul prim 1110- este unicul implicant prim care acoperă termenul canonic $m_{29}$ acesta este esenţial. Aceasta înseamnă că în orice soluţie de acoperire a funcţiei, acest implicant prim este sigur selecţionat. Îndepărtarea din matrice a acestui implicant prim conduce la îndepărtarea coloanelor corespunzătoare termenilor canonici: $m_{28}$ şi $m_{29}$ acoperiţi de implicantul prim 1110-.

Mai sunt încă doi implicanţi primi esenţiali în matrice.
Implicantul prim 0--00 este esenţial (a se vedea coloanele corespunzătoare mintermilor $m_0$ *şi* $m_4$). Îndepărtarea acestui implicant prim se soldează cu eliminarea coloanelor corespunzătoare mintermilor: $m_0$, $m_4$, $m_8$ şi $m_{12}$.
Al treilea implicant prim esenţial este -0-11 (din cauza coloanei corespunzătoare mintermului $m_{23}$). Îndepărtarea acestui implicant prim produce eliminarea coloanelor corespunzătoare mintermilor: $m_3$,$m_7$,$m_{19}$ şi $m_{23}$.
Toţi implicanţii esenţiali extraşi din matrice sunt incluşi în setul de implicanţi primi care determină soluţia (soluţiile) minime.

În tabelul 8.b este prezentată matricea care rezultă după eliminarea implicanţilor esenţiali şi a termenilor canonici acoperiţi de aceştia.

*Tabelul* 8.b

Matricea de incidenţă, prima reducere.

| Nr. crt. | Implicanţii primi | Mintermii funcţiei $m_{10}$ | $m_{11}$ | $m_{14}$ | $m_{15}$ | $m_{18}$ | $m_{26}$ | $m_{30}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1001- | | | | | * | | |
| 2 | 1-010 | | | | | * | * | |
| 3 | 01--0 | * | | * | | | | |
| 4 | 0--11 | | * | | * | | | |
| 5 | 01-1- | * | * | * | * | | | |
| 6 | -1-10 | * | | * | | | * | * |
| 7 | -11-0 | | | * | | | | * |

Linia implicantului prim 01-1- domină liniile implicanţilor 0--11 şi 01--0. Implicanţii 0--11 şi 01--0 sunt eliminaţi din matrice.
Linia implicantului prim –1-10 domină linia implicantului –11-0 şi acesta, din urmă, este eliminat din matrice.

*Tabelul* 8.c

Matricea de incidenţă, a doua reducere.

| Nr. crt. | Implicanţii primi | Mintermii funcţiei $m_{10}$ | $m_{11}$ | $m_{14}$ | $m_{15}$ | $m_{18}$ | $m_{26}$ | $m_{30}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1001- | | | | | * | | |
| 2 | 1-010 | | | | | * | * | |
| 3 | 01--0 | * | | * | | | | |
| 4 | 0--11 | | * | | * | | | |
| 5 | 01-1- | * | * | * | * | | | |
| 6 | -1-10 | * | | * | | | * | * |
| 7 | -11-0 | | | * | | | | * |

Linia implicantului 1001- este dominată de linia implicantului prim 1-010. Primul implicant este eliminat.
Toţi implicanţii eliminaţi nu vor fi utilizaţi în alcătuirea soluţiilor de acoperire a funcţiei *w*.

Se poate remarca un fapt, implicanţii 0--11, 01--0, -11-0 şi 1001- nu mai apar, în actuala matrice, ca fiind implicanţi primi (maximali) în urma ştergerilor (anterioare) de linii şi coloane din matrice cauzate de extragerea implicanţilor primi esenţiali.

Implicanţii primi care au mai rămas sunt toţi esenţiali, aşa cum se poate remarca din matricea de incidenţă redusă, prezentată în tabelul 8.d.
Acoperirea funcţiei se calculează din implicanţii primi esenţiali:
(1110- + 0--00 + -0-11 + -1-10 + 01-1- + 1-010), formula acesteia fiind:
$w = x_4 x_3 x_2 x_1' + x_4' x_1' x_0' + x_3' x_1 x_0 + x_3 x_1 x_0' + x_4' x_3 x_1 + x_4 x_2' x_1 x_0'$.

*Tabelul* 8.d

Matricei de incidenţă, forma finală.

| Implicanţii primi | Mintermii funcţiei | | | | | | | Obs. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $m_{10}$ | $m_{11}$ | $m_{14}$ | $m_{15}$ | $m_{18}$ | $m_{26}$ | $m_{30}$ | |
| 1-010 | | | | | * | * | | E |
| 01-1- | * | * | * | * | | | | E |
| -1-10 | * | | * | | | * | * | E |

□

**Algoritmul lui Petrik**

Acest algoritm permite, într-o formulare concisă, descrierea construcţiei tuturor soluţiilor peste un nucleu dur al matricii de incidenţă.
Se consideră că termenii canonici unei funcţii *f*, sunt notaţi prin $m_{j_1}$, $m_{j_2}$, ... şi $m_{j_u}$.
În continuare se cercetează matricea de incidenţe pe coloane. În maniera aceasta se pot determina, pentru fiecare termen canonic, corespunzător unei coloane, care sunt implicanţii primi care acoperă respectivul termen canonic.

Cu aceşti implicanţi primi, asociaţi unui termen canonic, se construieşte o formulă booleană $s_j$ constituită prin sumarea logică (disjuncţia) implicanţilor primi corespunzători.

Se presupune, spre exmeplu, că implicanţii primi $p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_v}$ acoperă termenul canonic $m_{j_1}$.
Atunci, formula booleană corespunzătoare termenului canonic $m_j$ este:

$$s_{j_1} = p_{i_1} + p_{i_2} + ... + p_{i_v}$$

Explicaţia acestei construcţii rezidă în faptul că implicantul prim $p_{i_1}$ sau implicantul prim $p_{i_2}$ sau … implicantul prim $p_{i_v}$ acoperă, în adevăr, termenul canonic $m_j$ .
Pe de-altă parte, trebuie acoperiţi cu implicanţi primi toţi termenii canonici, adică **şi** $m_{j_1}$ **şi** $m_{j_2}$ **şi** ...**şi** $m_{j_u}$ .
Apare, acum, justificată calcularea expresiei:

$$s_{j_1} s_{j_2} ... s_{j_u} = \prod_i (p_{i_1} + p_{i_2} + ... p_{i_v})$$

ca furnizoare a tuturor soluţiilor de acoperire pentru matricea de incidenţă considerată.

<u>*Exemplul* 8.</u>

Uneori sunt necesare soluţii de acoperire ale unei funcţii Booleene care să satisfacă anumite cerinţe specifice, sau, se caută toate soluţiile cu un anumit cost etc.

Algoritmul lui Petrik poate fi, în acest sens, foarte util. Acest algoritm, în principiu, furnizează toate soluţiile de acoperire pornind de la setul complet de implicanţi primi.
Pentru funcţia din exemplul 7, ştiind care sunt implicanţii esenţiali (cei care vor face parte din orice acoperire a funcţiei) se poate calcula care sunt ceilalţi implicanţi primi pe care se pot considera în vederea unor acoperiri minimale.

Considerând tabelul 7 se poate calcula, rând pe rând, termenii sumă ai algoritmului lui Petrik. În acest scop se va folosi ca identificator al implicanţilor primi din tabel, pentru simplificarea expresiilor, indexul ori numărul curent al acestora:
$s_{10}$ = {3,5,6}, $s_{11}$ = {4,5}, $s_{14}$ = {3,5,6,7}, $s_{18}$ = {1,2}, $s_{26}$ = {2,6}, $s_{30}$ ={6,7}; unde $s_{10}$ este notaţia pentru mulţimea implicanţilor primi care acoperă termenul canonic $m_{10}$, spre exemplu .

Cu ajutorul acestor termeni se alcătuieşte expresia formală:

$F$ = {3+5+6}*{1+2}*{4+5}*{3+5+6+7}*{2+6}*{6+7}.

Ţinând cont de identitatea $(a + b + c) * (a + b) = a + b$, expresia formală $F$ se mai poate rescrie, astfel:
$F$ = {3+5+6}*{1+2}*{4+5}*{2+6}*{6+7} = 642 + 652 + 641 + 651 + 7532 + 76431 + 76531 + 7542 + 752 + 76541 + 7651.

Dintre aceste forme doar cinci sunt de cost minim (cardinalitate trei):

$F^*$ = 642 + 652 + 641 + 651 + 752.

Costul C1 acestor acoperiri este acelaşi (10), iar C2 este de asemenea egal pentru că toate cele 5 acoperiri au acelaşi număr de porţi.

□

Adesea se întâmplă ca o funcţie, aşa cum s-a şi văzut dealtfel, să aibă două sau maimulte soluţii de aceeaşi cardinalitate, eventual minimă. Se întâmplă, în fapt, ca după determinarea tuturor implicanţilor primi şi implicanţilor primi secundari mintermii rămaşi să fie acoperiţi prin cel puţin doi implicanţi. O matrice de incidenţă de forma aceasta se spune că este *ciclică*. În astfel de situaţii o soluţie, posibil eficientă, este aplicarea formulei lui Petrick.

*Exemplul* 9.

Se consideră funcţia $h(a,b,c,d) = m\sum(1, 5, 7, 8, 10, 14) + d\sum(0, 9, 11, 13, 15)$.
Diagrama Karnaugh pentru funcţia $h(a,b,c,d)$ este ilustrată în figura 6.

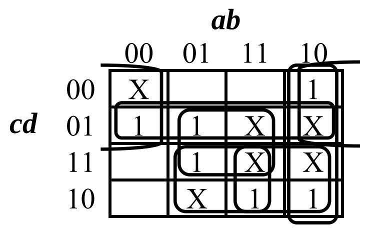



**Figura 6.** Diagrama Karnaugh şi implicanţii primi corespunzători mintermilor funcţiei $h(a, b, c, d)$ din exemplul 9.

Mulţimea implicanţilor primi ai funcţiei $h(a, b, c, d)$ este:
$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ respectiv
$P = \{b'c', c'd, ab', b'd, bc, ac\}$.
Matricea de incidenţă a implicanţilor primi cu termenii canonici, pentru această funcţie arată ca în tabelul 9.

*Tabelul* 9.

| Implicanţii primi | Termenii canonici $m_1$ | $m_5$ | $m_7$ | $m_8$ | $m_{10}$ | $m_{14}$ | Obs |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1 = b'c'$ (1, 8) | * | | | * | | | |
| $p_2 = c'd$ (1, 5) | * | * | | | | | |
| $p_3 = ab'$ (8, 10) | | | | * | * | | |
| $p_4 = bd$ (5, 7) | | * | * | | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p_5 = bc$ (7, 14) | * | | * |
| $p_6 = ac$ (10,14) | | * | * |

Se remarcă, în matricea de incidenţă, prezenţa exclusiv a termenilor corespunzători valorilor precizate, în timp ce termenii corespunzători valorilor neprecizate nu sunt utilizaţi.

Produsul lui Petrik este calculat astfel:
$F = s_1\, s_5\, s_7\, s_8\, s_{10}\, s_{14}$, unde:
$s_1 = (p_1 + p_2)$, $s_5 = (p_2 + p_4)$, $s_7 = (p_4 + p_5)$, $s_8 = (p_1 + p_3)$, $s_{10} = (p_3 + p_6)$ şi $s_{14} = (p_5 + p_6)$;

Efectuând produsele în expresia $F = s_1\, s_5\, s_7\, s_8\, s_{10}\, s_{14}$, se obţine formula:
$F = p_2 p_3 p_5 + p_1 p_4 p_6 + p_1 p_2 p_5 p_6 + p_2 p_3 p_4 p_6 + p_1 p_2 p_4 p_6 + p_1 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_4 p_5 p_6 + p_1 p_3 p_4 p_6$ .
Se poate remarca faptul că funcţia acceptă două forme minime (cu cardinalitatea trei) şi şase forme minimale (cu cardinalitatea patru).

□

*__Exemplul__* __10.__

Se consideră funcţia $g(a,b,c,d) = m\,\Sigma(0, 1, 3, 5, 13, 15) + d\,\Sigma(2, 6, 10, 11, 12)$.
Mulţimea implicanţilor primi ai funcţiei $g(a, b, c, d)$ a fost determinată astfel:
$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$, iar matricea de incidenţă a implicanţilor primi cu termenii canonici, pentru această funcţie arată ca în tabelul 10.a.

*Tabelul* 10.a

| Implicanţii | Termenii canonici | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| primi | $m_0$ | $m_1$ | $m_3$ | $m_5$ | $m_{13}$ | $m_{15}$ | Obs |
| (0-01) $p_1$ | | * | | * | | | |
| (-101) $p_2$ | | | | * | * | | |
| (110-) $p_3$ | | | | | * | | |
| (1-11) $p_4$ | | | | | | * | |
| (11-1) $p_5$ | | | | | * | * | |
| (00--) $p_6$ | * | * | * | | | | |
| (-01-) $p_7$ | | | * | | | | |

Matricea de incidenţă prezintă un singur implicant prim esenţial, $p_6$. Acesta va face parte din orice soluţie minimă a funcţiei $g$

Se observă faptul că implicantul prim $p_4$ acoperă doar $m_{15}$ în timp ce implicantul prim $p_5$ acoperă atât mintermul $m_{15}$ cât şi mintermul $m_{13}$. Este un caz de dominaţă între liniile unei matrice de incidenţă. Linia dominată este exclusă din procesul de alegere, cu atât mai mult cu cât numărul de literali al implicantului prim $p_4$ nu este mai mic decât cel al implicantului prim $p_5$.

De notat că, în urma îndepărtării implicantului prim esenţial şi a mintermilor acoperiţi de acesta, implicantul prim $p_1$ devine dominat de implicantul prim $p_2$ . Se poate remarca, din nou, că ambii implicanţi primi au acelaşi număr de literali. Linia dominată este eliminată, împreună cu implicantul prim asociat, din procesul de alegere a soluţiei minime.

După aceste două dominaţe de linii matricea de incidenţă arată ca în tabelul 10.b.

*Tabelul* 10.b

| Implicanţii | Mintermii | | | |
|---|---|---|---|---|
| primi | $m_5$ | $m_{13}$ | $m_{15}$ | Obs. |
| (-101) $p_2$ | * | * | | E |
| (11-1) $p_5$ | | * | * | E |

Ambii implicanţi primi sunt esenţiali (secundari) şi sunt adăugţi soluţiei minime.

În concluzie forma minimă a funcţiei $g(a,b,c,d) = m\sum(0, 1, 3, 5, 13, 15) + d\sum(2, 6, 10, 11, 12)$, este:
$g(a,b,c,d) = a'b' + bc'd + abd$.
Această formă, nu este însă unica formă minimă. Dacă vom considera matricea de incidenţă (tabelul 10.c) aşa cum rămâne aceasta după extragerea implicantului prim esenţial $p_6$ se poate calcula un produs al lui Petrik corespunzător acestei matrice, ţinând seama şi de implicantul prim esenţial $p_6$.

*Tabelul* 10.c

| Implicanţii primi | Mintermii $m_5$ | $m_{13}$ | $m_{15}$ | Obs. |
|---|---|---|---|---|
| (0-01) $p_1$ | * | | | |
| (-101) $p_2$ | * | * | | |
| (110-) $p_3$ | | * | | |
| (1-11) $p_4$ | | | * | |
| (11-1) $p_5$ | | * | * | |

$F = p_6(p_1+ p_2) (p_2+ p_3 + p_5) (p_4+ p_5) = p_1 p_3 p_4 p_6 + p_1 p_5 p_6 + p_2 p_4 p_6 + p_2 p_5 p_6$.
Soluţiile date de acest produs demonstrează că sunt în total trei soluţii minime de acoperire a acestei funcţii: $p_1 p_5 p_6 + p_2 p_4 p_6 + p_2 p_5 p_6$, una dintre acestea fiind şi cea calculată mai înainte.
Sunt listate în continuare toate soluţiile minime (cardinalitate 3) de acoperire ale funcţiei $g(a,b,c,d)$:

1) $g(a,b,c,d) = a'b' + bc'd + abd$,
2) $g(a,b,c,d) = a'b' + bc'd + acd$,
3) $g(a,b,c,d) = a'b' + a'c'd + abd$.

Produsul lui Petrick oferă, teoretic, întodeauna ansamblul tuturor soluţiilor de acoperire a unei funcţii scalare Booleene în raport cu mulţimea implicanţilor primi ai acesteia.
Funcţiile cu complexitate ridicată pot ridica dificultăţi chiar şi pentru obţinerea mulţimii implicanţilor primi (pot fi foarte numeroşi si, din acest motiv, dificil de determinat în totalitate).
Produsul lui Petrick poate fi foarte dificil de calculat pentru cazuri complicate (funcţii cu un număr mare de implicanţi primi) şi atunci procedeul de micşorare a matricei de incidenţă prin dominanţă linii / coloane şi esenţiali secundari, terţiari etc, poate să ofere, într-un timp acceptabil, o soluţie minimă ori chiar *minimală* dacă nu sunt alte posibilităţi în timp rezonabil.