Metoda Quine – McCluskey

Note de curs
Dr.Ing.Mat. Ion I. Bucur

Această metodă este utilizabilă, în principiu, pentru minimizarea funcţiilor scalare ori vectoriale cu un număr arbitrar de variabile. Metoda se poate utiliza pentru programarea unui calcul automat de minimizare. Minimizarea are loc în doi paşi:

(1) stabilirea implicanţilor primi, şi
(2) calculul acoperirii minimale pentru funcţia respectivă.

Metoda utilizează scrierea binară a mintermilor funcţiei şi printr-o ordonare judicioasă facilitează găsirea implicanţilor adiacenţi dar şi calculul implicanţilor de ordin superior rezultaţi.

Într-o primă abordare vor fi prezentate principalele repere ale metodei aplicate funcţiilor scalare. Acestea vor facilita mult înţelegerea metodei în cazul general, funcţiilor booleene vectoriale.

Minimizarea funcţiilor scalare prin metoda Quine-McCluskey

Generarea mulţimii implicanţilor primi. În calculul implicanţilor primi, descris în cele ce urmează, mintermii funcţiei sunt numiţi implicanţi, sau cuburi, de ordinul 0 ai funcţiei. În timp ce, implicanţii care rezultă prin reducerea unei variabile sau a două sau mai multor variabile, sunt implicanţi de ordinul unu, respectiv de ordinul doi ori superior. Calculul implicanţilor primi se efectuează considerând atât mintermii funcţiei cât şi mintermii neprecizaţi ai acesteia (dacă există).

Într-o primă etapă se calculează pentru fiecare implicant de ordinul 0 al funcţiei ponderea acestuia. Prin ponderea unui implicant se înţelege numărul de unităţi din reprezentarea binară a respectivului implicant.

Astfel, spre exemplu, implicanţii (de ordinul 0), 0101 şi 1101 au ponderea 2, respectiv 3, iar implicanţii -1-1 şi 01-0 au ponderea 2 (ordinul 2), respectiv 1 (ordinul 1).

Toţi implicanţii de acelaşi ordin şi având aceeaşi pondere sunt grupaţi în aceiaşi clasă. Pe durata calculului implicanţilor primi, implicanţii de ordine diferite, chiar dacă au aceiaşi pondere, fac parte din clase distincte.

Procesul de calcul al implicanţilor primi începe prin aşezarea implicanţilor iniţiali (adică implicanţii de ordinul 0) care au aceeaşi pondere, într-o aceeaşi clasă. Clasele sunt întotdeauna etichetate prin valoarea ponderii implicanţilor lor.

Etapa a doua, iterativă, este dedicată găsirii implicanţilor de ordin superior (implicanţii rezultaţi prin contopirea a doi implicanţi adiacenţi).

Termenii adiacenţi se găsesc întotdeauna printre implicanţii de acelaşi ordin din două clase succesive.

Bunăoară, printre implicanţii claselor 0 şi 1, dar şi printre implicanţii claselor 2 şi 3 etc, de ordinul 0. Situaţia este similară pentru ordinele superioare 1, 2 etc.

Astfel, se va cerceta sistematic adiacenţa termenilor dintre clasa 0 şi clasa 1, apoi adiacenţa dintre termenii claselor 1 şi 2 etc. Se începe ordonat cu implicanţii clasei cu cea mai mică pondere, dacă aceştia există (clasa 0, spre exemplu, dacă aceasta este nevidă).

Este util de remarcat faptul că, implicanţii clasei 1-a, spre exemplu, sunt cercetaţi mai întâi în raport cu adiacenţa faţă de implicanţii clasei 0 (venind dinspre aceasta), iar apoi sunt cercetaţi în raport cu adiacenţa faţă de implicanţii clasei a 2-a. Fireşte, dacă respectivele clase sunt nevide.

Adiacenţa, este definită, astfel : doi implicanţi sunt adiacenţi dacă şi numai dacă diferă prin valoarea unui singur rang cu valoare binară, în rest cei doi implicanţi fiind identici.

Deîndată ce doi implicanţi se dovedesc adiacenţi, este creat un implicant de ordin imediat superior. Implicanţii adiacenţi respectivi sunt, fiecare în parte, marcaţi. Marcajul implicanţilor adiacenţi semnifică faptul că ambii au un succesor (reprezentant) de ordin superior.

Implicantul de ordin imediat superior este stocat într-o clasă, cu pondere corespunzătoare, de implicanţi de acelaşi ordin.

Dacă s-au identificat doi implicanţi adiacenţi din clasele a 3-a şi a 4-a, de ordinul 0, se va genera un implicant care va fi din clasa a 2-a, dar de ordinul 1, spre exemplu.

Odată încheiat ciclul prin care s-au cercetat implicanţii de ordinul zero se continuă cu implicanţii de ordin 1 (toţi aceşti implicanţi au o variabilă redusă) dacă există cel puţin două clase succesive nevide.

Criteriul adiacenţei acestora este, în principiu acelaşi, cu menţiunea că doi implicanţi aparţinând unor clase consecutive, de ordinul 1, trebuie să aibă, suplimentar, variabila redusă corespunzător aceluiaşi rang. Adiacenţa implicanţilor de ordinul al doilea, sau mai mare, se extinde similar, impunându-se ca rangurile variabilelor reduse să coincidă. Pentru rangurile cu valori binare (nereduse) se menţine acelaşi criteriu : să existe un singur rang prin care să difere.

Această etapă, de stabilirea a adiacenţelor şi de producere a implicanţilor de ordin superior este, aşa cum s-a mai menţionat, iterativă. Fiecare iteraţie va fi reluată, cu clasele implicanţilor de ordin superior, atâta vreme cât se pot genera implicanţi de ordin superior celor existenţi la începutul iteraţiei. Procesul iterativ se încheie atunci când nu se mai pot genera implicanţi de ordin superior.

În acel moment, mulţimea implicanţilor de ordin maxim (de la care începând, nu s-au mai generat implicanţi superiori acestora) reunită cu mulţimea tuturor implicanţilor, din ordinele inferioare, *nemarcaţi* (inclusiv implicanţii de ordin zero nemarcaţi), formează mulţimea implicanţilor primi pentru funcţia respectivă.

Exemplul 1

Se consideră funcţia
$f = m_0 + m_3 + m_4 + m_7 + m_8 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{14} + m_{15} + m_{18} + m_{19} + m_{23} + m_{26} + m_{28} + m_{29} + m_{30}$. Se observă, cu uşurinţă, că funcţia are 5 variabile care vor notate prin : x_0, x_1, x_2, x_3 şi x_4.
Transcriind şi grupând mintermii în clase (mintermi pot fi consideraţi implicanţii de ordin 0) ai funcţiei se poate începe etapa iterativă a procesului de generare a tuturor implicanţilor primi (aşa cum se poate vedea în tabelul 1a).

Tabelul 1a
Implicanţii de ordinul 0
ai funcţiei din exemplul 1

Grupa	Indicii	$x_4x_3x_2x_1x_0$
0	0	00000 √
1	4	00100 √
	8	01000 √
2	3	00011 √
	10	01010 √
	12	01100 √
	18	10010 √
3	7	00111 √
	11	01011 √
	14	01110 √
	19	10011 √
	26	11010 √
	28	11100 √
4	15	01111 √
	23	10111 √
	29	11101 √
	30	11110 √

Tabelul 1a are, pentru raţiuni de claritate, incluse anumite elemente suplimentare (redundante) şi simboluri în plus faţă de expunerea algoritmului.
Astfel, apar coloanele indicilor în care sunt notate, în zecimal, informaţiile echivalente informaţiei binare alăturate (coloana etichetată prin $x_4x_3x_2x_1x_0$, care găzduieşte formatul binar al implicanţilor).
Se poate constata faptul că mintermul m_0 (făcând parte din grupa 0, cu nici o unitate) se poate grupa cu mintermul m_4 şi cu mintermul m_8 (care aparţin grupei 1, cu o unitate).
Similar, mintermul m_4 (făcând parte din grupa cu 1, cu o unitate) se poate grupa cu mintermul m_{12} iar mintermul m_8, din aceeaşi grupă cu mintermul m_4, se poate grupa cu mintermul m_{10} şi mintermul m_{12} (mintermii m_{10} şi m_{12} aparţin grupei 2, cu două unităţi), etc.

Simbolul √ inserat în dreapta imaginii binare a implicanţilor reprezintă marcajul aplicat implicanţilor care au fost incluşi în implicanţii de ordin superior (succesori) în procesul de generare al acestora.
Astfel, atât mintermul m_8 cât şi mintermul m_{10}, primesc simbolul √ în coloana imaginii binare, spre exemplu.
Se poate remarca faptul că, în tabelul 1a, toţi implicanţii de ordinul 0 au asociat simbolul √ în coloana etichetată prin $x_4x_3x_2x_1x_0$.
În baza acestui fapt se poate concluziona că toţi implicanţii de ordinul 0 au fost incluşi în implicanţi de ordin superior - mai precis în implicanţi de ordinul 1.

Rezultatele grupărilor mintermilor din tabelul 1a se pot urmări în coloanele indicilor şi implicanţilor ($x_4x_3x_2x_1x_0$) din tabelul 1b.

Tabelul 1b

Implicanţii de ordinul 1

Grupa	Indicii	$x_4x_3x_2x_1x_0$
0	0,4	00-00 √
	0,8	0-000 √
1	4,12	0-100 √
	8,10	010-0 √
	8,12	01-00 √
2	3,7	00-11 √
	3,11	0-011 √
	3,19	-0011 √
	10,11	0101- √
	10,14	01-10 √
	10,26	-1010 √
	12,14	011-0 √
	12,28	-1100 √
	18,19	1001-
	18,26	1-010
3	7,15	0-111 √
	7,23	-0111 √
	11,15	01-11 √
	14,15	0111- √
	14,30	-1110 √
	19,23	10-11 √
	26,30	11-10 √
	28,29	1110-
	28,30	111-0 √

Tabelul 1b facilitează reluarea procesului de grupare dar, de data aceasta, între implicanţii de ordinul 1 (acoperind fiecare doi implicanţi de ordinul 0).
Ca şi în tabelul precedent sunt inserate simboluri √ în dreapta imaginii binare a unor implicanţi de ordinul 1. Şi în acest caz, aceasta reprezintă faptul că respectivii implicanţi au fost incluşi în implicanţii de ordin superior (succesori), respectiv implicanţii de ordinul 2 (tabelul 1c).
Dar, spre deosebire de tabelul 1a, aici în tabelul 1b sunt imagini binare care nu au acest simbol. Respectivele imagini binare descriu implicanţi primi (respectivii implicanţi nu mai pot fi extinşi astfel încât să acopere mai mulţi mintermi).

Tabelul 1c arată că procesul de grupare al implicanţilor din exemplul 1 s-a încheiat. Aşa cum este alcătuit tabelul 1c nu se mai pot face alte grupări între implicanţii de ordinul 2. În consecinţă, coloana imaginii binare (coloana etichetată prin $x_4x_3x_2x_1x_0$) nu conţine nici un, simbol **√**. *Toţi implicanţii de ordinul 2 sunt primi.* Procesul generării mulţimii tuturor implicanţilor primi s-a încheiat.

Tabelul 1c.

Implicanţii de ordinul 2.

Grupa	Indicii	$x_4x_3x_2x_1x_0$
0	0,4,8,12	0- -00
	0,8,4,12	(0- -00)
1	8,10,12,14	01- -0
	812,10,14	(01- -0)
2	3,7,11,15	0- -11
	3,7,19,23	-0-11
	3,11,7,15	(0--11)
	3,19,7,23	(-0-11)
	10,11,14,15	01-1-
	10,14,26,30	-1-10
	10,26,14,30	(-1-10)
	12,14,28,30	-11-0
	12,28,14,30	(-11-0)

Parantezele rotunde între care sunt scrişi unii dintre implicanţii de ordinul 2 vin să sublinieze faptul că acei implicanţi se repetă urmând să fie consideraţi o singură dată (vor fi luaţi în consideraţie cei care nu sunt încadraţi între paranteze, spre exemplu).

Din calculul descris succint în tabelele 1 *a, b* şi *c* se pot determina toţi implicanţii primi ai funcţiei.
Aceştia sunt descriptibili, în mod unic, prin mintermii acoperiţi (conţinuţi):
(18,19), (18,26), (28,29),
(0,4,8,12), (8,10,12,14), (3,7,11,15), (3,19,7,23), (10,11,14,15), (10,14,26,30) şi (12,14,28,30).

Implicanţii primi sunt, adesea, ilustraţi şi prin imaginea binară asociată lor.
Funcţia scalară din exemplul 1 poate fi descrisă prin suma implicanţilor săi primi.
Aceasta sumă de produse prime nu este minimă dar poate fi minimizată:

$f = x_4x_3'x_2'x_1 + x_4x_2'x_1x_0' + x_4x_3x_2x_1' + x_4'x_1'x_0' + x_4'x_3x_0' + x_4'x_1x_0 + x_3'x_1x_0 + x_4'x_3x_1 + x_3x_1x_0' + x_3x_2x_0'$.

Pot să existe, în general, multiple variante de obţinere a unei acoperiri minimale (după un criteriu sau altul) care să cuprindă mai puţini termeni produs.

Calculul prin care se găsesc acoperirile minime iredundante este realizat în cel de-al doilea pas al algoritmului Quine – Mc Cluskey.

Criteriile de cost utilizate în determinarea acoperirilor prime minime şi minimale. Pentru găsirea formei disjunctive (sumă de produse) minime trebuiesc aleşi numai acei implicanţi primi care includ toţi termenii canonici (toate punctele din domeniul de definiţie al funcţiei) astfel încât reprezentarea să fie iredundantă (nici un implicant prim să nu fie inclus într-o reuniune a altor implicanţi primi) şi să satisfacă anumite *criterii de cost optim*.

Implicanţii primi care satisfac aceste restricţii formează soluţia optimă. Această soluţie poate să nu fie, întotdeauna, unică. O cale mult utilizată este găsirea, înainte de toate, a acoperirilor prime iredundante iar acestor acoperiri li se aplică un calcul şi o selecţie după criteriile de cost.

Costul unei acoperiri (eventual) prime iredundante este, în general, o funcţie aditivă cu implicanţii. Astfel costul unui implicant prim cu n-j variabile, al unei funcţii cu n variabile introduce o îmbunătăţire a costului proporţională cu j numărul variabilelor reduse (îndepărtate).

Costul unei funcţii este de forma:

$$\boldsymbol{C_1(f) = \Sigma\, m_j\,(n - j)}.$$

În formula costului $\boldsymbol{C_1}$ s-a notat prin $\boldsymbol{m_j}$ numărul de implicanţi primi cu n - j variabile din acoperirea primă considerată pentru funcţia $\boldsymbol{f}$. Însumarea, în formula costului $\boldsymbol{C_1}$ se face după $\boldsymbol{j}$, iar acest indice satisface relaţia $0 \leq \boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{n} - 1$.

Se consideră, în general, că se realizează un cost minim al acoperirii atunci când suma costurilor implicanţilor primi este minimă.
În cazul implementării un circuit combinaţional cu porţi costul implementării este mai mic dacă sunt utilizate mai puţine porţi iar porţile respective au mai puţine linii de intrare. Din acest motiv expresia costului, în acest caz, devine :

$$\boldsymbol{C_2(f) = p + \Sigma\, m_j\,(n-j)}.$$

În formula costului C_2 s-a notat prin p numărul de porţi din implementare aleasă ($p = \Sigma m_j$), p fiind numărul de implicanţi primi ai acoperirii considerate.
Se poate face presupunerea că fiecare implicant prim se implementează separat (printr-un circuit). Atunci, formula anterioară se poate rescrie astfel :

$$C_2(f) = \Sigma m_j (n - j) + \Sigma m_j = \Sigma m_j (n - j + 1).$$

S-a constat, adesea, că acoperirile minime cu implicanţi primi satisfac atât costul C_1 cât şi costul C_2.

Determinarea acoperirilor prime minime şi minimale. Alegerea implicanţilor primi utilizează reprezentarea matriceală a incidenţelor pentru sintetizarea raporturilor dintre implicanţii primi, pe de-o parte, şi termenii canonici, mintermii, pe de-altă parte.

Matricea, tabelul, de incidenţă are câte o coloană pentru fiecare termen canonic al funcţiei, şi câte o linie pentru fiecare implicant prim calculat prin algoritmul precedent.

Este de menţionat un aspect remarcabil legat de termenii canonici neprecizaţi ai funcţiei. Aceştia au fost utilizaţi atunci când s-au generat implicanţii primi, dar nu vor fi consideraţi în problema de acoperire deoarece termenii, pentru care funcţia are valoare neprecizată, nu trebuie acoperiţi.

Matricea de incidenţă se completează linie cu linie.
Deîndată ce implicantul prim p_i, corespunzător liniei i din matrice, acoperă, sau conţine, termenul canonic m_j corespunzător coloanei j, elementul matricei a_{ij}, este marcat cu simbolul *, altfel spaţiu.
În maniera aceasta sunt marcate toate elementele matricei.

Ideea centrală, în continuare, este să se aleagă un număr cât mai mic de implicanţi primi care, fiecare în parte, să acopere cât mai mulţi termeni canonici, iar reuniunea lor să acopere în totalitate termenii canonici, mintermii, funcţiei.

Pentru aceasta, după completarea întregii matrice, se examinează rând pe rând coloanele (corespunzătoare termenilor canonici precizaţi) şi liniile (corespunzătoare implicanţilor primi) matricei pentru anumite situaţii particulare.

Implicanţii primi esenţiali. Ori de câte ori pe o coloană apare un singur marcaj (*), corespunzător acestuia, se determină un implicant prim p_i corespunzător liniei pe care se află marcajul unic, care acoperă în *exclusivitate* termenul canonic respectiv, m_j.

Implicantul prim respectiv trebuie, în mod cert, inclus în orice acoperire a funcţiei deoarece este singurul care acoperă mintermul m_j neacoperit (neconţinut) de alţi implicanţi primi. Astfel de implicanţi primi se numesc *implicanţi primi esenţiali*. Implicanţii primi esenţiali sunt îndepărtaţi din matricea de incidenţă, micşorând mărimea acesteia şi complexitatea procesului determinării acoperirilor minime şi respectiv minimale.

Extragerea liniei unui implicant prim esenţial din tabelul de incidenţă se soldează cu îndepărtarea a cel puţin o coloană, corespunzătoare termenului canonic acoperit în exclusivitate.
Mai pot fi şi alte coloane acoperite de implicantul prim p_i. Acestea, dacă există, sunt îndepărtate din tabel deoarece sunt acoperite de implicantul prim p_i care acum face parte în mod sigur din compoziţia oricărei soluţii.

De multe ori aceste extrageri provocate de un implicant prim esenţial provoacă *esenţializări secundare* ale altor coloane, care la rândul lor vor desemna alegeri certe ale unor implicanţi primi şi, în consecinţă, micşorarea tabelei (implicit şi a dificultăţii problemei). Pot apare şi dominanţe de linii, în urma eliminării esenţialilor.

Dominanţa liniilor. O altă situaţie care poate reduce dimensiunile matricei se referă la cazurile în care o linie din matricea de incidenţă este conţinută în întregime în altă linie. Aparent, pare să fie o situaţie imposibilă. Un implicant prim nu poate fi conţinut în alt implicant, din raţiuni de definiţie a implicanţilor primi.

Dar, dacă un implicant prim a fost generat utilizând mulţi termeni canonici corespunzători punctelor *neprecizate* din domeniul de definiţie al funcţiei iar în matrice punctele neprecizate nu sunt reprezentate, atunci poate să apară această situaţie.
Alte situaţii care pot genera dominanţe ale liniilor, din matricea de incidenţe dintre implicanţii primi şi termenii canonici, sunt modificările matricei în urma îndepărtării implicanţilor primi. Acestea pot micşora numărul de termeni canonici asociaţi unui implicant prim.

Practic, astfel de situaţii descalifică un implicant prim privitor la selecţia acestuia într-o posibilă soluţie. Deoarece, astfel de implicant nu mai are calitatea de a fi prim. Acesta este îndepărtat din matrice, se micşorează dimensiunea matricei şi se facilitează sarcina de găsire a unei acoperiri optime (optimale).

Dominanţa coloanelor. Dacă în matricea incidenţelor apare o coloană j al cărei conţinut este cuprins, inclus, în totalitate în conţinutul altei coloane k, se spune că prima coloană este dominată de cea de-a doua (sau, alternativ, se spune despre coloana k că domină coloana j).

O coloană dominantă poate fi scoasă din matricea de incidenţe deoarece acoperirea coloanei dominate printr-o alegere sau alta de implicanţi primi va acoperi, în mod cert, şi coloana dominantă.

Îndepărtarea unei coloane din matrice datorită faptului că aceasta include o altă coloană, poartă denumirea de *îndepărtare a coloanelor dominante*. Este încă o cale de micşorare a complexităţii problemei.

Aplicarea celor trei căi de reducere a dimensiunii problemei se face alternativ şi iterativ până când:

- se construieşte astfel, o soluţie unică (matricea dispare) sau,

- se constată că matricea nu mai poate fi redusă, se ajunge la un nucleu ciclic.

Cel de-al doilea caz face să apară ceea ce se numeşte, în literatură, *nucleul dur* al problemei. Se poate proceda prin euristici pentru găsirea unei soluţii peste acest nucleu dur, sau se pot calcula, atunci când dimensiunea nucleului dur permite, toate soluţiile posibile.

Exemplul 2

Funcţia Boole-ană din *Exemplul 1* are următorii termeni canonici:
$f = m_0 + m_3 + m_4 + m_7 + m_8 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{14} + m_{15} + m_{18} + m_{19} + m_{23} + m_{26} + m_{28} + m_{29} + m_{30}$, funcţia având 5 variabile : x_0, x_1, x_2, x_3 şi x_4.

Mulţimea implicanţilor primi ai acestei funcţii este, aşa cum s-a calculat in *exemplul 1*:
$f = x_4x_3'x_2'x_1 + x_4x_2'x_1x_0' + x_4x_3x_2x_1' + x_4'x_1'x_0' + x_4'x_3x_0' + x_4'x_1x_0 + x_3'x_1x_0 + x_4'x_3x_1 + x_3x_1x_0' + x_3x_2x_0'$.
Asocierea dintre implicanţii primi şi termenii canonici este descrisă în tabelul 2a.

Tabelul 2a
Corespondenţa dintre implicanţii primi şi termenii canonici

Implicanţii primi	Indicii Mintermilor Acoperiţi
1001-	18,19
1-010	18,26
1110-	28,29
0- -00	0,4,8,12
01- -0	8,10,12,14
0- -11	3,7,11,15
-0-11	3,7,19,23
01-1-	10,11,14,15
-1-10	10,14,26,30
-11-0	12,14,28,30

Matricea de incidenţă a termenilor canonici şi a implicanţilor primi este alcătuită, aşa cum s-a descris anterior şi este prezentată în tabelul 2b.

Tabelul 2b
Matricea de incidenţă iniţială

Implicanţii primi	Termenii canonici 0	3	4	7	8	10	11	12	14	15	18	19	23	26	28	29	30	
1001-											*	*						
1-010											*			*				
1110-															*	*		e
0- -00	*		*		*			*										e
01- -0					*	*		*	*									
0- -11		*		*			*			*								
-0-11		*		*								*	*					e
01-1-						*	*		*	*								
-1-10						*			*					*			*	
-11-0								*	*						*		*	

Deoarece implicantul prim 1110- este unicul implicant prim care acoperă termenul canonic m_{29} acesta este esenţial. Aceasta înseamnă că în orice soluţie de acoperire a funcţiei, acest implicant prim este sigur selecţionat. Îndepărtarea din matrice a acestui implicant prim conduce la îndepărtarea coloanelor corespunzătoare termenilor canonici: m_{28} şi m_{29} acoperiţi de implicantul prim 1110-.

Mai sunt încă doi implicanţi primi esenţiali în matrice.
Implicantul prim 0- -00 este esenţial (a se vedea coloanele corespunzătoare mintermilor m_0 *şi* m_4). Îndepărtarea acestui implicant prim se soldează cu eliminarea coloanelor corespunzătoare mintermilor: m_0, m_4, m_8 şi m_{12}.

Al treilea implicant prim esenţial este -0-11 (din cauza coloanei corespunzătoare mintermului m_{23}). Îndepărtarea acestui implicant prim produce eliminarea coloanelor corespunzătoare mintermilor: m_3, m_7, m_{19} şi m_{23}.

În tabelul 2c este prezentată matricea care rezultă după eliminarea implicanţilor esenţiali şi a termenilor canonici acoperiţi de aceştia. S-a introdus, faţă de tabele 2a şi 2b, coloana care conţine numărul curent al fiecărei linii, respectiv indexul liniei. Această coloană este menită să faciliteze urmărirea comparaţiei dintre liniile matricei dar va fi utilizată şi ulterior în calculul formulei lui Petrick asociat acestei matrice.

Tabelul 2c

Matricea de incidenţă redusă, după eliminarea implicanţilor esenţiali.

Implicanţi i primi	Termenii Canonici							Nr. crt.
	10	11	14	15	18	26	30	
1001-					*			1
1-010					*	*		2
01- -0	*		*					3
0- -11		*		*				4
01-1-	*	*	*	*				5
-1-10	*		*			*	*	6
-11-0			*				*	7

Linia 5, a implicantului prim 01-1-, domină liniile 4 şi 3, ale implicanţilor 0- -11 şi 01- -0. Implicanţii primi 0- -11 şi 01- -0 vor fi eliminaţi din matrice.

Linia 6, a implicantului prim -1-10 domină linia 7, a implicantului -11-0.
Acesta din urmă, -11-0, va fi eliminat din matrice.

Tabelul 2d

Matricea de incidenţă redusă, în care sunt marcate liniile dominate.

Implicanţii primi	Termenii Canonici							Număr crt.
	10	11	14	15	18	26	30	
<u>1001-</u>					<u>*</u>			<u>1</u>
1-010					*	*		2
<u>01- -0</u>	<u>*</u>		<u>*</u>					<u>3</u>
<u>0- -11</u>		<u>*</u>		<u>*</u>				<u>4</u>
01-1-	*	*	*	*				5
-1-10	*		*			*	*	6
<u>-11-0</u>			<u>*</u>				<u>*</u>	<u>7</u>

Linia 1 din matricea redusă, prezentată în tabelul 2c, corespunzătoare implicantului prim 1001-, este dominată de linia 2, a implicantului prim 1-010. Primul implicant, 1001-, este eliminat. În tabelul 2d liniile dominate din matricea de incidenţă redusă, sunt marcate în prin subliniere.

Toţi implicanţii eliminaţi, în urma dominanţei altor implicanţi primi, nu vor fi utilizaţi în calculul soluţiilor de acoperire a funcţiei *f*.

Se poate remarca faptul că, implicanţii eliminaţi (0- -11, 01 - - 0, -11-0 şi 1001-) nu mai apar, în actuala matrice, ca fiind implicanţi primi (maximali) din cauza ştergerilor (anterioare) de linii şi coloane din matrice cauzate de extragerea implicanţilor primi esenţiali.

Tabelul 2e

Matricea finală

Implicanţii primi	Termenii Canonici							Obs.
	10	11	14	15	18	26	30	
1-010					*	*		e
01-1-	*	*	*	*				e
-1-10	*		*			*	*	e

Implicanţii primi care au mai rămas sunt toţi esenţiali, aşa cum se poate remarca din matricea de incidenţă finală, prezentată în tabelul 2e.

Acoperirea funcţiei se calculează din implicanţii primi esenţiali:

(1110-) + (0- -00) + (-0-11) + (-1-10) + (01-1-) + (1-010),

formula algebrică a acesteia fiind:

$f = x_4 x_3 x_2 x_1' + x_4' x_1' x_0' + x_3' x_1 x_0 + x_3 x_1 x_0' + x_4' x_3 x_1 + x_4 x_2' x_1 x_0'.$

□

Algoritmul lui Petrik. Acest algoritm permite, într-o formulare concisă, descrierea construcţiei tuturor soluţiilor peste un, eventual, nucleu ciclic al matricei de incidenţă.

Se consideră că termenii canonici unei funcţii *f*, sunt notaţi prin m_{j_1} , m_{j_2} , ... şi m_{j_u} . În continuare se cercetează matricea de incidenţe pe coloane. În maniera aceasta se pot determina, pentru fiecare termen canonic, corespunzător unei coloane, care sunt implicanţii primi care acoperă respectivul termen canonic.

Cu aceşti implicanţi primi, asociaţi unui termen canonic m_j, se construieşte o formulă Boole-ană s_j constituită prin sumarea logică (disjuncţia) implicanţilor primi corespunzători. Această formulă se mai numeşte şi clauza respectivului minterm.

Se presupune, spre exemplu, că implicanţii primi $p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_v}$ acoperă termenul canonic m_{j_1}. Atunci, clauza ori formula Boole-ană corespunzătoare termenului canonic m_j este:

$$s_{j_1} = p_{i_1} + p_{i_2} + ... + p_{i_v}$$

Explicaţia acestei construcţii rezidă în faptul că implicantul prim p_{i_1} sau implicantul prim p_{i_2} sau … implicantul prim p_{i_v} acoperă, în adevăr, termenul canonic m_{j_1} .

Pe de-altă parte, trebuie acoperiţi cu implicanţi primi toţi termenii canonici, adică **şi** m_{j_1} *şi* m_{j_2} *şi ... şi* m_{j_u} .

Apare, acum, justificată determinarea expresiei:

$$s_{j_1}s_{j_2}...s_{j_u} = \prod_i (p_{i_1} + p_{i_2} + ...p_{i_v})$$

ca furnizoare a tuturor soluţiilor de acoperire pentru matricea de incidenţă considerată.

Adeseeori sunt necesare soluţii de acoperire ale unei funcţii booleene care să satisfacă anumite cerinţe specifice, sau, se caută toate soluţiile cu un anumit cost.
Algoritmul lui Petrik poate fi, în acest sens, foarte util. Acest algoritm, în principiu, furnizează toate soluţiile de acoperire pornind de la setul complet de implicanţi primi.

Exemplul 3.
Pentru funcţia din exemplul 1, ştiind care sunt implicanţii esenţiali (cei care vor face parte din orice acoperire a funcţiei) se poate calcula care sunt ceilalţi implicanţi primi care pot fi utilizaţi în vederea unor acoperiri *minimale*.

Considerând matricea de incidenţă din tabelul 2c (după îndepărtarea implicanţilor primi esenţiali) se pot calcula, rând pe rând, clauzele, termenii sumă, din algoritmului lui Petrik. În acest scop se va folosi ca identificator al implicanţilor primi din tabel, pentru simplificarea expresiilor, indexul ori numărul curent al acestora. Astfel se poate determina:

c_{10} = {3,5,6}, c_{11} = {4,5}, c_{14} = {3,5,6,7}, c_{15} = {4,5},
c_{18} = {1,2}, c_{26} = {2,6}, c_{30} ={6,7},

unde prin c_{10}, spre exemplu, s-a notat clauza, ori mulţimea implicanţilor primi care acoperă termenul canonic m_{10} .
Se poate remarca un fapt care micşorează complexitatea calculului, clauzele c_{11} şi c_{15} sunt identice.
Cu ajutorul acestor clauze se alcătuieşte expresia formală, formula lui Petrick:

F = {3+5+6} * {1+2} * {4+5} * {3+5+6+7} * {2+6} * {6+7},

Ţinând cont de identitatea (a + b + c) * (a + b) = a + b, atunci se poate scrie:

{3+5+6} * {3+5+6+7} = {3+5+6}.

Astfel, expresia formală *F* se mai poate rescrie, astfel:

F = {3+5+6}*{1+2}*{4+5}*{2+6}*{6+7}.
Prin efectuarea calculului algebric în expresia anterioară rezultă:

F = 642 + 652 + 641 + 651 + 7532 + 76431 + 76531 + 7542 + 752 + 76541 + 7651.
Aceste grupuri de indici (separate prin +), identifică fiecare în parte o soluţie de acoperire alcătuită din implicanţii primi respectivi.

Astfel, grupul de indici 76431 arată că se poate constitui o acoperire primă minimală cu cinci implicanţi primi:
f = (-11-0) + (-1-10) + (0- -11) + (01- -0) + (1001-).

Dintre toate aceste forme, determinate prin metoda lui Petrick în raport cu implicanţii primi din matricea de incidenţă redusă prin îndepărtarea implicanţilor primi esenţiali, doar cinci sunt cu cost minim:

F^{*} = 642 + 652 + 641 + 651 + 752,

Celelalte forme calculate sunt minimale. Se poate remarca prezenţa soluţiei determinate, în urma eliminării liniilor dominate, în lista celor cinci acoperiri cu cost minim.

Costul C1 acestor acoperirii minime este acelaşi 10, iar C2 este de asemenea egal pentru că toate cele 5 acoperiri minime au acelaşi număr de porţi.

□

Metoda Quine-McCluskey aplicată funcţiilor scalare având termeni nespecificaţi

Metoda Quine-McCluskey minimizează reprezentarea oricărei expresii Boole-ene. Această metodă oferă o un procedeu sistematic pentru generarea mulţii implicanţilor primi urmată de extragerea soluţiilor minime şi minimale de acoperire prime.

Primul pas al metodei calculează toţi implicanţii primi prin aplicarea repetată a metodei unitare. Acest pas este urmat de un procedeu matricial, tabelar, care determină acoperirile prime ale expresiei iniţiale.

<u>*Exemplul 4.*</u> Se consideră funcţia $f : \boldsymbol{B}^4 \to \boldsymbol{B}$,
$f = m_4 + m_5 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{13} + d_0 + d_7 + d_{15}$.

Variabilele funcţiei vor fi notate prin x_8, x_4, x_2 şi x_1.

Termenii produs, mintermii şi termenii neprecizaţi, sunt ordonaţi după numărul de unităţi şi apoi introduşi în tabelul 3a.

Tabelul 3a
Implicanţii de ordinul 0
ai funcţiei din exemplul 4

Grupa	Indicii	$x_8x_4x_2x_1$
0	0	0000 √
1	4	0100 √
	8	1000 √
2	5	0101 √
	6	0110 √
	9	1001 √
	10	1010 √
3	7	0111 √
	13	1101 √
4	15	1111 √

Toţi termenii din tabelul 3a au succesori în tabelul 3b, fapt pentru care fiecare termen produs, din tabelul 3a, are asociat simbolul √.

Tabelul 3b

Implicanţii de ordinul 1
ai funcţiei din exemplul 4

Grupa	Indicii	$x_8x_4x_2x_1$
0	0,4	0-00
	0,8	-000
1	4,5	010- √
	4,6	01-0 √
	8,9	100-
	8,10	10-0
2	5,7	01-1 √
	5,13	-101 √
	6,7	011- √
	9,13	1-01
3	7,15	-111 √
	13,15	11-1 √
4	15	1111 √

În tabelul implicanţilor de ordinul 1 (tabelul 3b) apar cinci implicanţi primi:
0-00, -000, 100-, 10-0 şi 1-01.

În tabelul implicanţilor de ordinul 2 (tabelul 3c) apar alţi doi implicanţi primi,
01- - şi -1-1,
pentru funcţia $f(x_8, x_4, x_2, x_1)$.

Tabelul 3c

Implicanţii de ordinul 2
ai funcţiei din exemplul 4

Grupa	Indicii	$x_8x_4x_2x_1$
1	4,5,6,7	01- -
2	5,7,13,15	-1-1

Tabelul 3d arată, pentru fiecare implicant prim termenii canonici acoperiţi de respectivul implicant prim.
Acest tabel este utilizat pentru completarea matricei de incidenţă prin care se va determina o acoperire primă minimă a funcţiei *f*.

Tabelul 3d

Corespondenţa dintre implicanţii primi şi termenii canonici

Implicanţii primi	Indicii Mintermilor Acoperiţi
0-00	0,4
-000	0,8
100-	8,9
10-0	8,10
1-01	9,13
01- -	4,5,6,7
-1-1	5,7,13,15

Matricea de incidenţă dintre implicanţii primi ai funcţiei şi termenii canonici va cuprinde doar termenii canonici precizaţi, cei neprecizaţi nefiind referiţi.

În tabelul 3e este prezentată matricea de incidenţă dintre termenii canonici precizaţi şi implicanţii primi. Fiecare implicant prim are asociata o etichetă plasată între paranteze. Astfel primul implicant prim 0-000 (0,4) este etichetat prin (*p*), cel de-al doilea -000 (0,8) este etichetat prin (*q*) etc.

Tabelul 3e

Matricea de incidenţă iniţială

Implicanţii primi	Termenii canonici							
	4	5	6	8	9	10	13	
(*p*) 0-00 (0,4)	*							
(*q*) -000 (0,8)				*				
(*r*) 100- (8,9)				*	*			
~~(*s*)10-0 (8,10)~~				*		*		e
(*t*) 1-01 (9,13)					*		*	
~~(*u*) 01- - (4,5,6,7)~~	*	*	*					e
(*v*) -1-1 (5,7,13,15)		*					*	

Implicanţii *s* şi *u* sunt esenţiali, deoarece primul acoperă în exclusivitate mintermul m_{10} iar al doilea acoperă, la rândul său, în exclusivitate mintermul m_6.

Aceşti doi implicanţi primi fac parte din oricare soluţie de acoperire, a funcţiei *f*, cu implicanţi primi. Liniile celor doi implicanţi primi esenţiali vor fi îndepărtate din matricea de incidenţă şi odată cu acestea vor fi îndepărtate şi coloanele acoperite de aceşti doi implicanţi primi.

Tabelul 3f cuprinde matricea redusă a incidenţelor dintre implicanţii primi şi termenii canonici.

Tabelul 3f

Matricea de incidenţă redusă

Implicanţii primi	Termenii canonici	
	9	13
(*r*) 100- (8,9)	*	
(*t*) 1-01 (9,13)	*	*
(*v*) -1-1 (5,7,13,15)		*

Linia implicantului prim *t* domină liniile implicanţilor primi *r* şi *v*. Din acest motiv, liniile dominate pot fi şterse din matricea de incidenţă. În final, soluţionarea acoperirii prime minime este constituită din trei implicanţi primi: *s* + *u* + *t*:

$$f(x_8, x_4, x_2, x_1) = x_8x_4'x_1' + x_8'x_4 + x_8x_2'x_1.$$

◊

Adesea circuitele combinaţionale se dovedesc să aibă mai multe linii de ieşire pentru un acelaşi set de linii de intrare. Specificaţiile proiectării unor astfel de circuite multi-ieşire constau, de regulă, dintr-un set de funcţii $-f_1(u,v,w, x, y, z)$, $f_2(u,v,w, x, y, z)$, … $f_m(u,v,w, x, y, z)$ definite peste acelaşi set de variabile de intrare.

Soluţia cea mai simplă pentru circuitele multi-ieşire poate consta, aparent, din minimizarea separată a fiecărei funcţii din setul de funcţii caracterizând circuitul multi-ieşire aceasta fiind urmată de implementarea separată pentru fiecare funcţie a propriului circuit.

Această abordare are darul simplităţii dar nu conduce la soluţia cea mai eficientă a circuitelor cu două niveluri având mai multe linii de ieşire. Un exemplu simplu poate releva în ce constă particularitatea minimizării circuitelor combinaţionale vectoriale, multi-ieşire.

Exemplul 5. Se consideră sistemul de funcţii $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (f_1, f_2)$:

$$f_1(x, y, z) = m_1 + m_3 + m_7, \text{ şi}$$
$$f_2(x, y, z) = m_3 + m_6 + m_7.$$

Minimizarea separată a celor două funcţii conduce la expresiile:

$$f_1(x, y, z) = x'z + yz, \text{ şi}$$
$$f_2(x, y, z) = yz + xy.$$

Astfel, implementarea sistemului de funcţii, minimizate aşa cum s-a arătat, este prezentată în figura 1.

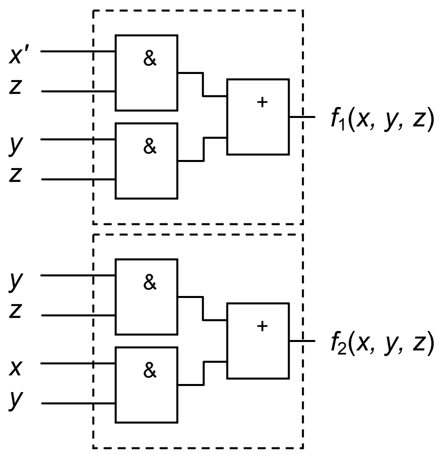

Figura 1. Circuitul rezultat din sumele minime ale celor două funcţii.

O implementare mai eficientă a acestei funcţii vectoriale, $\boldsymbol{F}(x, y, z)$, cu două componente scalare f_1 şi f_2, este prezentată în figura 2.

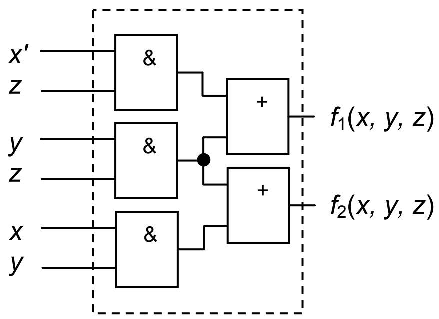

Figura 2. Circuitul optimizat corespunzător sumelor minime ale celor două funcţii.

Costul implementării funcţiei multi-ieşire din figura 2 este evident mai mic decât cel al implementării, aceleiaşi funcţii, din figura 1. Se poate remarca, imediat, că nu este necesar să se implementeze de două ori circuitul care implementează produsul variabilelor y şi z. Astfel, prin utilizarea raţională a unui singur circuit care realizează produsul yz, se micşorează costul implementării iniţiale a funcţiei vectoriale $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ cu 25%.

◊

Exemplul 5 a pus în valoare un implicant prim comun celor două funcţii, ceea ce constituie, totuşi, un caz particular. Spre deosebire de exemplul anterior, exemplul care urmează conţine un caz care este mai general şi pune în evidenţă mai precis natura problemei minimizării funcţiilor multi-ieşire, a funcţiilor vectoriale.

Exemplul 6. Se consideră sistemul de funcţii **G** $(x, y, z) = (g_1, g_2)$:

$$g_1(x, y, z) = m_1 + m_3 + m_7, \text{ şi}$$
$$g_2(x, y, z) = m_2 + m_6 + m_7.$$

Minimizarea separată a celor două funcţii conduce la expresiile:

$$g_1(x, y, z) = x'z + yz, \text{ şi}$$
$$g_2(x, y, z) = yz' + xy.$$

Diagrama, schema, soluţiei obţinute prin minimizarea separată a funcţiilor $g_1(x, y, z)$ şi $g_2(x, y, z)$ este înfăţişată în figura 3.

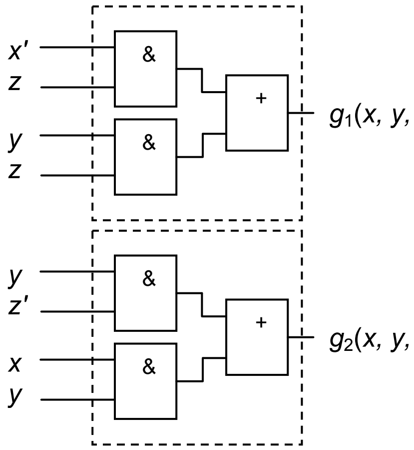

Figura 3. Circuitul rezultat din sumele minime ale funcţiilor g_1 şi g_2.

Cel mai eficient circuit al acestor două funcţii, aşa se poate remarca din figura 4, face uz de termenul *xyz* care nu este un implicant prim nici al funcţiei g_1 şi nici al funcţiei g_2.

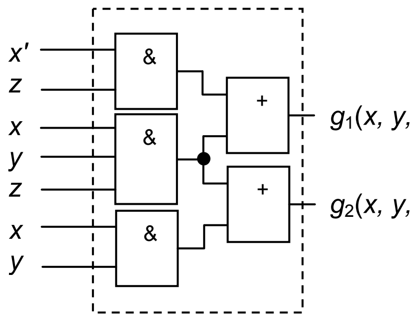

Figura 4. Circuitul rezultat din minimizarea multi-ieşire a celor două funcţii, g_1 şi g_2.

◊

Pentru circuitele scalare (cu o singură linie de ieşire) trebuie considerată doar mulţimea tuturor implicanţilor primi pentru stabilirea circuitelor combinaţionale optime, minime, cu două niveluri.

Exemplul 6 demonstrează că nu este suficient să se considere doar implicanţii primi ai funcţiilor liniilor scalare de ieşire atunci se proiectează reţele combinaţionale ale funcţiilor vectoriale.

Se vor considera, în continuare, doar circuite cu două niveluri constituite prin sume de produse. În situaţia în care, într-un circuit combinaţional cu două niveluri, există porţi ŞI (spre exemplu) care sunt conectate la două (sau mai multe) linii de ieşire y_1 şi y_2, cazul trebuie privit prin prisma conexiunii, practic, la respectivele două (sau mai multe) linii de ieşire.
Atunci când ieşirea unei astfel de porţi, conectată la mai multe linii de ieşire, are valoarea 1, este evident faptul că respectivele două (ori mai multe) linii de ieşire au şi acestea valoarea 1.
Acest fapt revine la a spune, în mod evident, că produsul liniilor de intrare ale acelei porţi ŞI, de forma $x_1x_2\ldots x_p$, este inclus în intersecţia funcţiilor corespunzătoare celor două linii de ieşire:

$$x_1x_2\ldots x_p \subseteq f_1 \cap f_2.$$

Rezultă că porţile ŞI care sunt conectate la două linii de ieşire y_1 şi y_2 trebuie să realizeze un implicant prim al funcţiei $f_{12} = f_1 \cap f_2$. Acest implicant prim nu trebuie să aparţină mulţimii implicanţilor funcţiei f_1 *ori* funcţiei f_2.

Exemplul 7.
Se consideră funcţia

$$\boldsymbol{F} : \mathbf{B}^3 \rightarrow \{0,1\}^3$$

definită astfel:

$$f_2=m_1 + m_5 + m_6 + m_7;$$
$$f_1=m_1 + m_4 + m_5 + m_6;$$
$$f_0=m_0 + m_2 + m_5 + m_6 + m_7;$$

Generarea implicanţilor primi pentru această funcţie vectorială se face printr-un procedeu foarte puţin diferit în comparaţie cu cazul funcţiilor scalare.

Tabelul 4a
Iniţializarea metodei Quine-McCluskey, aplicată funcţiei vectoriale din Exemplul 7.

Implicanţii de ordinul 0			
Grupa	Indicii	$x_2x_1x_0$	$f_2f_1f_0$
0	0	000	001√
1	1	001	110√
	2	010	001√
	4	100	010√
2	5	101	111
	6	110	111
3	7	111	101√

Doi implicanţi ai unei funcţii vectoriale sunt adiacenţi dacă îndeplinesc condiţia de adiacenţă a implicanţilor funcţiilor scalare, aplicată părţilor de intrare, la care se adaugă condiţia de compatibilitate a părţii de ieşire.
Aceasta constă dintr-o intersecţie nevidă a respectivelor părţi de ieşire.

Astfel, spre exemplu, implicanţii de ordinul 0: (000 | 001) şi (001 | 110), au partea de intrare adiacentă dar funcţiile sunt disjuncte.
În concluzie, aceşti implicanţi de ordinul 0 nu sunt adiacenţi, aşa cum se poate remarca şi din tabelul 4a.

Tabelul 4b
Implicanţii de ordinul 1 ai funcţiei vectoriale din Exemplul 7.

Grupa	Indicii	$x_2x_1x_0$	$f_2f_1f_0$
0	0,2	0-0	001
1	1,5	-01	110
	2,6	-10	001
	4,5	10-	010
	4,6	1-0	010
2	5,7	1-1	101
	6,7	11-	101

Deîndată ce un implicant are un succesor de index superior, acesta este marcat (cu caracterul √).

Astfel, (010 | 001) şi (110 | 111) sunt adiacenţi dar este marcat doar primul

Tabelul 4c
Matricea de incidenţă a implicanţilor primi ai funcţiei vectoriale din exemplul 7.

Implicanţii primi			Termenii canonici												
			f_2				f_1				f_0				
Simbol	Binar	Indicii	1	5	6	7	1	4	5	6	0	2	5	6	7
p	(101 | 111)	5		*					*				*		
q	(110 | 111)	6			*					*				*	
r	(0-0 | 001)	0,2									*	*			
s	(-01 | 110)	1,5	*	*			*		*						
t	(-10 | 001)	2,6										*		*	
u	(10- | 010)	4,5						*	*						
v	(1-0 | 010)	4,6						*		*					
w	(1-1 | 101)	5,7		*		*							*		*
x	(11- | 101)	6,7			*	*								*	*

pentru că succesorul lor este în fapt doar succesorul primului, spre exemplu.

Deoarece, exceptând cei doi implicanţi din grupa 0, nici un alt implicant de ordin 0 nu are partea de ieşire complet reprezentată, rezultă că implicanţii grupei 0 nu au succesori si vor fi implicanţi primi, spre exemplu.

Implicanţii primi ai funcţiei ***f*** sunt:

(101 | 111), (110 | 111), (0-0 | 001), (-01 | 110), (-10 | 001), (10- | 010), (1-0 | 010), (1-1 | 101), (11- | 101).

Se ataşează fiecărui implicant prim din lista iniţială câte un simbol distinct:

p = (101 | 111), *q* = (110 | 111), *r* = (0-0 | 001), *s* = (-01 | 110), *t* = (-10 | 001),
u = (10- | 010), *v* = (1-0 | 010), *w* = (1-1 | 101) şi *x* = (11- | 101).

Matricea de incidenţă a acestei funcţii vectoriale este prezentată în tabelul 4c.

Tabelul 4d
Matricea de incidenţă după îndepărtarea implicanţilor primi *p* şi *q* aparţinând celor trei funcţii f_2, f_1 şi f_0.

Implicanţii primi			Termenii canonici						
			f_2		f_1		f_0		
simbol	binar	indicii	1	7	1	4	0	2	7
r	(0-0 | 001)	0,2					*	*	
s	(-01 | 110)	1	*		*				
t	(-10 | 001)	2						*	
u	(10- | 010)	4				*			
v	(1-0 | 010)	4				*			
w	(1-1 | 101)	7		*					*
x	(11- | 101)	7		*					*

Raţionând după apartenenţa la funcţii, implicanţii primi p = (101 | 111), având indicele 5, şi q = (110 | 111), având indicele 6, aparţin intersecţiei celor trei funcţii $f_2 \cdot f_1 \cdot f_0$ şi vor avea ramificaţii spre cele trei linii de ieşire reprezentând f_2, f_1 şi f_0.
Cu alte cuvinte, implicanţii primi p şi q, aparţin oricărei soluţii de acoperire minimă primă care poate fi alcătuită prin setul actual de implicanţi primi.

Trebuie menţionat faptul că odată acoperiţi mintermii intersecţiei celor trei funcţii (m_5 şi m_6), coloanele acestora (5 şi 6) vor fi îndepărtate din matricea de incidenţă împreună cu liniile celor doi implicanţi primi.
Această transformare a matricei de incidenţă este ilustrată în tabelul 4d.

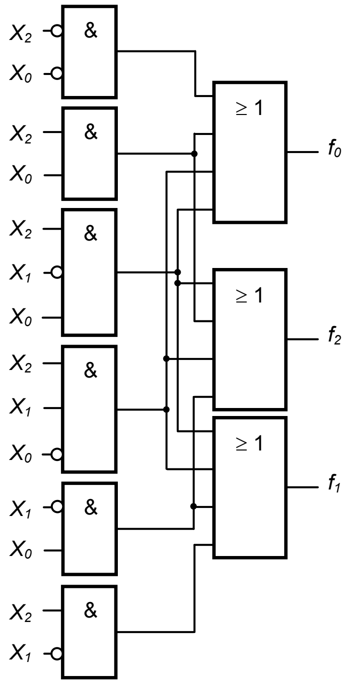

Figura 5. Implementarea funcţiei vectoriale minimizate din exemplul 9.

Considerând matricea de incidenţă rezultată după îndepărtarea implicanţilor primi p şi q, aparţinând celor trei funcţii f_2, f_1 şi f_0, se remarcă faptul că implicantul prim s aparţine intersecţiei funcţiilor f_2 şi f_1.

Acest implicant prim acoperă termenul canonic m_1, iar acest termen canonic este chiar intersecţia celor două funcţii, $m_1 = f_2 \cdot f_1$.

Implicantul prim s va avea ramificaţii atât spre linia de ieşire a funcţiei f_2, cât şi spre linia de ieşire a funcţiei f_1. În această manieră se dovedeşte că implicantul prim s va aparţine oricărei acoperiri minime prime a acestei funcţii vectoriale.

Tabelul 4e

Matricea de incidenţă după îndepărtarea implicantului prim s şi a coloanelor m_1.

Implicanţii primi			Termenii canonici				
			f_2	f_1		f_0	
simbol	binar	indicii	7	4	0	2	7
r	(0-0 | 001)	0,2			*	*	
t	(-10 | 001)	2				*	
u	(10- | 010)	4		*			
v	(1-0 | 010)	4		*			
w	(1-1 | 101)	7	*				*
x	(11- | 101)	7	*				*

Tabelul 4e prezintă matricea de incidenţă după excluderea implicantului prim *s* şi a coloanelor corespunzătoare termenului canonic m_1, atât din dreptul funcţiei f_2 cât şi din dreptul funcţiei f_1.
Matricea de incidenţă din tabelul 4e a scăzut considerabil în complexitate.
Astfel, termenul canonic m_7 aparţinând funcţiei f_2 şi funcţiei f_0 poate fi acoperit de implicantul prim *w* sau de implicantul prim *x*, unul dintre aceştia.
În mod analog, termenul canonic m_4, aparţinând funcţiei f_1, poate fi acoperit de implicantul prim *u* sau de implicantul prim *v*, oricare dintre aceştia.
Implicantul prim *r* domină implicantul prim *t*, în consecinţă acesta din urmă poate fi îndepărtat din matrice.
Acoperirea primă minimă a funcţiei vectoriale arată astfel:
(101|111), (110|111), (-01|110), (1-1|101), (10-|010), (0-0|001).
Implementarea prin circuite logice ŞI şi SAU a descrierii simbolice corespunzătoare acoperirii prime minime a acestei funcţii vectoriale este prezentată în figura 5.
◊

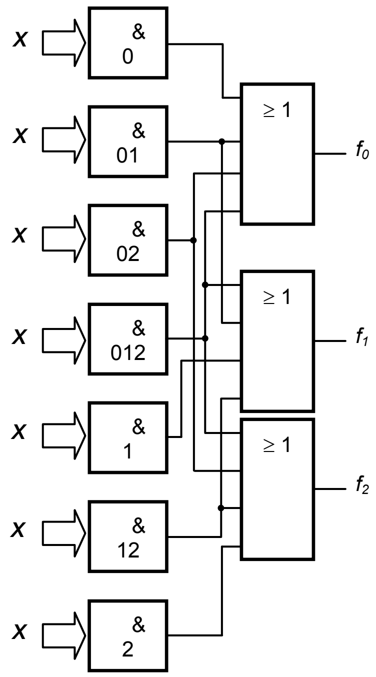

Figura 6. Implementarea generică a unei funcţiei vectoriale având trei componente scalare.

În cazul unei funcţii vectoriale, având trei componente scalare, de forma:

$$\boldsymbol{F}: \boldsymbol{B}^n \rightarrow \boldsymbol{B}^3,$$

structura minimizată generică a funcţiei $\boldsymbol{F}$ arată ca în figura 6.
Toate porţile *ŞI* sunt generice şi sunt indexate.
Indexul unei porţi *ŞI* este înscris, în figura 6, la baza simbolului porţii respective. Circuitele *ŞI* sunt generice în sensul că pot fi mai multe circuite având acelaşi index dar realizând fiecare, în parte, alt termen produs. Doi termeni produs, având acelaşi index, pot diferi atât prin paritatea variabilelor cât şi prin faptul că liniile lor de intrare pot defini două submulţimi distincte ale domeniului de definiţie.
Codul indexului unui circuit *ŞI* este determinat în raport cu ramificaţiile pe care le are linia de ieşire a respectivului circuit. Astfel, un circuit *ŞI* având indexul 012 va avea linia de ieşire ramificată spre circuitele *SAU* aparţinând liniilor funcţiilor scalare f_0, f_1 şi f_2.

În mod similar, o poartă *ŞI* având indexul 12 îşi ramifică liniile de ieşire spre porţile *SAU* ale funcţiilor scalare f_1 şi f_2. În timp ce o poartă ŞI cu indexul 0 se va conecta doar la poarta SAU a cărei linie de ieşire este etichetată prin f_0, spre exemplu.
Porţile indexate printr-o singură cifră (0, 1 sau 2, în cazul acesta) nu au linia de ieşire ramificată dar sunt generice. Aceste porţi se conectează, fiecare, doar intrarea unei porţi *SAU* a unei singure funcţii scalare (respectiv f_0, f_1 sau f_2).
Analog, sunt definibile structurile generice pentru funcţiile multi-ieşire având patru ori mai multe linii scalare de ieşire.