Laborator 4

Modele sistemice liniare. Reprezentare numerică. Conversii. Conexiuni

4.1 Tema

Formarea deprinderilor de utilizare a convenţiilor MATLAB de reprezentare numerică a modelelor sitemice de stare şi de transfer. Testarea algoritmilor de conversie intre modele sistemice trecum şi calculul modelelor pentru sisteme complexe obţinute prin conectarea unor sisteme simple cu accent pe studiul coonexiunilor fundamentale.

4.2 Reprezentarea numerică a modelelor sistemice. Convenţii MATLAB

În această secţiune ne vom ocupa de reprezentările numerice ale modelelor matematice ale sistemelor liniare şi aşa cum sunt utilizate acestea de către funcţiile din MATLAB CONTROL TOOLBOX.

4.2.1 Modele sistemice liniare

În general, un sistem liniar continuu, respectiv discret, este definit printr-un model de stare de forma

$$(\mathbf{S}) \quad \left\{ \begin{array}{c} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{respectiv} \quad \left\{ \begin{array}{c} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{array} \right. , \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

unde vectorii $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^m$ şi $y \in \mathcal{R}^l$ sunt *starea*, *intrarea* şi, respectiv, *ieşirea* sistemului iar A, B, C, D sunt matrice constante de dimensiuni corespunzătoare. Dimensiunea n a spaţiului stărilor $\mathcal{X} = \mathcal{R}^n$ se numeşte ordinul (sau dimensiunea) lui $(\mathbf{S})$.

Pe scurt, un model de stare al unui sistem liniar este definit de un cvartet de matrice şi în consecinţă se notează $S = (A, B, C, D)$. Matricea $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$ caracterizează dinamica internă a sistemului, coloanele matricei $B \in \mathcal{R}^{n\times m}$ definesc canalele de intrare, liniile matricei $C \in \mathcal{R}^{l\times n}$ definesc canalele de ieşire iar elementele matricei $D \in \mathcal{R}^{l\times m}$ reprezintă căile de transfer direct intrare-ieşire. Dacă $D = 0$ atunci sistemul S, notat pe scurt $S = (A, B, C)$, este pur dinamic, în sensul că orice transfer intrare-ieşire este posibil numai prin intermediul modificării (dinamice) a stării x. Aceste idei sunt evidenţiate de schema bloc asociată lui (**S**) (e.g. continuu - figura 4.1).

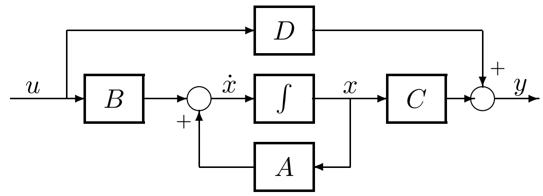

Figura 4.1: Structura modelului de stare al unui sistem liniar (continuu).

Modelul de stare (**S**) este invariant la o transformare liniară de stare

$$\tilde{x} = Tx, \tag{4.2}$$

unde $T \in \mathcal{R}^{n\times n}$ este o matrice *nesingulară* arbitrară, în sensul că noul vector de stare $\tilde{x}$ satisface ecuaţii ($\tilde{\mathbf{S}}$) de acelaşi tip cu (**S**), în care matricele corespunzătoare sunt

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= TAT^{-1}, \quad & \tilde{B} &= TB\,, \\ \tilde{C} &= \ \ CT^{-1}, \quad & \tilde{D} &= D\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Modelele (**S**) şi ($\tilde{\mathbf{S}}$) legate prin relaţiile (4.3) se numesc *echivalente* (sau *asemenea*) şi sunt indiscernabile prin experimente intrare-ieşire, deci reprezintă un acelaşi sistem liniar considerat modulo relaţia de echivalenţă (4.3). Pe scurt, au sens sistemic numai acele proprietăţi ale sistemului (**S**) care sunt *invarianţi* ai lui (**S**) în raport cu transformările (4.3). Din motive de eficienţă şi siguranţă a calculului, deseori vom restrânge clasa transformărilor utilizând în (4.3) numai matrice $T = U$ *ortogonale*. În acest caz, vom spune că modelele (**S**) şi ($\tilde{\mathbf{S}}$) sunt *ortogonal echivalente* şi, în mod corespunzător, vom acorda o atenţie specială *invarianţilor ortogonali* ai lui (**S**).

În MATLAB Control System Toolbox pentru modelele de stare se utilizează sigla **ss** (**s**tate **s**pace model) şi orice cvartet de matrice (A, B, C, D) care satisface restricţiile dimensionale evidente (i.e. A este pătrată şi cele patru matrice pot fi "aşezate" în tabloul $\left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right]$), reprezintă un model de stare valid continuu sau discret. Atributul de "continuu", respectiv "discret", este fixat exclusiv de utilizator prin modul de folosire. De aceea, în continuare vom considera numai sistemele continue (sistemele discrete se vor lua în considerare numai atunci când apar aspecte specifice).

În practica inginerească proprietăţile de transfer intrare-ieşire ale unui sistem liniar în starea iniţială nulă, adică pentru $x(0) = 0$, sunt caracterizate prin intermediul matricei de transfer $T(s)$ pentru sistemele continue, respectiv $T(z)$ pentru sistemele discrete, definite de

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \quad \text{respectiv} \quad T(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \tag{4.4}$$

şi se constată uşor că $T(s)$ şi $T(z)$ sunt matrice cu l linii şi m coloane ale căror elemente sunt funcţii raţionale de variabilă complexă.

În MATLAB Control System Toolbox pentru modelele de transfer se utilizează sigla **tf** (**t**ransfer **f**unction). Reprezentarea numerică a modelelor de transfer are la bază convenţia MATLAB de reprezentare a polinoamelor prin vectori linie ai coeficienţilor plasaţi în ordinea descrescătoare a puterilor nedeterminatei. Zerourile (rădăcinile) unui polinom se reprezintă prin vectori coloană. În acest fel, cu ajutorul unor matrice numerice se pot reprezenta numai coloane de polinoame de acelaşi grad (alinierea gradelor polinoamelor se poate face prin introducerea de coeficienţi nuli). Aceasta restrânge posibilitatea reperezentării numerice a matricelor de transfer numai la sistemele cu o singură intrare.

Având în vedere identitatea formală a matricelor de transfer pentru sistemele continue şi cele discrete, şi în acest caz atributul de "continuu", respectiv "discret", este fixat exclusiv de utilizator prin modul de folosire.

În acest sens în continuare vom considera modele de transfer numai pentru sistemele continue definite prin matrice de forma

$$(\mathbf{T}) \qquad T(s) = [\,T_{ij}(s)\,]\,, \quad T_{ij}(s) = \frac{N_{ij}(s)}{p_{ij}(s)} \tag{4.5}$$

în care $p_{ij},\ N_{ij} \in \mathcal{R}[s]$ şi $\partial p_{ij} \geq \partial N_{ij},\ i = 1:l,\ j = 1:m$ iar ∂ denotă gradul.

Alte forme sub care se poate prezenta modelul (**T**) pleacă de la posibilitatea reprezentării unui polinom prin rădăcinile sale, respectiv a unei funcţii raţionale prin setul de zerouri şi poli (sigla **zp** în MATLAB de la **z**eros - **p**ooles) precum şi prin elementele definitorii ale descompunerii în fracţii simple (reziduuri).

4.3 Conversii de modele

În această secţiune prezentăm modalităţile de trecere de la un model de stare la un model de transfer şi reciproc. Baza este dată de relaţiile (4.4). Funcţiile MATLAB care realizează aceste conversii sunt reprezentate în fig.4.2 şi au numele formate astfel

"sigla modelului sursă" t(w)o "sigla modelului rezultat".

4.3.1 Conversia tf → ss (realizări)

În acest paragraf prezentăm modalităţile de construcţie a realizărilor de stare $S = (A, B, C, D)$, nu nepărat de ordin minim, pentru sisteme definite de matrice de transfer $T(s)$ raţionale *proprii.*

În toate cazurile considerate, matricea D a realizării de stare se obţine *"extrăgând partea întreagă"* a lui $T(s)$, adică scriind

$$T(s) = T'(s) + D, \tag{4.6}$$

unde $T'(s)$ este strict proprie. Această operaţie se poate efectua separat pentru fiecare element al lui T, mai precis, dacă

$$T_{ij}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N_{ij}(s)}{p_{ij}(s)}\,, \tag{4.7}$$

unde polinomul p_{ij} este monic [1] şi de grad n, atunci d_{ij} este coeficientul termenului de grad n al lui N_{ij} astfel încât

$$\frac{N_{ij}(s)}{p_{ij}(s)} = d_{ij} + \frac{N'_{ij}(s)}{p_{ij}(s)}\,, \quad N'_{ij}(s) = N_{ij}(s) - d_{ij}p_{ij}(s)\,. \tag{4.8}$$

[1] Un polinom se numeşte *monic* dacă are coeficientul termenului de grad maxim egal cu 1.

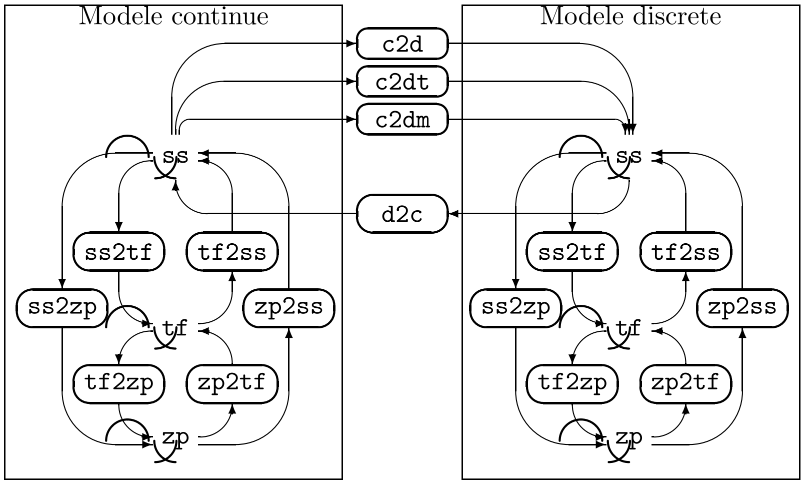

Figura 4.2: Conversii de modele disponibile în MATLAB.

Altfel spus, dacă notăm $d_{ij} \overset{\text{def}}{=} \nu_0$, atunci dispunând coeficienţii $a_0 = 1$, a_k, $k = 1 : n$ ai polinomului p_{ij} şi ν_k, $k = 0 : n$ ai polinomului N_{ij} în ordinea descrescătoare a puterilor

$$\begin{array}{cccc} 1 & a_1 & \dots & a_n \\ \nu_0 & \nu_1 & \dots & \nu_n \end{array}$$

şi făcând eliminare gaussiană pentru a anula ν_0, obţinem coeficienţii polinomului N'_{ij}, adică

$$\nu_k \leftarrow \nu'_k = \nu_k - \nu_0 a_k\,, \quad k = 1 : n. \tag{4.9}$$

Operaţia de mai sus se repetă pentru $i = 1 : l$, $j = 1 : m$.

În consecinţă, rămâne să construim realizarea de stare a matricei $T'(s)$ *strict proprie* cu elementele

$$T'_{ij}(s) = \frac{N'_{ij}(s)}{p_{ij}(s)}\,, \tag{4.10}$$

adică să construim $S' = (A, B, C)$ astfel încât

$$T'(s) = C(sI - A)^{-1}B\,. \tag{4.11}$$

Pentru simplificarea notaţiilor, mai departe eliminăm indicele superior $'$ şi considerăm succesiv câteva cazuri reprezentative de complexitate crescândă.

A. Sisteme cu o singură intrare şi o singură ieşire (SISO)

În cazul sistemelor cu o singură intrare şi o singură ieşire sau, pe scurt, SISO (**S**ingle-**I**nput, **S**ingle-**O**utput) se dă funcţia de transfer (scalară) strict proprie

$$T(s) = \frac{N(s)}{p(s)}\,, \tag{4.12}$$

cu

$$\begin{aligned} p(s) = &\ s^n + a_2 s^{n-1} + \cdots + a_{n+1}, \\ N(s) = &\ \qquad\quad \nu_1 s^{n-1} + \cdots + \nu_n. \end{aligned} \tag{4.13}$$

O realizare de stare a lui $T(s)$ se scrie, prin inspecţie, într-una din cele două forme duale următoare

1^0. *Forma standard controlabilă*

$$(\mathbf{C}) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_c = \begin{bmatrix} -a_2 & \cdots & -a_n & -a_{n+1} \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \\ C_c = \begin{bmatrix} \nu_1 & \dots & \nu_{n-1} & \nu_n \end{bmatrix}, \end{array} \right. . \tag{4.14}$$

2^0. *Forma standard observabilă*

$$(\mathbf{O}) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_o = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_n & & & 1 \\ -a_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{n-1} \\ \nu_n \end{bmatrix}, \\ \\ C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \end{array} \right. . \tag{4.15}$$

Formele $(\mathbf{C})$ şi $(\mathbf{O})$ se numesc *duale* deoarece au loc relaţiile

$$A_o = A_c^T, \quad B_o = C_c^T, \quad C_o = B_c^T\,. \tag{4.16}$$

Matricele A_c şi A_o se mai numesc *matrice companion* ale polinomului $p(s)$, cu ai cărui coeficienţi sunt formate.

Prin calcul direct se poate arăta că ambele forme standard sunt realizări ale lui $T(s)$. Justifică denumirilor de *formă standard controlabilă* şi *formă standard controlabilă va deveni transparentă în laboratorul 6.*

B. Sisteme cu o singură intrare şi mai multe ieşiri (SIMO)

*În cazul sistemelor SIMO (***S***ingle-***I***nput,* **M***ulti-***O***utput) matricea de transfer, considerată dată, are o structură tip coloană*

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_l(s) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^l(s)\,, \tag{4.17}$$

unde fiecare $T_i(s)$ este o funcţie raţională strict proprie de forma

$$T_i(s) = \frac{N_i(s)}{p_i(s)}\,, \quad i = 1 : l \tag{4.18}$$

cu

$$\begin{aligned} p_i(s) = &\ s^{n(i)} + a_2(i) s^{n(i)-1} + \cdots + a_{n(i)+1}(i), \\ N_i(s) = &\ \qquad\qquad \nu_1(i) s^{n(i)-1} + \cdots + \nu_{n(i)}(i). \end{aligned} \tag{4.19}$$

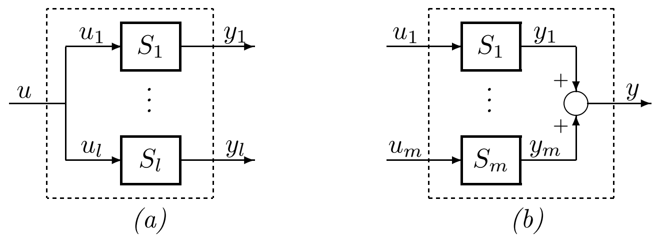

Figura 4.3: Conexiunile ”paralel la intrare” (a) şi ”paralel la ieşire” (b).

Realizarea ”eficientă” se obţine aducând la acelaşi numitor toate elementele lui $T(s)$. Scriem

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_l(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^*(s) \\ \vdots \\ N_l^*(s) \end{bmatrix} p^{-1}(s) \stackrel{\text{def}}{=} N(s)p^{-1}(s)\,, \tag{4.20}$$

unde

$$p(s) = s^n + a_2 s^{n-1} + \cdots + a_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{cmmmc}(p_1(s), \cdots, p_l(s))\,, \tag{4.21}$$

$$N_i^*(s) = \nu_1^*(i)s^{n-1} + \cdots + \nu_n^*(i) \tag{4.22}$$

deci numărătorul $N \in \mathcal{R}^l[s]$ se scrie sub forma:

$$N(s) = \nu_1 s^{n-1} + \cdots + \nu_n \tag{4.23}$$

unde vectorii $\nu_k \in \mathcal{R}^l$ au componentele ${\nu_k}^*(i),\ i = 1 : l,\ k = 1 : n\,.$

Matricea de transfer factorizată $T(s) = N(s)p^{-1}(s)$ se realizează direct în forma *standard controlabilă* (**C**), unde acum polinomul caracteristic al matricei A_c coincide cu $p(s)$ iar C_c conţine, pe fiecare coloană, coeficienţii ν_k ai lui N, adică $C_c \in \mathcal{R}^{l\times n}$. Realizarea obţinută este controlabilă.

C. Sisteme cu mai multe intrări şi o singură ieşire (MISO)

În acest caz matricea de transfer nu are o reprezentare numerică în MATLAB întrucât are o structură linie

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) & \cdots & T_m(s) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{1\times m}(s)\,. \tag{4.24}$$

unde fiecare $T_i(s)$ este o funcţie raţională strict proprie de forma

$$T_i(s) = \frac{N_i(s)}{p_i(s)},\ i = 1 : m.$$

Renunţând la coonvenţiile MATLAB, o realizarea ”eficientă” se obţine procedând ,,prin dualitate” faţă de cazul precedent. Aceasta înseamnă că, aducând la acelaşi numitor toate elementele lui $T(s)$, scriem

$$\begin{aligned} T(s) &= \begin{bmatrix} T_1(s) & \cdots & T_m(s) \end{bmatrix} = \\ &= p^{-1}(s) \begin{bmatrix} N_1^*(s) & \cdots & N_m^*(s) \end{bmatrix} = p^{-1}(s)N(s)\,, \end{aligned} \tag{4.25}$$

unde $p(s) \stackrel{\text{def}}{=} \text{cmmmc}(p_1(s), \cdots, p_m(s))$, $N_i^*(s)$ au expresii similare cu (4.21) şi (4.22), deci numărătorul $N \in \mathcal{R}^{1\times m}[s]$ se scrie sub forma (3.57), unde $\nu_k \in \mathcal{R}^{1\times m}$ au componentele $\nu_k^*(i)$, $i = 1 : m$, $k = 1 : n$.

Matricea de transfer factorizată $T(s) = p^{-1}(s)N(s)$ se realizează direct în forma *standard observabilă* (**O**), unde acum polinomul caracteristic al matricei A_o coincide cu $p(s)$, iar B_o conţine, pe fiecare linie, coeficienţii lui N, adică $B_o \in \mathcal{R}^{n\times m}$. Realizarea obţinută este observabilă.

D. Sisteme cu mai multe intrări şi mai multe ieşiri (MIMO)

Se dă matricea de transfer cu l linii şi m coloane $T(s) = [\,T_{ij}(s)\,]$. O realizare "eficientă" se poate construi în două moduri.

1^0. Partiţionăm $T(s)$ pe coloane

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) & \ldots & T_m(s) \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

şi aducem fiecare coloană $T_j(s) \in \mathcal{R}^l(s)$ la acelaşi numitor ca la punctul **B**, adică scriem $T_j(s) = N_j(s)p_j^{-1}(s)$, unde $N_j(s) \in \mathcal{R}^l[s]$, $p(s) \in \mathcal{R}[s]$. Deci avem

$$\begin{aligned} T(s) &= \begin{bmatrix} N_1(s)p_1^{-1}(s) & \ldots & N_m(s)p_m^{-1}(s) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} N_1(s) & \ldots & N_m(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(s) & & \\ & \ddots & \\ & & p_m(s) \end{bmatrix}^{-1} = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} N(s)p^{-1}(s)\,, \end{aligned} \tag{4.27}$$

unde

$$\begin{aligned} p_j(s) &= s^{n(j)} + a_1(j)n^{(j)-1} + \ldots + a_{n(j)}(j), \quad a_k(j) \in \mathcal{R}, \\ N_j(s) &= \nu_1(j)s^{(j)-1} + \ldots + \nu_{n(j)}(j), \quad \nu_k(j) \in \mathcal{R}^l. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Întrucât relaţia $y(s) = T(s)u(s)$ se scrie

$$y(s) = \sum_{j=1}^{m} N_j(s)p_j^{-1}(s)u_j(s)\,, \tag{4.29}$$

iar fiecare coloană $N_j(s)p_j^{-1}(s)$ a matricei de transfer se realizează în forma standard controlabilă $(A_c(j), B_c(j), C_c(j))$, obţinem realizarea *standard controlabilă* (decuplată la intrare)

$$\left\{ \begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} A_c(1) & & \\ & \ddots & \\ & & A_c(m) \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} B_c(1) & & \\ & \ddots & \\ & & B_c(m) \end{bmatrix}, \\ C_c &= \begin{bmatrix} C_c(1) & \cdots & C_c(m) \end{bmatrix}. \end{aligned} \right. \tag{4.30}$$

Ordinul $n = n_c$ este suma gradelor $n(j)$ ale numitorilor comuni pe coloană. (Se poate arăta că aceste grade coincid cu indicii de controlabilitate ai perechii (A_c, B_c)).

2^0. Partiţionând $T(s)$ pe linii şi procedând prin dualitate faţă de punctul precedent, obţinem realizarea *standard observabilă* (decuplată la ieşire)

$$\left\{\begin{array}{l} A_o = \begin{bmatrix} A_o(1) & & \\ & \ddots & \\ & & A_o(l) \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} B_o(1) \\ \vdots \\ B_o(l) \end{bmatrix} \\ \\ C_o = \begin{bmatrix} C_o(1) & & \\ & \ddots & \\ & & C_o(l) \end{bmatrix}. \end{array}\right. \tag{4.31}$$

Ordinul $n = n_o$ al realizării (4.31) este suma gradelor numitorilor comuni pe linie. (Se poate arăta că aceste grade coincid cu indicii de observabilitate ai perechii (C_o, A_o)). În general, niciuna dintre cele două realizări (4.30) şi (4.31) nu este minimală căci, în general, perechea (C_c, A_c) nu rezultă observabilă iar perechea (A_o, B_o) nu rezultă controlabilă.

În finalul acestei secţiuni precizăm că obţinerea efectivă a realizărilor de mai sus necesită, în primul rând, un mecanism de manipulare a matricelor bloc cum este cel oferit de MATLAB (sau cel care poate fi creat cu relativă uşurinţă de utilizator în orice limbaj de programare). Cu un astfel de mecanism la dispoziţie, scrierea algoritmilor de construcţie a realizărilor prezentate devine extrem de simplă şi, din acest motiv, este lăsată în seama studentului.

4.3.2 Conversia ss $\rightarrow$ tf.

Conversia (**ss**) $\rightarrow$ (**tf**), respectiv calculul matricei de transfer asociate unui model de stare dat, se face separat pentru fiecare pereche (u_j, y_i) de intrări şi ieşiri, adică în esenţă se referă la un sistem simplu (SISO). Deoarece formele alternative de reprezentare ale unei matrice de transfer se referă tot la sisteme simple, adică la funcţii de transfer, în acest paragraf ne vom referi numai la aceste obiecte.

Se dă un sistem simplu definit prin

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{array}\right. , \tag{4.32}$$

unde matricele $A \in \mathcal{R}^{n\times n},\ B \in \mathcal{R}^{n},\ C \in \mathcal{R}^{1\times n}$ sunt cunoscute.

Pentru a calcula funcţia de transfer, adică două polinoame $p(s),\ N(s)$ astfel încât

$$T(s) \stackrel{\text{def}}{=} C(sI - A)^{-1}B = \frac{N(s)}{p(s)}, \tag{4.33}$$

constatăm că funcţia de transfer a unui sistem cu reacţie unitară (vezi fig. 4.4) este

$$T_0(s) = \frac{T(s)}{1 + T(s)} = \frac{N(s)}{p(s) + N(s)} = \frac{N(s)}{p_0(s)} \tag{4.34}$$

unde $p_0(s) = p(s) + N(s)$. Deci

$$N(s) = p_0(s) - p(s). \tag{4.35}$$

(Menţionăm că rădăcinile polinomului $N(s)$ sunt zerourile sistemului $S = (A, B, C)$).

Problema s-a redus la a calcula $p(s)$ şi $p_0(s)$.

Dar $p(s)$ este polinomul caracteristic al lui A adică

$$p(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i)\,, \tag{4.36}$$

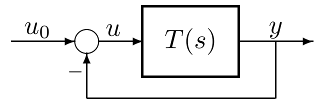

Figura 4.4: Conexiune cu reacţie unitară.

unde λ_i sunt polii lui $T(s)$, adică valorile proprii ale matricei A. Analog, $p_0(s)$ este polinomul caracteristic al matricei A_0 a sistemului în circuit închis obţinut punând $u = u_0 - y$, adică $u = u_0 - Cx$. Deci $A_0 = A - BC$.

Prin urmare, pentru a calcula funcţia de transfer $T(s)$ se procedează astfel:

1. Se calculează valorile proprii λ_i ale matricei A utilizând algoritmul QR.
2. Se formează $A_0 = A - BC$.
3. Se calculează valorile proprii λ_{0i} ale matricei A_0 utilizând algoritmul QR.
4. Se calculează (coeficienţii lui) $p(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i)$.
5. Se calculează $p_0(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_{0i})$.
6. Se calculează $N(s) = p_0(s) - p(s)$.

Dacă sistemul $S = (A, B, C)$ nu este controlabil şi observabil (ceea ce este probabil să se întâmple dacă provine dintr-un sistem multiplu) atunci p şi N, adică p şi p_0 au un cel mai mare divizor comun (cmMdc) $\neq 1$, care coincide cu produsul $\prod(s - \lambda_{fi})$, unde $\lambda_{fi} \in \sigma(A) \cap \sigma(A_0)$ sunt polii ficşi ai sistemului (A, B, C). Acest divizor poate fi eliminat prin inspecţie înainte de pasul 4, dar decizia poate fi afectată de erorile de rotunjire inerente.

4.4 Conexiuni

În acest paragraf arătăm cum se construiesc modelele sistemice de tip (**S**) şi (**T**) pentru conexiunile uzuale a două sisteme S_i, $i = 1, 2$ definite prin modelele de stare

$$(\mathbf{S}_i) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) + D_i u_i(t)\,, \end{array} \right. \tag{4.37}$$

respectiv prin matricele de transfer

$$(\mathbf{T}_i) \qquad y_i(s) = T_i(s) u_i(s)\,. \tag{4.38}$$

Construcţia modelelor sistemice pentru structuri oricât de complexe se reduce, în ultimă instanţă, la aplicarea repetată a procedurilor prezentate mai jos.

În toate cazurile considerate vectorul de stare al sistemului realizat prin conexiune este

$$x = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right] \in \mathcal{R}^n\,, \quad n = n_1 + n_2\,, \tag{4.39}$$

adică întotdeauna vectorul de stare rezultă prin agregarea vectorilor de stare ai sistemelor componente iar ordinul conexiunii este egal cu suma ordinelor sistemelor conectate. Ecuaţiile de stare se obţin prin eliminarea variabilelor intermediare pe baza relaţiilor ce definesc conexiunea iar matricele sistemului agregat se obţin apoi prin construcţii din blocuri cunoscute şi/sau calcule matriceale elementare.

Conexiunea paralel

Pentru a putea fi conectate în paralel, sistemele S_1 şi S_2 trebuie să satisfacă condiţiile structurale $m_1 = m_2$, $l_1 = l_2$, adică să aibă acelaşi număr de intrări şi acelaşi număr de ieşiri. Relaţiile de interconexiune (vezi figura 4.5 (b)) sunt

$$u_1 = u_2 = u\,, \quad y = y_1 + y_2\,. \tag{4.40}$$

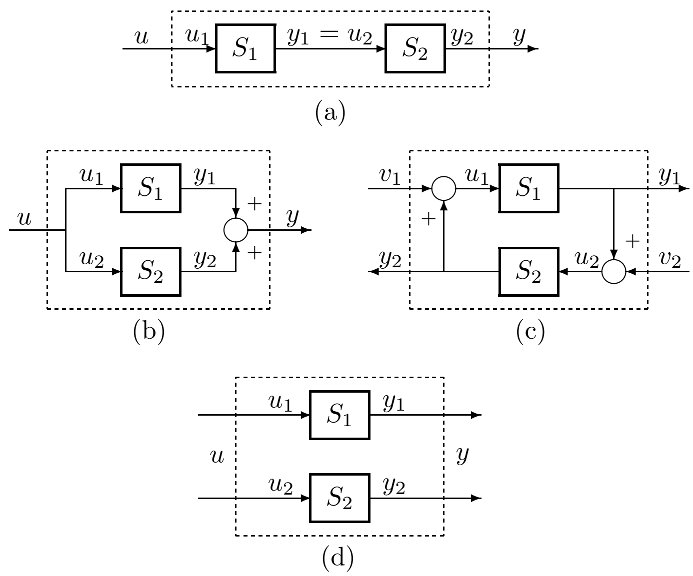

Figura 4.5: Conexiunile sistemice fundamentale: serie (a), paralel (b), reacţie (c) şi produs direct (d).

În consecinţă, ecuaţiile de stare se scriu

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ \\ y & = & \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [D_1 + D_2]\, u, \end{array} \right. \tag{4.41}$$

unde matricele lui $S = (A, B, C, D)$ au expresii evidente, în particular A este bloc - diagonală. Matricea de transfer este

$$T(s) = T_1(s) + T_2(s), \tag{4.42}$$

deci, în cazul SISO, cu notaţii evidente, avem

$$T(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N(s)}{p(s)} = \frac{N_1(s)p_2(s) + N_2(s)p_1(s)}{p_1(s)p_2(s)}. \tag{4.43}$$

Observăm că $T(s)$ nu rezultă neapărat ireductibilă chiar dacă $T_i(s)$, $i = 1 : 2$, au această proprietate.

Conexiunea serie

Pentru a putea fi conectate în serie, sistemele trebuie să satisfacă condiţia structurală $l_1 = m_2$. Relaţiile de interconexiune (vezi figura 4.5 (a)) sunt

$$u_1 = u, \quad u_2 = y_1, \quad y = y_2\,. \tag{4.44}$$

În consecinţă, ecuaţiile de stare se scriu

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_2D_1 \end{bmatrix} u, \end{cases} \tag{4.45}$$

unde, din nou, matricele lui S au expresii evidente, în particular A este bloc - inferior - triunghiulară. Matricea de transfer este

$$T(s) = T_2(s)T_1(s)\,, \tag{4.46}$$

(în această ordine a matricelor factor!).

Conexiunea în circuit închis (în buclă sau cu reacţie)

Pentru a putea fi conectate în circuit închis, sistemele trebuie să satisfacă condiţiile structurale $l_2 = m_1$, $l_1 = m_2$,precum şi condiţia ,,de bună formulare" a conexiunii,

$$\det(I - D_1D_2) \neq 0\,. \tag{4.47}$$

Această condiţie, necesară pentru a putea exprima y în mod unic funcţie de x_1, x_2 precum şi de intrările externe v_1, v_2 (vezi figura 4.5 (c)), este generic satisfăcută în raport cu D_1, D_2 şi este satisfăcută în mod sigur dacă fie $D_1 = 0$, fie $D_2 = 0$, adică cel puţin unul dintre sistemele conectate în circuit închis este strict propriu (pur dinamic).

Relaţiile de interconexiune sunt

$$u_1 = v_1 + y_2\,, \quad u_2 = v_2 + y_1\,. \tag{4.48}$$

În consecinţă, ecuaţiile de stare ale conexiunii

$$\begin{cases} \dot{x_1} = A_1x_1 + B_1(v_1 + y_2) \\ \dot{x_2} = A_2x_2 + B_2(v_2 + y_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = C_1x_1 + D_1(v_1 + y_2) \\ y_2 = C_2x_2 + D_2(v_2 + y_1) \end{cases}$$

se scriu sub forma evidentă

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -- \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

$$\begin{bmatrix} I & -D_1 \\ -D_2 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & | & D_1 & 0 \\ 0 & C_2 & | & 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -- \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \tag{4.50}$$

Introducând matricele produsului direct $S_d = (A_d, B_d, C_d, D_d)$ al celor două sisteme, vezi fig. 4.5 (d), unde

$$A_d = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix},$$

$$C_d = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}, \quad D_d = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix},$$

precum şi matricele de interconexiune

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^* = \begin{bmatrix} 0 & D_1 \\ D_2 & 0 \end{bmatrix}$$

ecuaţiile (4.49) şi (4.50) devin

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_d & B_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + B^* y$$

$$(I - D^*)y = \begin{bmatrix} C_d & D_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix},$$

unde, în virtutea condiţiei de bună formulare, matricea $I - D^*$ este inversabilă. Prin urmare avem

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\begin{bmatrix} A_d & B_d \end{bmatrix} + B^*(I - D^*)^{-1} \begin{bmatrix} C_d & D_d \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, \\ y = (I - D^*)^{-1} \begin{bmatrix} C_d & D_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{4.51}$$

Matricele modelului de stare agregat $S = (A, B, C, D)$ al conexiunii în circuit închis au expresiile

$$\begin{array}{ll} A = A_d + B^*(I - D^*)^{-1} C_d, & B = B_d + B^*(I - D^*)^{-1} D_d\,, \\ C = (I - D^*)^{-1} C_d, & D = (I - D^*)^{-1} C_d\,. \end{array} \tag{4.52}$$

iar calculul se face în ordinea

$$\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = (I - D^*)^{-1} \begin{bmatrix} C_d & D_d \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & B_d \end{bmatrix} + B^* \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}.$$

Matricea de transfer este

$$T(s) = (I - T^*(s))^{-1} T_d(s)\,, \tag{4.53}$$

unde

$$T_d(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) & 0 \\ 0 & T_2(s) \end{bmatrix}, \qquad T^*(s) = \begin{bmatrix} 0 & T_1(s) \\ T_2(s) & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.54}$$

Relaţiile de mai sus pentru construcţia modelelor de stare ale sistemelor agregat evidenţiază faptul că în toate cazurile se face apel exclusiv la calcule matriceale elementare precum şi la manipularea unor structuri matriceale organizate pe blocuri (ceea ce, de exemplu în MATLAB, este, de asemenea, elementar). În consecinţă, scrierea algoritmilor corespunzători este lăsată în sarcina studentului.

Programe MATLAB disponibile

Pentru verificarea consistenţei dimensionale a matricelor dintr-un model de stare se utilizează funcţia **abcdchk** iar pentru validarea unui model de transfer funcţia **tfchk**.

Diagrama din fig4.2 prezintă marea majoritate a funcţiilor de conversie de modele. În plus descompunerea în fracţii simple se poate face cu funcţia **residue** iar transformările nesingulare de stare (4.3) se pot calcula cu ajutorul funcţiei **ss2ss**.

Pentru realizarea unor conexiuni specifice sunt disponibile funcţiile **append** (care efectuează produsul direct), **parallel**, **series**, **feedback** şi **cloop** (sistem cu reacţie unitară). Conexiunile de tip general se realizează apelând **bklbuild** şi **conect**.

Pentru implementarea algoritmilor de calcul polinomial, necesare pentru manipularea modelelor de transfer, menţionăm următoarele. Adunarea polinoamelor se face prin adunarea vectorilor coeficienţilor după egalarea dimensiunilor prin completarea lor corespunzătoare cu zerouri. Pentru înmulţire se utilizează funcţia **conv** iar pentru împărţire întreagă **deconv**. Funcţia **roots** calculează rădăcinile aplicând algoritmul **QR** matricei companion iar funcţia **poly** calculează coeficienţii din rădăcini (pentru argument matriceal calculează polinomul caracteristic). În sfârşit, calculul valorii unui polinom, inclusiv pentru argument matriceal, se efectuează cu funcţia **polyval**.

4.5 Sarcini de lucru

A. În laborator

1. Se va scrie programul MATLAB pentru o versiune proprie a funcţiei de conversie **tf2ss** pentru sisteme SISO şi SIMO. Se vor testa pe exemple numerice semnificative şi se vor compara soluţiile calculate cu programul propriu cu cele oferite de funcţia **tf2ss** din MATLAB.

2. Se va scrie programul MATLAB pentru o versiune proprie a funcţiei de conversie **ss2tf** pentru sisteme SISO şi SIMO folosind funcţii MATLAB de calcul al valorilor proprii şi de calcul polinomial. Se vor testa pe exemple numerice semnificative şi se vor compara soluţiile calculate cu programul propriu cu cele oferite de funcţia **ss2tf** din MATLAB.

3. Fiind date trei sisteme $S_i = (A_i, B_i, C_i, D_i)$, $i = 1 : 3$, să se scrie algoritmii şi programele MATLAB de construcţie a matricelor sistemelor $S = (A, B, C, D)$, rezultate prin interconectarea sistemelor date conform schemelor din fig.4.6.

4. Se vor analiza sursele funcţiilor MATLAB pentru conversii de modele şi calculul conexiunilor şi se vor identifica metodele folosite.

B. Acasă

1. Se vor scrie programe MATLAB proprii pentru implementarea algoritmilor de calcul polinomial necesare manipulării matricelor de transfer.

2. Fiind date trei sisteme S_i, $i = 1 : 3$, prin modelele lor de transfer, se scrie algoritmii şi programele MATLAB de construcţie a matricelor de transfer ale sistemelor rezultate prin interconectarea sistemelor date conform schemelor din fig.4.6.

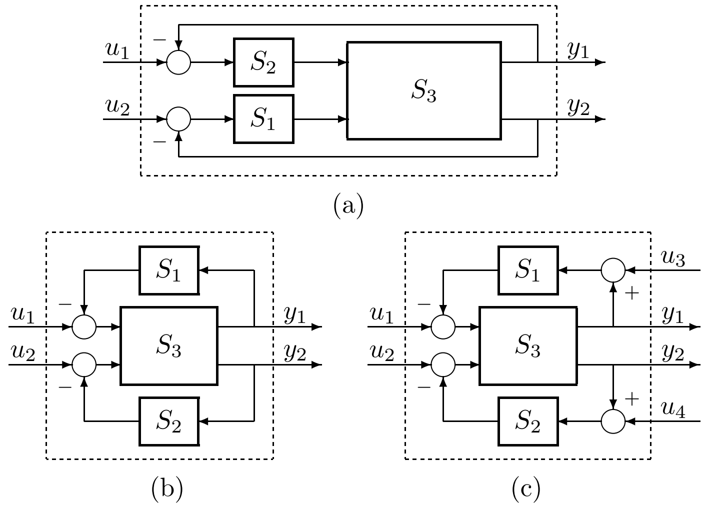

Figura 4.6: Conexiuni pentru exerciţiul 4.2.

3. Se dă sistemul $S = (A, B, C, D)$ ale cărui matrice au structura

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ G_2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} H_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D \end{bmatrix}.$$

   Să se scrie o procedură de reprezentare a lui S sub forma unei conexiuni a) paralel şi b) serie a două sisteme S_1, S_2, *convenabil* definite. *Indicaţie.* Vezi [1].

Bibliografie

[1] **Jora B., Popeea C., Barbulea S.** *Metode de Calcul Numeric în Automatică*, Ed. Enciclopedică, Bucureşti 1996.