Seminar 6.Integrarea ecuațiilor diferențiale

Responsabil:
Mihaela Vasile (mihaela.a.vasile@gmail.com)
Cosmin-Ștefan Stoica (cosmin.stoica9@gmail.com)

Obiective

În urma parcurgerii acestui laborator studentul va fi capabil să:

- rezolve un sistem de ecuatii diferentiale prin diferite metode.
- să rezolve probleme prin metoda gradului maxim de valabilitate
- să diferențieze metodele cu pași separați de cele cu pași legați
- găsească soluția unei ecuații diferențiale prin metoda predictor-corector.

Breviar teoretic

Considerăm :

- intervalul închis $I = [x_0, x_0 + a] \subset \Re,$
- funcţia continuă $f : I \times \Re \to \Re, (x, y) \to f(x, y),$
- ecuaţia diferenţială $P : y' = f(x, y)$

Problema diferenţială de ordinul 1 constă în determinarea $y : I \to R, x \to y(x),$ cu proprietatea că pentru

$\forall\, x \in I$ avem $y'(x) \equiv f(x, y(x)).$

Problema diferenţială cu condiţii iniţiale (problema Cauchy) constă din rezolvarea ecuaţiei $y' = f(x, y),$ impunând *condiţia iniţială* $y(x_0) = \lambda$, cu $\lambda \in R$, dat.

Vom presupune că funcţiile **f** satisfac o *condiţie Lipschitz*

$\forall\, x \in I, \forall\, u, v \in R^n, \exists\, L > 0,$

astfel încât

$|\ f(x, u) - f(x, v)\ | < L \cdot |\ u - v\ |.$

Condiţia Lipschitz asigură *existenţa* şi *unicitatea soluţiei* problemei Cauchy.

Metode Runge-Kutta

O *metodă cu paşi separaţi* determină aproximaţia soluţiei în pasul următor Y_{i+1}, folosind numai informaţia din pasul curent

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_h \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot f_h(x_{i,} y_i); i = 0,1.... \end{cases}$$

O metodă de tip *Runge-Kutta* este o metodă cu paşi separaţi în care funcţia $f_h(x, y)$ se determină astfel

- se împarte intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ în **q** subintervale cu abscisele $x_{ij} = x_{i0} + u_j \cdot h,$ $0 \le u_j \le 1, u_0 = 0, u_q = 1.$ Numărul subintervalelor **q** defineşte *rangul metodei*.

- se calculează aproximaţiile soluţiei în punctele intermediare de forma

$$\begin{cases} y_{i0} = y_i \\ y_{ij} = y_i + h\sum_{i=0}^{j-1} K_{jl} f(x_{il}, y_{il});\ j = 1:q \end{cases}$$

Punctele intermediare x_{ij} şi constantele K_{jl} se obţin din condiţia ca în dezvoltarea Taylor a lui y_{ij} după puterile lui **h**, să coincidă cât mai mulţi termeni cu cei din dezvoltarea Taylor a soluţiei exacte.
Metoda este de ordinul **p**, dacă în cele două dezvoltări termenii coincid până la $\mathbf{h^p}$ inclusiv.
Metoda Runge-Kutta de ordin 2 este

$$\begin{cases} y_{i0} = y_i \\ y_{i1} = y_i + hu_1 f(x_{i0}, y_{i0}) \\ y_{i2} = y_i + h\left(1 - \frac{1}{2u_1}\right) f(x_{i0}, y_{i0}) + \frac{h}{2u_1} f(x_{i1}, y_{i1}) \end{cases}$$

Particularizarea valorii lui $u_1 \in [0, 1]$ conduce la:

- *metoda tangentei ameliorate*, cu $u_1 = \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} x_{i1} = x_{i0} + u_1 h = x_i + \frac{h}{2} \\ y_{i1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_{i1}, y_{i1}) \end{cases}$$

- *metoda Euler-Cauchy*, cu $u_1 = 1$

$$\begin{cases} x_{i1} = x_i + h \\ y_{i1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i1}, y_{i1})] \end{cases}$$

- *metoda Heun* pentru $u_1 = \frac{2}{3}$

$$\begin{cases} x_{i1} = x_i + \frac{2}{3}h \\ y_{i1} = y_i + \frac{2}{3}hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} f(x_i, y_i) + \frac{3h}{4} f(x_{i1}, y_{i1})] \end{cases}$$

In mod uzual se utilizează o metodă de tip Runge-Kutta de ordin 4 de forma:

$K_1 = h \cdot f(x_i, y_i),$

$K_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right),$

$$K_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right),$$
$$K_4 = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + K_3\right), \qquad ,$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$$

Metode multipas

Metodele cu *paşi legaţi* (sau *metodele multipas*) folosesc mai multe informaţii iniţiale, deci sunt mai precise.
O *metodă explicită*, cunoscută ca *metoda Adams-Bashforth* are forma:

$$y_{k+1} = y_k + h\sum_{j=0}^{r} c_j \nabla^j f_k$$

O *metoda implicită (Adams-Moulton*) are forma:

$$y_{k+1} = y_k + h\sum_{j=0}^{r} d_j \nabla^j f_{k+1}$$

Dezvoltând diferenţele regresive se obţin recurenţe liniare:

$$y_k = \sum_{j=1}^{r} a_j y_{k-j} + h\sum_{j=0}^{r} \beta_j f_{k-j}$$

O metodă explicită are $\beta_0 = 0$ în timp ce metodele implicite se caracterizează prin $\beta_0 \neq 0$.
Pentru determinarea coeficienţilor α_j, β_j vom impune ca relaţia să reprezinte soluţia exactă pentru polinoame de grad cât mai ridicat. Se obţine sistemul

$$\sum_{j=1}^{r} a_j = 1,$$
$$\sum_{j=1}^{r} a_j (r-j) + \sum_{j=0}^{r} \beta_j = r,$$
...
$$\sum_{j=1}^{r} a_j (r-j)^p + p\sum_{j=0}^{r} \beta_j (r-j)^{p-1} = r^p.$$

Pentru $r = 2$, metoda Adams-Bashforth este $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(3f_k - f_{k-1}\right)$. Pentru $r = 3$, se obţine: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\left(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}\right)$,
Metodele implicite Adams-Moulton corespunzătoare sunt

$r = 2 \quad : y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\left(f_{k+1} + 8 f_k - f_{k-1}\right),$

$r = 3 : y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(9 f_{k+1} + 19 f_k - 5 f_{k-1} + f_{k-2}\right).$

Metodele implicite asigură aproximaţii mai bune ale soluţiilor decât metodele explicite. Aplicarea unei metode implicite conduce la o ecuaţie neliniară de forma

$y_{k+1} = hC_1 f(x_{k+1}, y_{k+1}) + C_2..$

Rezolvarea ecuaţiei neliniare se face de obicei prin *metoda aproximaţiilor succesive*.
Metoda *predictor-corector* îmbină aplicarea unei metode explicite cu una implicită. Metoda explicită calculează o *predicţie* a soluţiei, iar metoda implicită - o *corecţie*, făcând o singură iteraţie, cu valoarea de pornire, predicţia oferită de metoda explicită.
Astfel metoda explicită Adams-Bashforth de ordinul 3 furnizează *predicţia*

$y_{k+1}^{(p)} = y_k + \frac{h}{12}\left[23 \cdot f_k - 16 \cdot f_{k-1} + 5 \cdot f_{k-2}\right],$

iar formula implicită Adams-Moulton de ordinul 2 corectează această valoare

$y_{k+1}^{(c)} = y_k + \frac{h}{12}\left[5 \cdot y_{k+1}^{(p)} + 8 \cdot y_k - y_{k-1}\right].$

Probleme rezolvate

1. Calculaţi coeficienţii formulelor explicite şi implicite de tip Adams, de ordin 3.

Soluție

Metoda explicită Adams-Bashforth de ordin 3:

$y_{k+1} = y_k + h\left[\beta_1 f_k + \beta_2 f_{k-1} + \beta_3 f_{k-2}\right]$.Alegem: $x_{k-2} = 0, x_{k-1} = 1, x_k = 2, x_{k+1} = 3, h = 1$

$y = 1 \Rightarrow f = y' = 0 \Rightarrow 1 = 1(A)$

$y = x \Rightarrow f = y' = 1 \Rightarrow 3 = 2 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$

$y = x^2 \Rightarrow f = y' = 2x \Rightarrow 3^2 = 2^2 + (\beta_1 * 2 * 2 + \beta_2 * 2 * 1 + \beta_3 * 2 * 0) \Rightarrow 4\beta_1 + 2\beta_2 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\beta_2$

$y = x^3 \Rightarrow f = y' = 3x^2 \Rightarrow 3^3 = 2^3 + (\beta_1 * 3 * 4 + \beta_2 * 3 * 1 + \beta_3 * 3 * 0) \Rightarrow 12\beta_1 + 3\beta_2 = 19 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15 - 6\beta_2 + 3\beta_2 = 19 \Rightarrow -3\beta_2 = 4 \Rightarrow \beta_2 = -\frac{4}{3} \Rightarrow \beta_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\frac{4}{3} = \frac{23}{12} \Rightarrow \beta_3 = \frac{5}{12}$

$Atunci : y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\left[23 f_k - 16 f_{k-1} + 5 f_{k-2}\right]$

Metoda explicită Adams-Moulon de ordin 3:

$y_{k+1} = y_k + h\left[\beta_1 f_{k+1} + \beta_2 f_k + \beta_3 f_{k-1} + \beta_4 f_{k-2}\right].$

Alegem: $x_{k-2} = 0, x_{k-1} = 1, x_k = 2, x_{k+1} = 3, h = 1$

$y = 1 \Rightarrow f = y' = 0 \Rightarrow 1 = 1(A)$

$y = x \Rightarrow f = y' = 1 \Rightarrow 3 = 2 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1$

$y = x^2 \Rightarrow f = y' = 2x \Rightarrow 3^2 = 2^2 + (\beta_1 * 2 * 3 + \beta_2 * 2 * 2 + \beta_3 * 2 * 1 + \beta_4 * 2 * 0)$

$\Rightarrow 6\beta_1 + 4\beta_2 + 2\beta_3 = 5 \Rightarrow \beta_3 = \frac{5}{2} - 2\beta_2 - 3\beta_1$

$y = x^3 \Rightarrow f = y' = 3x^2 \Rightarrow 3^3 = 2^3 + (\beta_1 * 3 * 9 + \beta_2 * 3 * 4 + \beta_3 * 3 * 1 + \beta_4 * 3 * 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow 27\beta_1 + 12\beta_2 + 3\beta_3 = 19 \Rightarrow 18\beta_1 + 6\beta_2 = \frac{23}{2} \Rightarrow \beta_2 = \frac{23}{12} - 3\beta_1$

$y = x^4 \Rightarrow f = y' = 4x^3 \Rightarrow 3^4 = 2^4 + (\beta_1 * 4 * 27 + \beta_2 * 4 * 8 + \beta_3 * 4 * 1 + \beta_4 * 4 * 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow 108\beta_1 + 32\beta_2 + 4\beta_3 = 65 \Rightarrow 96\beta_1 + 24\beta_2 = 55 \Rightarrow \beta_1 = \frac{9}{24}$

$\Rightarrow \beta_2 = \frac{23}{12} - \frac{27}{24} = \frac{19}{24} \Rightarrow \beta_3 = \frac{5}{2} - \frac{38}{24} - \frac{27}{24} = -\frac{5}{24}$

$\Rightarrow \beta_4 = 1 - \frac{9}{24} - \frac{19}{24} + \frac{5}{24} = \frac{1}{24}$

$Atunci: y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left[9 f_{k+1} + 19 f_k - 5 f_{k-1} + f_{k-2}\right]$

2.Pentru rezolvarea problemei Cauchy, se utilizează două formule una explicită și una implicită:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h\sum_{j=0}^{2} \beta_j f_{k-j} = y_{k-1} + h\left[\beta_0 f_k + \beta_1 f_{k-1} + \beta_2 f_{k-2}\right]$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h\sum_{j=0}^{2} \beta_j f_{k+1-j} = y_{k-1} + h\left[\beta_0 f_{k+1} + \beta_1 f_k + \beta_2 f_{k-1}\right].$$

a)Determinați coeficienții β astfel încât formulele să aibă valabilitate maximă.
b)Definiți o metodă predictor corector cu aceste formule.

Soluție:

Prima formulă: $y_{k+1} = y_{k-1} + h\left[\beta_0 f_k + \beta_1 f_{k-1} + \beta_2 f_{k-2}\right]$

Alegem: $x_{k-2} = 0, x_{k-1} = 1, x_k = 2, x_{k+1} = 3, h = 1$

$y = 1 \Rightarrow f = y' = 0 \Rightarrow 1 = 1(A)$

$y = x \Rightarrow f = y' = 1 \Rightarrow 3 = 1 + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) \Rightarrow \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 2$

$y = x^2 \Rightarrow f = y' = 2x \Rightarrow 3^2 = 1^2 + (\beta_0 * 2 * 2 + \beta_1 * 2 * 1 + \beta_2 * 2 * 0) \Rightarrow 4\beta_0 + 2\beta_1 = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta_1 = 4 - 2\beta_0$

$y = x^3 \Rightarrow f = y' = 3x^2 \Rightarrow 3^3 = 1^3 + (\beta_0 * 3 * 4 + \beta_1 * 3 * 1 + \beta_2 * 3 * 0) \Rightarrow 12\beta_0 + 3\beta_1 = 26 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12\beta_0 + 12 - 6\beta_0 = 26 \Rightarrow 6\beta_0 = 14 \Rightarrow \beta_0 = \frac{7}{3} \Rightarrow \beta_1 = 4 - 2\frac{7}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \beta_2 = \frac{1}{3}$

$Atunci: y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}\left[7 f_k - 2 f_{k-1} + f_{k-2}\right]$

A doua formulă: $y_{k+1} = y_{k-1} + h[\beta_0 f_{k+1} + \beta_1 f_k + \beta_2 f_{k-1}]$
Alegem: $x_{k-2} = 0, x_{k-1} = 1, x_k = 2, x_{k+1} = 3, h = 1$

$y = 1 \Rightarrow f = y' = 0 \Rightarrow 1 = 1(A)$
$y = x \Rightarrow f = y' = 1 \Rightarrow 3 = 1 + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) \Rightarrow \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 2 \Rightarrow \beta_0 = 2 - \beta_1 - \beta_2$
$y = x^2 \Rightarrow f = y' = 2x \Rightarrow 3^2 = 1^2 + (\beta_0 * 2 * 3 + \beta_1 * 2 * 2 + \beta_2 * 2 * 1) \Rightarrow 6\beta_0 + 4\beta_1 + 2\beta_2 = 8$
$\Rightarrow 3\beta_0 + 2\beta_1 + \beta_2 = 4 \Rightarrow 6 - 3\beta_1 - 3\beta_2 + 2\beta_1 + \beta_2 = 4 \Rightarrow \beta_1 + 2\beta_2 = 2 \Rightarrow \beta_1 = 2 - 2\beta_2$
$y = x^3 \Rightarrow f = y' = 3x^2 \Rightarrow 3^3 = 1^3 + (\beta_0 * 3 * 9 + \beta_1 * 3 * 4 + \beta_2 * 3 * 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 27\beta_0 + 12\beta_1 + 3\beta_2 = 26 \Rightarrow 54 - 27\beta_1 - 27\beta_2 + 12\beta_1 + 3\beta_2 = 26 \Rightarrow 15\beta_1 + 24\beta_2 = 28 \Rightarrow$
$\Rightarrow 30 - 30\beta_2 + 24\beta_2 = 28 \Rightarrow 6\beta_2 = 2 \Rightarrow \beta_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta_1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \beta_0 = \frac{1}{3}$

$Atunci: y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}[f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1}]$

b)O metodă predictor corector cu aceste formule.
Formula explicită furnizează predicția:

$y_{k+1}^{(p)} = y_{k-1} + \frac{h}{3}[7f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2}],$

Iar formula implicită , corecția:

$y_{k+1}^{(c)} = y_{k-1} + \frac{h}{3}\left[y_{k+1}{}^{(p)} + 4y_k + y_{k-1}\right].$

3.Să se rezolve problema Cauchy **y' = 2x(1 + y)**, **y(0) = 0** pentru valori mici ale lui x, folosind metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard.

Soluţie. Pentru o problema Cauchy de forma **y' = f(x, y)**, **y(0) = 0**, metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard constă în determinarea şirului de funcţii y_n, după formula de recurenţă, dată pe cazul general: $y_0(0) = 0$,

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x f(t, y_n(t))dt .$$

În cazul problemei din enunţ avem, metoda Picard este:

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x 2t(1 + y_n(t))dt \text{ , sau } y_{n+1}(x) = x^2 + \int_0^x 2ty_n(t)dt \text{ , } n \geq 0 .$$

Dacă vom lua valori pentru **n**, vom avea:

$y_1(x) = x^2$,

$$y_2(x) = x^2 + \int_0^x 2t^3 dt = x^2 + \frac{x^4}{2} \text{ , } y_3(x) = x^2 + \int_0^x 2t\left(t^2 + \frac{t^4}{2}\right)dt = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} .$$

Cum $x \ll 1$, vom avea $x^6 \cong 0$. Deci, soluţia ecuaţiei Cauchy se poate scrie sub forma: $y(x) \cong x^2 + \frac{x^4}{2}$.

Soluţia exactă a ecuaţiei este $y_e(x) = e^{x^2} - 1$.

4. Fie formula aproximativă de integrare : $y_k = y_{k-2} + h/2(a_2 f_{k-2} + a_1 f_{k-1} + a_0 f_k)$. Să se determine a_2, a_1, a_0.

Rezolvare
Prin metoda gradului de valabilitate

$x_i = i$; $h=1$;
$y_k = y(x_k)$;
$y' = f(x,y)$;

$y_k = y_{k-2} + 1/2(a_2 f_{k-2} + a_1 f_{k-1} + a_0 f_k)$;

$y=1 \Rightarrow f=0$; $1=1+0$ (A);
$y=x \Rightarrow f=1$; $k=k-2+ ½(a_2 + a_1 + a_0)$
$y=x^2 \Rightarrow f=2x$; $k^2 = (k-2)^2 + ½(a_2\, 2(k-2) + a_1 2(k-1) + a_0 2k)$;
$y=x^3 \Rightarrow f=3x^2$; $k^3 = (k-2)^3 + ½(a_2 3(k-2)^2 + a_1 3(k-1)^2 + a_0 3k^2)$;

Indicatie : Se ia k=0. Determinăm $a_0=1$; $a_1=4$; $a_2=1$;

Probleme propuse

1. a) Calculaţi coeficienţii formulelor explicite şi implicite de tip Adams-Bashforth, de ordin 2
b) Definiţi cu cele două formule o metodă predictor-corector.
c) Scrieţi o funcţie Matlab care implementează metoda predictor-corector.
2. 4. Pentru rezolvarea problemei Cauchy se foloseşte mai întâi metoda Runge-Kutta de ordin 4, iar soluţiile furnizate servesc ca valori iniţiale pentru o metodă multipas explicită de ordin 2.
a) Scrieţi relaţiile folosite în ambele situaţii
b) Scrieţi funcţii Matlab care implementează aceste metode
3. Pentru rezolvarea problemei diferenţiale **$y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$** se foloseşte metoda Runge-Kutta de ordin 4 şi rang 4.
a) Scrieţi relaţiile corespunzătoare.
b) Scrieţi relaţiile pentru un sistem de două ecuaţii diferenţiale.
c) scrieţi o funcţie Matlab care integrează sistemul de ecuaţii diferenţialeprin metoda Runge-Kutta, având semnătura:
function [y1,y2]=RK44(a,b,n,'f1','f2',y10,y20)

4. Pentru problema diferenţială:
$y' = f(y, t)$
$y(t_0) = y_0$
Se consideră formula aproximativă de integrare:

$y_{k+1} = y_k + h(\alpha_1 y'_{k+1} + \alpha_0 y'_k) + h^2(\beta_1 y''_{k+1} + \beta_0 y''_k)$

Determinaţi **α_0, α_1, β_0, β_1**, astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate cel mai ridicat.

5. Pentru integrarea problemei diferenţiale Cauchy se foloseşte mai întâi o metodă cu paşi separaţi de ordinul 2, a cărei soluţii reprezintă aproximaţii iniţiale pentru o metodă multipas explicită Adams-Bashforth de ordin 3.

a) Stabiliţi formulele care definesc metoda tangentei ameliorate:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{K_1 + K_2}{2}$$

$$K_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right)$$

b) Stabiliţi coeficienţii metodei Adams-Bashforth de ordin 3

c) Scrieţi două funcţii Matlab pentru implementarea celor două formule. Se dau: **x0,y0,a, n, f.**