Laborator 6

Integrarea ecuaţiilor diferenţiale

Responsabili:
1. Surdu Cristina(anacristinasurdu@gmail.com)
2. Ştirbăţ Bogdan(bogdanstirbat@yahoo.com)

Obiective

În urma parcurgerii acestui laborator elevul va fi capabil să înţeleagă şi să folosească diferite metode de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale, să compare diferite metode de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale, din punctul de vedere al avantajelor şi dezavantajelor acestor metode.

Breviar teoretic

Considerăm date:
- $I = [a, b] \subset R$, un interval închis;
- $f : I * R \to R$ o funcţie continuă care asociază fiecărui punct (x, y) din domeniul de definiţie câte un număr real $f(x, y)$;
- o ecuaţie diferenţială: $y' = f(x, y)$.

Definim problema diferenţială de ordinul 1 astfel: fiind date I, f, să se determine funcţia $y : I \to R$ astfel încât $\forall x \in I$, avem: $y'(x) = f(x, y(x))$.

Problema diferenţială cu condiţii iniţiale (problema Cauchy) constă în rezolvarea ecuaţiei: $y' = f(x, y)$ astfel încât $y(x_0) = \lambda$, unde $\lambda \in R$ face parte din datele problemei.

O funcţie f satisface o condiţie Lipschitz dacă $\forall x \in I$, $\forall u, v \in R^n$, $\exists L > 0$ astfel încât $|f(x, u) - f(x, v)| < L|u - v|$. Condiţia Lipschitz asigură existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy.

Metoda constructivistă Piccard construieşte:

$$y(x) = \lambda + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)dt$$

Metoda nu e aplicabilă mereu (primitiva funcţiei f nu există sau e foarte greu de găsit). De aceea se apelează la diferite tehnici de integrare numerică. Aceste tehnici oferă valori aproximative ale soluţiei într-o diviziune a lui I, şi reprezintă subiectul acestui laborator.

Metode cu paşi separaţi

Metoda Euler

Se împarte intervalul $I = [x_0; x_0 + a]$ în N intervale echidistante de lungime $h = \frac{b-a}{N}$; se aproximează valoarea funcţiei y în punctele $x_i = x_0 + i * h$, astfel:

$$y_0 = \lambda$$

$$y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i), i = 0 : N - 1$$

Metode de tip Runge-Kutta

Se procedează astfel: -se împarte intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ în q subintervale cu abscisele: $x_{ij} = x_{i0}u_jh$, $0 \leq u_j \leq 1$, $u_0 = 0$, $u_q = 1$. Numărul subintervalelor q determină rangul metodei, iar numărul p determină ordinul metodei (medoda este de ordin p dacă dezvoltarea lui $y(x)$ în serie Taylor este egală cu dezvoltarea conform metodei Runge-Kutta, până la gradul p).

Considerând $q = 2$, $p = 2$, $u_1 = \frac{1}{2}$, obţinem metoda tangentei ameliorate:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))]$$

Frecvent, se foloseşte o metodă Runge-Kutta de ordinul 4:

$$K_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2})$$

$$K3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2})$$

$$K_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + K3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$$

Metodele cu paşi separaţi sunt utilizte frecvent datorită simplităţii lor şi faptului că necesită puţine informaţii iniţiale. Ele au dezavantajul lipsei de precizie. Metodele cu paşi legaţi (sau multipas) folosesc mai multe informaţii iniţiale, deci sunt mai precise.

Există două tipuri de metode: metode explicite şi metode implicite. O formulă generalizată este:

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j \cdot y_{k-j} + h \sum_{j=-1}^{r} \beta_j \cdot f_{k-j}$$

Dacă $\beta_{-1} = 0$, atunci metoda este explicită; altfel, este implicită.

Prin îmbinarea unei metode explicite cu una implicite se obţin metode predictor-corector: prin metoda explicită se prezice o valoare pentru y_{k+1}, iar această valoare se corecteză prin metoda implicită. Astfel, putem aplica metoda Adams-Bashforth de ordinul 3 pentru a calcula y_{k+1}^{p} (y_{k+1} prezis, de unde provine superscriptul (p)):

$$y_{k+1}^{(p)} = y_k + \frac{h}{12} \cdot [23 \cdot f_k - 16 \cdot f_{k-1} + 5 \cdot f_{k-2}]$$

Mai departe, putem corecta acest $y_{k+1}^{(p)}$, folosind metoda implicită Adams-Moulton de ordin 2:

$$y_{k+1}^{(c)} = y_k + \frac{h}{12}[5 \cdot y_{k+1}^{(p)} + 8 \cdot y_k - y_{k-1}]$$

Observaţie. Pentru a trimite o funcţie ca parametru unei alte funcţii, funcţia parametru trebuie să fie precedată de semnul '@'. Exemplu:

```
function y = f( parametru1, @parametru2)
    y = parametru2(parametru1);
endfunction
```

Aplicaţii

1. a) [2 puncte] Să se scrie o funcţie (Euler.m) care să rezolve o ecuaţie diferenţială, folosind metoda Euler. Această funcţie va primi ca date de intrare:
   $x0$, capătul stâng al intervalului I;
   a, lungimea acestui interval;
   n, numărul de puncte în care se evaluează funcţia yx;
   $y0 = \lambda$;
   f este funţia de integrat.
Funcţia are ca rezultat vectorul y.

b) [1 punct] Scrieţi o funţie în limbajul de programare Matlab (Euler2) care integrează un sistem de ecuaţii diferenţiale, folosindu-vă de funcţia de la punctul a). Datele de intrare ale funcţiei sunt:
   $x0$, capătul stâng al intervalului I;
   a, lungimea acestui interval;
   n, numărul de puncte în care se evaluează funcţia $y(x)$;
   $y10 = \lambda_1$, adică condiţia iniţială a primei ecuaţii;
   $y20 = \lambda_2$, adică condiţia iniţială a celei de-a doua ecuaţii;
   f1 este funţia de integrat a primei ecuaţii;
   f2 este funţia de integrat a celei de-a doua ecuaţii.
Funcţia va avea ca rezultat vectorii $y1$ şi $y2$, adică soluţia primei, respectiv celei de-a doua ecuaţii.

2) [2 puncte] Scrieţi o funcţie care să rezolve o ecuaţie diferenţială folosind metoda tangentei ameliorate. Functia va avea ca date de intrare:
   a, b: capete de integrare;
   n, numărul de puncte;
   f, funcţia de integrat;
   y0, adică condiţia iniţială.
   Rezultatul funcţiei va fi vectorul y.

3) a) [2 puncte] Implementaţi o funcţie în limbajul de programare Matlab care să rezolve o ecuaţie diferenţială, folosind algoritmul Runge-Kutta de ordin 4.Date de intrare:
   a, b: intervalul de integrare;
   n: numărul de puncte;
   y0: condiţia iniţială
   f: funcţia de integrat.
Date de ieşire: vectorul y, rezultatul algoritmului.

b) [1 punct] Folosind funcţia de la punctul anterior, mai scrieţi o funcţie care să rezolve un sistem de 2 ecuaţii diferenţiale. Ambele ecuaţii se rezolvă pe invervalul delimitat de parametrii a şi b, într-un număr n de puncte; f1, f2 reprezintă prima funcţia primului sistem, respectiv celui de-al doilea; y10, y20 reprezinta condiţia iniţială a primei ecuaţii, respectiv celei de-a doua. Funcţia va avea ca rezultat vectorii y1 şi y2 (soluţia primei ecuaţii, respectiv celei de-a doua).

4)[2 puncte] Scrieţi o funcţie Matlab care să rezolve o ecuaţie diferenţială folosind metoda predictor-corector. Valorile iniţiale ale soluţiei se vor aproxima, folosind una din metodele implementate anterior. Date de intrare:

a, b: intervalul de integrare;

n: numărul de puncte;

y0: condiţia iniţială (parametru necesar aproximării valorilor iniţiale ale soluţiei;

f: funcţia de integrat.