Seminar 5.Integrare numerica

Responsabil:
Mihaela Vasile (mihaela.a.vasile@gmail.com)
Cosmin-Ştefan Stoica (cosmin.stoica9@gmail.com)

Obiective

În urma parcurgerii acestui seminar , studentul va fi capabil să:

- utilizeze metode Newton-Cotes și gaussiene pentru a calcula aproximativ valoarea integralei unei funcții continue f:[a,b]$\rightarrow$R .

-prezinte diferențele dintre aceste metode.

Breviar teoretic

Ne propunem să calculăm în mod aproximativ valorile $I[f] = \int_a^b f(x)dx$ şi $D[f] = f^{(p)}(x_0)$, în condiţiile în care:

- funcţia f este continuă pe $[a, b] : f \in C([a, b])$
- primitiva F nu este cunoscută
- funcţia f este cunoscută numai prin valorile $f(x_i)$ pe care le ia într-un număr restrâns de puncte $x_i,\ i = 0 : N$

Definim o *metodă aproximativă de integrare* ca

$$I_N[f] = \sum_{i=0}^{N} A_{iN} f(x_{iN})$$

Metoda aproximativă de integrare este *convergentă* dacă

$$\lim_{N\to\infty} \left| I[f] - I_N[f] \right| = 0 .$$

Metode Newton-Cotes

Pentru o formulă de integrare aproximativă putem scrie:

$$\int_a^b f(x) \cdot w(x)dx = \sum_{i=0}^{N} A_{iN} f(x_{iN}) + R_N$$

In metodele de tip Newton-Cotes abscisele x_{iN} se aleg de obicei *echidistante* în intervalul $[a, b]$

$$x_{iN} = a + i \cdot \frac{b - a}{N} i = 0 : N .$$

Coeficienţii a_{iN} se determină impunând ca formula aproximativă să fie exactă $(R = 0)$, dacă f aparţine unei anumite clase de funcţii (de exemplu polinoame de grad $\le N$, $f \in \Pi_N$)

Aproximând funcţia prin polinomul ei de interpolare Lagrange obţinem:

$$A_{iN} = \int_a^b l_{iN}(x) \cdot w(x)dx$$

Expresia erorii în metodele Newton-Cotes se obţine integrând expresia erorii polinomului de interpolare:

$$R_N \le \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \int_a^b |(x-x_0)\dots(x-x_N)|\, w(x)dx$$

Datorită instabilităţii interpolării polinomiale se folosesc polinoame de interpolare cu grad mic. Astfel pentru $N = 1$ se obţine *formula trapezelor:*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot [f(a) + f(b)] - \frac{h^3 f''(\xi)}{12}.$$

Pentru $N = 2$ se obţine *formula lui Simpson:*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{h^5 f^{iv}(\xi)}{90}.$$

Aceste formule folosesc puţine puncte ceea ce ne determină să aproximăm funcţia f, local, pe intervale

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx.$$

Se obţin în acest fel

- *formula compusă a trapezelor*

$$T = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) \right] \text{ cu } h = \frac{b-a}{N}$$

- *formula compusă Simpson*

$$S = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{N} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_{2i}) \right], \text{ cu } h = \frac{b-a}{2N},\ x_i = a + i \cdot h$$

Metode Gaussiene

Metodele de tip Newton-Cotes au *gradul de valabilitate* N (sunt exacte pentru polinoame până la gradul N inclusiv).

Dacă în formula aproximativă de integrare:

$$\int_a^b f(x) \cdot w(x)dx \cong \sum_{i=0}^{N} A_{iN} f(x_{iN})$$

se aleg nodurile x_{iN} ca rădăcini ale unui polinom ortogonal, definit în mod unic în raport cu $a,\ b$ şi funcţia pondere $w(x)$, gradul de valabilitate al formulei devine $2N+1$.

Coeficienţii A_{iN} se vor determina impunând ca formula să aibă grad de valabilitate N (să fie exactă pentru funcţiile $1,\ x, \dots, x^N$) şi ne conduce la rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare.

Polinoame ortogonale

Poligon ortogonal	Interval	Relaţii de recurenţă	w(x)	$P_0(x)$	$P_1(x)$
Legendre	[-1,1]	$(n+1)P_{n+1}-(2n+1)xP_n+nP_{n-1}=0$	1	1	x
Cebâşev ordin1	(-1,1)	$P_{n+1}-2xP_n+P_{n-1}=0$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	1	x
Cebâşev Ordin2	[-1,1]	$P_{n+1}-2xP_n+P_{n-1}=0$	$\sqrt{1-x^2}$	1	2x
Laguerre	[0,∞)	$P_{n+1}-(2n+1-x)P_n+n^2P_{n-1}=0$	e^{-x}	1	1-x
Hermite	(-∞,∞)	$P_{n+1}-2xP_n+2nP_{n-1}=0$	e^{-x^2}	1	2x

Pentru polinoamele ortogonale uzuale, se obţin următoarele formule de integrare:

- *Cebâşev ordin 1*

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{N+1}\sum_{i=0}^{N}f\left(\cos\frac{(2i+1)\pi}{2N+2}\right)$$

- *Legendre*

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\sum_{i=0}^{N}A_{iN}f(x_{iN}),\ A_{iN}=\frac{2\left(1-x_{iN}^2\right)}{N^2L_{N-1}^2(x_{iN})}$$

- *Laguerre*

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x}f(x)dx=\sum_{i=0}^{N}A_{iN}f(x_{iN}),\ A_{iN}=\frac{x_{iN}}{(n+1)^2G_{N+1}^2(x_{iN})}$$

- *Hermite*

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}f(x)dx=\sum_{i=0}^{N}A_{iN}f(x_{iN}),\ A_{iN}=\frac{2^{N+1}N!\sqrt{\pi}}{H_{N+1}^2(x_{iN})}.$$

Metoda Romberg

Se formează matricea:

$$\begin{matrix} I_{11} & & & \\ I_{21} & I_{22} & & \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & \\ & \dots & & \\ I_{N1} & I_{N2} & & I_{NN} \end{matrix}$$

în care prima coloană $I_{11}, I_{21}, \ldots, I_{N1}$ reprezintă estimările integralelor calculate cu formula compusă a trapezelor considerând $2^0, 2^1, \ldots, 2^{N-1}$ intervale. I_{N1} poate fi obţinut prin recurenţă din $I_{N-1,1}$ cu formula:

$$I_{N,1} = \frac{1}{2}\left[I_{N-1,1} + \frac{b-a}{2^{N-1}} \sum_{i=1,\Delta i=2}^{2^N-1} f\left(a + \frac{b-a}{2^N} i\right)\right]$$

Elementele din coloana j se calculează cu relaţia de recurenţă:

$$I_{k,j} = \frac{4^{j-1} I_{k+1,j-1} - I_{k,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

Fiecare coloană converge către I, cu atât mai rapid cu cât este situată mai la dreapta. Pentru o coloană j, calculul iterativ este oprit în momentul în care

$$\left|I_{k,j} - I_{k-1,j}\right| < \varepsilon \cdot \left|I_{k,j}\right|$$

Metoda seriei generatoare

Se obţine prin integrarea celei de-a treia formulă de interpolare Newton-Gregory:

$$\int_{x_0}^{x_{-1}} f(x)dx = h\left(f_0 + c_1\nabla f_0 + \ldots + c_k\nabla^k f_0\right) + c_{k+1}h^{k+2}f^{(k+1)}(\xi)$$

în care coeficienţii $c_m = \int_0^1 \frac{u(u+1)\ldots(u+m-1)}{m!}du$ se calculează cu relaţia de recurenţă:

$$c_m + \frac{c_{m-1}}{2} + \ldots + \frac{c_0}{m+1} = 1, \qquad m=0,1,2,\ldots$$

Probleme rezolvate

1. a) Caculaţi integrala prin Simpson în 3 puncte=
N=1;(fără capetele intervalului)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx; h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} = \frac{\pi}{4};$$

$$I = \frac{h}{3}\left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$x_i = a + ih = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4};$$

b) Se dă f:[a,b]X[c,d] -> R; $h = \frac{b-a}{2N}$;

$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy;$ f-continuă => $I = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy;$

$$I=\int_a^b \frac{h}{3}\left(f(x,c)+f(x,d)+4f\left(x,\frac{d+c}{2}\right)\right)dx=$$

$$=\frac{d-c}{6}\frac{b-a}{6}[f(a,c)+f(b,d)+4f\left(\frac{b+a}{2},c\right)+f(a,d)+(b,d)+4f\left(\frac{b+a}{2},d\right)+$$

$$+4f\left(a,\frac{d+c}{2}\right)+4f\left(b,\frac{d+c}{2}\right)+16f\left(\frac{b+a}{2},\frac{d+c}{2}\right)]$$

2. Se consideră integrala

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

Determinaţi formula de integrare: $I\approx a_1\cdot f(x_1)+a_2\cdot f(x_2)+a_3\cdot f(x_3)$. Precizaţi gradul de valabilitate al formulei.

Soluţie. În formula de integrare gaussiană:

$$\int_a^b f(x)\cdot w(x)\,dx \cong \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot f(x_i)$$

nodurile x_i sunt determinate din condiţia de ortogonalitate a polinomului:

$$\pi(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

cu un polinom oarecare de grad mai mic decât $\pi(x)$, în particular x^k:

$$\int_a^b \pi(x)\cdot w(x)\cdot x^k\,dx=0,\qquad k=0:n-1$$

În cazul nostru: $\pi(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)=x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+c$.

Pentru prima formulă:

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3+ax^2+bx+c\right)\cdot x^k\,dx=0,\qquad k=0:2$$

care conduce la sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases}\frac{2}{3}a+2c=0\\ \frac{2}{3}b=-\frac{2}{5}\\ \frac{2}{5}a+\frac{2}{3}c=0\end{cases}$$

cu soluţia

$$a=c=0,\quad b=-\frac{3}{5}$$

$$x^3-\frac{3}{5}x=0$$

$$x_1=-\sqrt{\frac{3}{5}},\quad x_2=0,\quad x_3=\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Pentru determinarea coeficienților a_1,a_2,a_3:

$f=1:\qquad \int_{-1}^{1}dx=a_1+a_2+a_3=2$

f = x : $$\int_{-1}^{1} x\,dx = -\sqrt{\frac{3}{5}}a_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}a_3 = 0$$

f = x² : $$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{3}{5}a_1 + \frac{3}{5}a_3 = \frac{2}{3}$$

cu soluţiile $a_1 = a_3 = \frac{5}{9}, \quad a_2 = \frac{8}{9}$.

Aşadar:

$$I \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Gradul de valabilitate al formulei este 5 .

3. Calculați aproximativ integrala:

$$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}dx .$$

Soluție:

Facem schimbarea de variabilă t = 2x-1 $\Rightarrow x = \frac{t+1}{2}, x = 0 \Rightarrow t = -1, x = 1 \Rightarrow t = 1.$

Atunci , integrala devine: $\int_{-1}^{1} \frac{(\frac{t+1}{2})^4}{\sqrt{(\frac{t+1}{2})(1-\frac{t+1}{2})}} \frac{dt}{2} = \int_{-1}^{1} \frac{(\frac{t+1}{2})^4}{\sqrt{(t+1)(1-t)}} dt = \int_{-1}^{1} \frac{(\frac{t+1}{2})^4}{\sqrt{1-t^2}} dt .$

f(x) = $(\frac{t+1}{2})^4$;w(x)= $\sqrt{1-t^2}$;a=-1,b=1

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right).$$

Pentru ca f are gradul 4, alegem n=3, iar formula de integrare va avea gradul de valabilitate 5.

$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Atunci:

$$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}\right)^4\right].$$

4. Calculaţi pasul h astfel încât aproximând

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

prin metoda trapezelor, eroarea să fie mai mică decât $\varepsilon = \beta \cdot 10^{-t}$.

Soluţie. Formula generală a restului în metoda trapezelor este:

$$|R(f)| \le \frac{(b-a)^3 M}{12n^2} \quad \text{unde} \quad M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Dacă considerăm lungimea intervalului pe care integrăm şi maximul funcţiei, avem

$M = 1$

$b - a = nh$

de unde se obţine formula simplificată pentru rest.

$$|R(f)| \le \frac{(b-a)n^2h^2}{12n^2}$$

Dar $b-a = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |R(f)| \le \frac{\pi h^2}{24} < \varepsilon$ sau

$$\frac{\pi h^2}{24} \le \beta \cdot 10^{-t} \Rightarrow h^2 \le \frac{24\beta \cdot 10^{-t}}{\pi}$$

Deci, pasul de integrare va fi: $h \le \sqrt{\frac{24\beta}{\pi}} \cdot 10^{-\frac{t}{2}}$.

Numeric, dacă $\beta = 1{,}3$ şi $t = 6$ atunci $h \cong 3 \cdot 10^{-3} = 0{,}003$.

5. Se dă:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sum_{i=1}^{3} A_{iN} f(x_{iN})$$

Cerinte:

a. Determinati A_{iN} astfel incat gradul de valabilitate sa fie 2.

b. Calculati: $\int_{0}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{(1-x)x}}dx$

a.

Metoda I

Identificam clasa functiei Cebasev

$\sum_{i=1}^{3} A_{iN} = \frac{\pi}{3}$, iar x_{iN} radacinile polinomului cebasev de grad 3: $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0$.

Metoda II

Se ia baza $1, x, x^2$. Apoi se verifica gradul cu x^3, x^4, x^5.....

$$A_{iN} = \frac{\pi}{3}$$

f=1 => $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = A_1 + A_2 + A_3$

f=x=> $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$

f=x^2=> $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = x_1^2A_1 + x_2^2A_2 + x_3^2A_3$

Din sistemul obtinut se determina x_1, x_2, x_3.

b.

$$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{(1-x)x}}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{t+1}{2}\right)^4}{\sqrt{\left(1-\frac{t+1}{2}\right)\frac{t+1}{2}}}\,dt = \frac{1}{16}\int_{-1}^1 \frac{(t+1)^4}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{16}\frac{\pi}{3}\sum_{i=1}^{3} f(x_i);$$

0->-1; 1->1; ax+b=t =>t=2x-1; $x_i = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0$.

Probleme propuse

1.Calculaţi aproximativ integrala: $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$,folosind formula compusă a trapezelor cu **n=4**.

2. Pentru formula de integrare de tip Newton-Cotes: $\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_{in} f(x_{in})$

Să se arate că: $a_{in} = \int_a^b w(x) l_{in}(x)dx$, în care $l_{in}(x)$ reprezintă multiplicatorii din formula de interpolare Lagrange.

3. Se consideră integrala $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ şi formula de integrare:

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_2 f(x_2) + b_1 f(-1) + b_2 f(1)$. Determinaţi x_i, a_i, **i=1:3,** b_1 şi b_2 astfel încât formula să aibă grad maxim de valabilitate. Precizaţi gradul de valabilitate al formulei.
Indicaţie: Nodurile x_1, x_2 şi x_3 se determină din condiţiile de ortogonalitate:
$\int_{-1}^{1} \pi(x)\rho(x)x^k dx = 0$, **k=0:2,** în care $\pi(x) = \prod_{i=1}^{3}(x-x_i)$, $\rho(x) = (x-1)(x+1)$.

4. Se consideră integrala $I = \int_0^a f(x)dx$ şi formula de integrare:

$$\int_0^a f(x)dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + b_1 f(0) + b_2 f(a).$$

Determinaţi x_i, a_i, b_i, i=1:3, astfel încât formula să aibă grad maxim de valabilitate. Precizaţi gradul de valabilitate al formulei.
Indicaţie: Nodurile x_1 şi x_2 se determină din condiţiile de ortogonalitate:
$\int_{-1}^{1} (x-x_1)(x-x_2)x(x-a)x^k dx = 0$, k=0:1. Coeficienţii se determină impunând formulei de integrare un grad de valabilitate corespunzător.

5. Construiţi o formulă de integrare de ordin 2, de tip Gauss pentru calculul unei integrale definite de forma: $I = \int_{-\infty}^{a} e^t f(t)\,dt$.

6. Construiţi formule de integrare de tip Gauss pentru integralele:

$$I_1 = \int_a^b \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \qquad\qquad I_2 = \int_a^b \sqrt{(t-a)(b-t)}\; f(t)\,dt$$

având grad de valabilitate 3.

7. Pentru formula de integrare:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx \quad = \quad a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$

determinaţi $a_0,\ a_1,\ a_2,\ x_0,\ x_1,\ x_2$ astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate maxim posibil.

8. Formula de integrare Gauss-Radau are forma: $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \sum_{i=0}^{N} A_i f(x_i)$ şi este exactă pentru polinoame de grad ≤ **2N** utilizează ca abscise $\mathbf{x_i}$ zerourile polinomului $\mathbf{T_{N+1}(x)-T_N(x)}$

a) Dezvoltaţi o formulă de integrare cu **N=3**

b) Scrieţi o funcţie Matlab care implementează metoda de integrare pentru **N** oarecare.

9. Fie formula de integrare $\int_a^b f(x)w(x)dx \cong \sum_{i=0}^{n} a_{in} f(x_{in})$

a) Dacă integrarea se face prin cuadrătură Gaussiană arătați că $a_{in} = \int_a^b w(x) l_{in}^2(x)dx;$

b)) Dacă integrarea se face folosind Newton-Cotes arătați că $a_{in} = \int_a^b w(x) l_{in}(x)dx$, unde l_{in}-multiplicatori Lagrange