Laboratorul 5 – Integrare Numerică

Responsabili: Cristina Surdu <anacristinasurdu@gmail.com>

Bogdan Tiganoaia <bogdantiganoaia@gmail.com>

Obiective

În urma parcurgerii acestui laborator studentul va fi capabil să:

- utilizeze metode Newton-Cotes şi metode gaussiene pentru calculul aproximativ al valorii integralei unei funcții continue f :[a,b]→ R
- definească funcții Matlab pentru aproximarea numerică a valorii integralei

Notiuni de teorie:

A. Formule Newton-Cotes

Nr.crt	Nume	Formula	Eroare
1.	Metoda trapezului	$\frac{b-a}{2}(f_0+f_1)$	$-\frac{(b-a)^3}{12}f^{(2)}(\xi)$
2.	Metoda Simpson	$\frac{b-a}{6}(f_0+4f_1+f_2)$	$-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi)$
3.	Metoda Simpson 3/8	$\frac{b-a}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3)$	$-\frac{(b-a)^5}{6480}f^{(4)}(\xi)$
4.	Metoda Bode	$\frac{b-a}{90}(7f_0+32f_1+12f_2+32f_3+7f_4)$	$-\frac{(b-a)^7}{1935360}f^{(6)}(\xi)$

B. Metode gaussiene.

- **Gauss-Legendre** ne permite sa calculăm o integrală de forma:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Schimbarea de variabilă: **x ∈ [a,b] -> t ∈ [-1,1]** definită prin:

t = (2*x-b-a)/(b-a)

x = t*(b-a)/2 + (b+a)/2

conduce la integrala:

$$I = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$$

cu $g(t) = f\left(t\frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2}\right)$ pe care o aproximăm prin: $\sum_{i=0}^{n} A_{in}g(t_{in})$ în care nodurile $\mathbf{t_{in}}$ sunt rădăcinile polinomului Legendre de grad **n:**

$$L_0(x) = 1$$
$$L_1(x) = x$$
$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

Formula finală de calcul este:

$$I = \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} A_{in} f\left(\frac{b-a}{2}t_{in} + \frac{b+a}{2}\right)$$

Coeficienții $\mathbf{A_{in}}$ şi nodurile $\mathbf{t_{in}}$ sunt simetrice în raport cu **t=0**, adică:

$$A_{in} = A_{n-i+1,n}$$
$$t_{in} = t_{n-i+1,n}$$

Pentru **n=2** şi **n=3**, nodurile şi coeficienții (calculate cu 7 zecimale) sunt:

n	t_{in}	A_{in}
2	**-0.5773503**	**1**
	0.5773503	**1**
3	**-0.7745966**	**5/9=0.5555555**
	0	**8/9=0.8888888**
	0.7745966	**5/9=0.5555555**

- Pentru integrale de tipul:

$$I = \int_0^{\infty} f(x)\cdot e^{-x}dx$$

se folosesc formule de tip **Gauss-Laguerre** $I = \sum_{i=0}^{n} A_{in} \cdot f(x_{in})$ cu nodurile x_{in}, rădăcinile polinomului Laguerre:

$$G_0(x) = 1$$
$$G_1(x) = 1 - x$$
$$G_{n+1}(x) - (2n + 1 - x)G_n(x) + n^2 G_{n-1}(x) = 0$$

n	t_{in}	A_{in}
2	0.5857864 3.4142140	0.8535534 0.1464466
3	0.4157746 0 0.7745966	0.7110930 0.2785177 0.1038926

- Pentru integrale de tipul:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-x^2} dx$$

se folosesc formule de tip **Gauss-Hermite**, în care nodurile sunt rădăcinile polinomului Hermite de gradul **n:**

$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = x$$
$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

n	t_{in}	A_{in}
2	-0.7071068 0.7071068	0.8862269 0.8862269
3	-1.224745 0 1.224745	0.2954090 1.1016360 0.2954090

C. Polinoamele ortogonale folosite in metodele gaussiene de integrare numerică:

Polinom ortogonal	Interval	Relatie de recurenta	$w(x)$	$P_0(x)$	$P_1(x)$
Legendre	**[−1, 1]**	$(n+1)P_{n+1}-(2n+1)xP_n+nP_{n-1}=0$	**1**	**1**	**X**
Cebasev ordin 1	**(−1, 1)**	$P_{n+1}-2xP_n+P_{n-1}=0$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**1**	**X**
Cebasev ordin 2	**[−1, 1]**	$P_{n+1}-2xP_n+P_{n-1}=0$	$\sqrt{1-x^2}$	**1**	**2x**
Laguerre	**[0, ∞)**	$P_{n+1}-(2n+1-x)P_n+n^2P_{n-1}=0$	e^{-x}	**1**	**1-x**
Hermite	**(−∞, ∞)**	$P_{n+1}-2xP_n+2nP_{n-1}=0$	e^{-x^2}	**1**	**2x**

Aplicații

a) (2p) Definiti o funcție MATLAB pentru calculul valorii unui polinom ortogonal (Cebaşev, Legendre, Laguerre sau Hermite) într-un punct dat. Selecția polinomului se face printr-un parametru şir de caractere care poate fi: **'cebasev'**, **'legendre'**, **'laguere'** sau **'hermite'** Funcția va avea antetul:

```
function val = Evaluare(polinom, n, x)
```

b) (2p) Definiti o funcție MATLAB care localizează cu o precizie dată ε o rădăcină într-un interval de separare dat, funcție cu antetul:

```
function val = Bisectie(polinom, a, b, eps)
```

Se va ține cont la definirea funcției de proprietatea de separare a rădăcinilor polinoamelor.

c) (2p) Definiti o funcție MATLAB care determină rădăcinile unui polinom ortogonal, având antetul:

```
function [sol] = Radacini(polinom, n)
```

d) (2p) Scrieți o funcție MATLAB care calculează o integrală folosind formula compusă a trapezelor, având semnătura:

```
function I1 = NC1( a, b, n, @f)
% a si b sunt limitele de integrare
% n este numărul de puncte de diviziune al intervalului
% f : R -> R este funcția de integrat
```

e) (2p) Scrieți o funcție pentru calculul unei integrale folosind formula compusă Simpson.

Bonus:

f) (2p) Scrieți funcții de integrare, folosind metodele gaussiene de ordin 2 şi 3. (n=2, n=3)