Seminar 3. Interpolare

Responsabil :

Mihaela Vasile (mihaela.a.vasile@gmail.com)

Cosmin-Stefan Stoica (cosmin.stoica9@gmail.com)

Obiective

În urma parcurgerii acestui seminar studentul va fi capabil să:

- folosească diferite metode de interpolare
- cunoască diferențele între aceste metode
- prezinte avantajele și dezavantajele acestor metode

Breviar teoretic

O funcţie continuă $f:[a,b]\to R$, cunoscută numai în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_n$ –*suportul interpolării*, prin valorile $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ este aproximată printr-un ***polinom generalizat de interpolare*** :

$$P_n(x)=a_0u_0(x)+a_1u_1(x)\ldots+a_nu_n(x),$$

unde funcţiile liniar independende $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$ formează *baza interpolării*. Coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se determină impunând *condiţiile de interpolare*:

$$P_n(x_i)=f(x_i),\quad i=0:n.$$

Condiţiile de interpolare conduc la sistemul de ecuaţii liniare:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k(x_i) = f(x_i),\ i = 0 : n.$$ (un sistem rău condiționat)

1.Interpolare polinomială

1.1.Polinom de interpolare Lagrange

Pentru baza polinomială $u_k(x)=x^k,\ k=0:n$, polinomul de interpolare se calculează cu formula Lagrange:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(x-x_i)}{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(x_k-x_i)}.$$

1.2. Identitatea lui Newton

Numim diferenţe divizate ale unei funcţii **f** în raport cu suportul $x_0, \ldots, x_n$:

$$F_0[x_i]=f(x_i),\quad i=0:n$$

$$F_k[x_0,x_1,\cdots x_k]=\frac{F_{k-1}[x_0,\cdots,x_{k-1}]-F_{k-1}[x_1,\cdots,x_k]}{x_0-x_k},\ k=1:n.$$

$$F_k[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{\prod_{j=0,j\neq i}^{k}(x_i-x_j)}.$$

Exprimarea polinomului de interpolare cu diferenţe divizate se numeşte *formula lui Newton*:

$$P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)F_1[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)F_2[x_0,x_1,x_2]+\ldots$$
$$+(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})F_n[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

Eroarea interpolării are expresia:

$$E_n(x)=(x-x_0)\ldots(x-x_n)F_{n+1}[x,x_0,\ldots,x_n]\le|(x-x_0)\ldots(x-x_n)|\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!},\ \xi\in[x_0,x_n].$$

Pentru un suport de interpolare echidistant($x_i-x_{i-1}=h,\ \ x_i=x_0+ih$) se definesc *diferenţe nedivizate*:

- *progresive*

$$\Delta f(x_i)=\Delta f_i=f(x_i+h)-f(x_i)=f(x_{i+1})-f(x_i)=f_{i+1}-f_i$$
$$\Delta^k f_i=\Delta^{k-1}f_{i+1}-\Delta^{k-1}f_i$$

- *regresive*

$$\nabla f(x_i)=\nabla f_i=f(x_i)-f(x_i-h)=f(x_i)-f(x_{i-1})=f_i-f_{i-1}$$
$$\nabla^k f_i=\nabla^{k-1}f_i-\nabla^{k-1}f_{i-1}$$

- *centrate*

$$\delta f(x_i)=\delta f_i=f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-f\left(x_i-\frac{h}{2}\right)=$$
$$=f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)-f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)=f_{i+\frac{1}{2}}-f_{i-\frac{1}{2}}$$
$$\delta^k f_i=\delta^{k-1}f_{i+\frac{1}{2}}-\delta^{k-1}f_{i-\frac{1}{2}}$$

Intre diferenţele nedivizate şi cele divizate există relaţiile:

$$\Delta^n f_i=\nabla^n f_{i+n}=\delta^n f_{i+\frac{n}{2}}=n!\,h^n F_n[x_i,\cdots,x_{i+n}]$$

Formulele de interpolare *Newton-Gregory*:

$$p_1(u) = f_0 + \binom{u}{1}\Delta f_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{u}{n}\Delta^n f_0,$$

$$x=x_0+uh,\ 0<u<1$$

$$p_2(u) = f_n - \binom{u}{1}\nabla f_n + \binom{u}{2}\nabla^2 f_n + \cdots + (-1)^n\binom{u}{n}\nabla^n f_n,$$

$$x=x_n-uh,\ 0<u<1$$

1.3. Polinoame ortogonale

Def: Un polinom este ortogonal⇔ $<p_i,p_j> =0$; oricare $i\neq j$ si $\|p_i\|=1$.

$$< p_i, p_j >= \int_a^b p_i p_j w(x)dx = \delta_{ij}$$

Exemple de polinoame ortogonale:

1) Cebasev $T_{n+1}-2xT_n+T_{n-1}=0$; $T_0=1$; $T_1=x$;
2) Legendre $(n+1)L_{n+1}-(2n+1)xL_n +nL_{n-1}=0$; $L_0=1$; $L_1=x$;
3) Laguerre $G_{n+1}-(2n+1-x)G_n+n^2G_{n-1}=0$; $G_0=1$; $G_1=1-x$;
4) Hermite $H_{n+1}-2xH_n+2nH_{n-1}=0$; $H_0=1$; $H_1=2x$;

Proprietăți

1) Orice polinom ortogonal are rădăcinile în [a,b] reale și distincte.
2) Orice polinom ortogonal este ortogonal cu orice polinom neortogonal de grad mai mic decât el.

Demonstrație P2)

$0=<p_n,p_j>$; $j<n$;

$<p_n,p_k>=0 \Rightarrow <p_n, \sum_{i=1}^{k} a_i x^i > =0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} < p_n,a_ix^i>=0 \Rightarrow <p_n,a_ix^i>=0 \Rightarrow$ este ortogonal

1.4. Interpolare cu polinoame Cebâsev

Baza interpolării este:

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ T_1(x),\ T_2(x),\ \cdots,\ T_n(x).$$

Polinomul generalizat de interpolare este:

$$P_n(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1T_1(x) + \cdots + a_nT_n(x)$$

Suportul interpolării este constituit de rădăcinile polinomului Cebâşev de grad **n+1**:

$$T_{n+1}(x_k)=0,\quad x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi,\qquad k = 0 : n$$

Sistemul generat de condiţiile de interpolare este ortogonal şi are soluţia:

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \frac{\sqrt{2}}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$$

$$a_j = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)T_j(x_k) = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)T_j\left(\cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$$

1.5.Interpolare trigonometrică

Considerăm funcţia **f** periodică cu perioada **2π.** Suportul interpolării este reprezentat de **2n+1** puncte echidistante în **[0, 2π]**:

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, k = 0 : 2n.$$

Baza interpolării este:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\theta, \cos\theta, \cdots, \sin n\theta, \cos n\theta.$$

Polinomul trigonometric de interpolare este:

$$P_n(\theta) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + b_1 \sin\theta + a_1\cos\theta + \cdots + b_n \sin n\theta + a_n \cos n\theta$$

Condiţiile de interpolare conduc la un sistem cu matrice ortogonală cu soluţia:

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

$$b_j = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n} f(\theta_k)\sin j\theta_k = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\sin\frac{2k\pi j}{2n+1}, j = 1 : n$$

$$a_j = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(\theta_k)\cos j\theta_k = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\cos\frac{2k\pi j}{2n+1}.$$

2.Funcţii spline de interpolare

Interpolarea polinomială, deşi este simplă, nu este stabilă numeric, limitând drastic gradul polinomului de interpolare. Aceasta determină o aproximare locală, pe intervale, a funcţiei, prin polinoame de grad scăzut (de obicei 3). In noduri se impun condiţii de interpolare şi de continuitate (pentru funcţie şi derivatele ei).

Astfel pe suportul $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se consideră intervalele

$$[x_0, x_1), [x_1, x_2), \ldots, [x_{n-1}, x_n)$$

Un spline cubic de interpolare este definit ca:

$$S_i: [x_i, x_{i+1}) \to R, \; S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-xi)^3$$

Sistemul de coordonate local poate fi parametrizat prin schimbarea de variabilă:

$$t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{h_i}$$

Splineul în baza $(1\ \ t\ \ t^2\ \ t^3)$ este:

$s_i: \quad [0,1) \to R, \quad s_i(t)=\alpha_i+\beta_i t+\chi_i t^2+\delta_i t^3$

Utilizarea bazei Bernstein $(1-t)^3$, $3t(1-t)^2$, $3t^2(1-t)$, t^3 simplifică în mod considerabil calculul parametrilor splineurilor:

$s_i: \quad [0,1) \to R, \quad s_i(t)=a_i(1-t)^3+3b_i t(1-t)^2+3c_i t^2(1-t)+d_i t^3$

Splineurile în clasă C^1 utilizează baza Bernstein şi impun condiţii de interpolare de tip Hermite:

$S_i(x_i)=f(x_i), \qquad i=0:n-1$
$S_i'(x_i)=f'(x_i)$
$S_{n-1}(x_n)=f(x_n)$
$S'_{n-1}(x_n)=f'(x_n)$

şi condiţii de continuitate şi derivabilitate în nodurile interne:

$S_i(x_{i+1})=S_{i+1}(x_{i+1}), \quad i=0:n-2$
$S_i'(x_{i+1})=S'_{i+1}(x_{i+1})$

Parametrii funcţiei spline S_i sunt:

$$a_i = f(x_i),$$
$$b_i = f(x_i) + \frac{h_i}{3} f'(x_i),$$
$$c_i = f(x_{i+1}) - \frac{h_i}{3} f'(x_{i+1})$$
$$d_i = f(x_{i+1})$$

Splineurile în clasă C^2 folosesc condiţii de interpolare de tip Lagrange:

$S_i(x_i)=f(x_i), \qquad i=0:n-1$
$S_{n-1}(x_n)=f(x_n)$

şi condiţii de continuitate, derivabilitate şi curbură în nodurile interne:

$S_i(x_{i+1})=S_{i+1}(x_{i+1}), \quad i=0:n-2$
$S_i'(x_{i+1})=S'_{i+1}(x_{i+1})$
$S_i''(x_{i+1})=S''_{i+1}(x_{i+1})$

Pentru determinarea parametrilor mai sunt necesare două condiţii, care se pun la capete şi sunt fie:

$S_0''(x_0)=S''_{n-1}(x_n)=0$ pentru splineuri naturale
$S_0'(x_0)=f'(x_0), \quad S'_{n-1}(xn)=f'(x_n)$ pentru splineuri tensionate

Determinarea parametrilor funcţiilor spline impune rezolvarea unui sistem de ecuaţii cu matrice tridiagonală.

Sistemul tridiagonal pentru funcţii spline naturale are forma:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 \\
\cdots & & \cdots & \ddots & \\
0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
c_0 \\ c_1 \\ \cdots \\ c_{n-1} \\ c_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
\dfrac{3(a_2-a_1)}{h_1}-\dfrac{3(a_1-a_0)}{h_0} \\
\cdots \\
\dfrac{3(a_n-a_{n-1})}{h_{n-1}}-\dfrac{3(a_{n-1}-a_{n-2})}{h_{n-2}} \\
0
\end{bmatrix}
$$

$a_i=f(x_i)$, $i=0:n$

$$b_i=\frac{a_{i+1}-a_i}{h_i}-\frac{h_i}{3}(2c_i+c_{i+1}),\quad i=1:n-1$$

$$d_i=\frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i},\quad i=0:n-1$$

Pentru funcţii spline tensionate avem sistemul:

$$
\begin{bmatrix}
2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & 0 \\
h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 \\
\cdots & & \cdots & \ddots & \\
0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
c_0 \\ c_1 \\ \cdots \\ c_{n-1} \\ c_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\dfrac{3(a_1-a_0)}{h_0}-3f'(x_0) \\
\dfrac{3(a_2-a_1)}{h_1}-\dfrac{3(a_1-a_0)}{h_0} \\
\cdots \\
\dfrac{3(a_n-a_{n-1})}{h_1}-\dfrac{3(a_{n-1}-a_{n-2})}{h_0} \\
3f'(x_n)-\dfrac{3(a_n-a_{n-1})}{h_{n-1}}
\end{bmatrix}
$$

Probleme rezolvate

1. Se consideră funcția cunoscută prin tabelul:

x	**-1**	**-0.5**	**0.5**	**1**
f(x)	**1**	**0**	**2**	**1**

a) Scrieţi expresia polinomul Lagrange de interpolare.
b) Scrieţi expresia polinomului de interpolare Newton şi expresia erorii.
c) Scrieţi o funcţie MATLAB, **function c = coefNewton(x,y)**, care calculează coeficienţii polinomului Newton de interpolare asociat funcţiei *f* cunoscută prin valorile *y* de coordonate *x*.
Soluție:

a)Expresia polinomului Lagrange de interpolare:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(x-x_i)}{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(x_k-x_i)}= f(-1)\frac{(x+0.5)(x-0.5)(x-1)}{(-1+0.5)(-1-0.5)(-1-1)}$$

$$+\ f(-0.5)\frac{(x+1)(x-0.5)(x-1)}{(-0.5+1)(-0.5-0.5)(-0.5-1)}+\ f(0.5)\frac{(x+1)(x+0.5)(x-1)}{(0.5+1)(0.5+0.5)(0.5-1)}$$

$$+\ f(1)\frac{(x+1)(x+0.5)(x-0.5)}{(1+1)(1+0.5)(1-0.5)}=$$

$$=\frac{(x+0.5)(x-0.5)(x-1)}{-1.5}+2\frac{(x+1)(x+0.5)(x-1)}{-0.75}+\frac{(x+1)(x+0.5)(x-0.5)}{1.5}$$

b)Expresia polinomului de interpolare Newton

$$P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)F_1[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)F_2[x_0,x_1,x_2]+\ldots$$
$$+(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})F_n[x_0,x_1,\ldots,x_n]\ (n=3)$$

$$P_3(x) = f(-1) + (x+1)F_1[-1,-0.5]+ (x+1)(x+0.5)F_2[-1,-0.5,0.5]$$
$$+(x+1)(x+0.5)(x-0.5)F_3[-1,-0.5,0.5,1]$$

x_i	$F_0[x_i]$	$F_1[x_i,x_{i+1}]$	$F_2[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$F_3[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
-1	1	$\frac{f(-1)-f(-0.5)}{-1+0.5}=-2$	$\frac{-2-2}{-1-0.5}=\frac{8}{3}$	$\frac{\frac{8}{3}+\frac{8}{3}}{-1-1}=-\frac{8}{3}$
-0.5	0	$\frac{f(-0.5)-f(0.5)}{-0.5-0.5}=2$	$\frac{2+2}{-0.5-1}=-\frac{8}{3}$	
0.5	2	$\frac{f(0.5)-f(1)}{0.5-1}=-2$		
1	**1**			

$$P_3(x) = 1 + (x+1)(-2)+ (x+1)(x+0.5)\frac{8}{3}+(x+1)(x+0.5)(x-0.5)\ (-\frac{8}{3}).$$

Eroarea interpolării are expresia:

$$E_3(x)=(x-x_0)\ldots(x-x_n)F_4[x,x_0,x_1,x_2,x_3]\leq|(x+1)(x+0.5)(x-0.5)(x-1)|\frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!},$$

$\xi\in[-1,1]$.

c) $P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)F_1[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)F_2[x_0,x_1,x_2]+\ldots$
$+(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})F_n[x_0,x_1,\ldots,x_n] = c_0+ c_1 x^1+ c_2 x^2+\ldots+ c_n x^n$.

```
function c = coefNewton(x,y)
    z=difDiv(x,y);
    n=length(x);
    A=zeros(n,n);
    A(1,n)=z(1);
    c=zeros(n,1);
    for i=2:n
        A(i,n-i+1:n)=poly(x(1:i-1))*z(i);
```

```
        endfor
        for i=1:n
                c(i) = sum(A(:,i));
        endfor
endfunction

function z=difDiv(x,y)
        x=x(:);
        y=y(:);
        z=y;
        n=length(y);
        for i=1:n
                z(i+1:n)=(z(i+1:n)-z(i))./(x(i+1:n)-x(i));
         endfor
  endfunction
```

2. Se consideră funcția cunoscută prin tabelul:

x	-3	-1	0	4
f	2	0	3	6

a) Determinaţi expresia polinomului Lagrange de interpolare

b) Determinaţi expresia polinomului Newton de interpolare

c) Eroarea polinomului Newton de interpolare

a)

$$P = 2\frac{(x-(-1))(x-0)(x-4)}{(-3-(-1))(-3-0)(-3-4)} + 0\frac{(x-(-3))(x-0)(x-4)}{(-1-(-3))(-1-0)(-1-4)} + 3\frac{(x-(-3))(x-(-1))(x-4)}{(0-(-3))(0-(-1))(0-4)} +$$

$$+6\frac{(x-(-3))(x-0)(x-(-1))}{(4-(-3))(4-0)(4-(-1))};$$

b)

$$F_0[x_0] = f(x_0);$$

$$F_1[x_0, x_1] = \frac{F_0[x_0] - F_0[x_1]}{x_0 - x_1};$$

$$F_p[x_0, x_1, ..., x_p] = \frac{F_{p-1}[x_0, x_1, ..., x_p] - F_{p-1}[[x_1, x_2, ..., x_p]]}{x_0 - x_p};$$

X	F_0	F_1	F_2	F_3
-3	2	-1	4/3	-127/420
-1	0	3	-9/20	
0	3	¾		
4	6			

F_1: (2-0)/(-3+1)=-1; F_2: (-1-3)/(-3-0)=4/3;

(0-3)/(-1-0)=3; (3-3/4)/(-1-4)=-9/20;

(3-6)/(0-4)=3/4 F_3: (4/3+9/20)/(-3-4)=-107/420;

P=2+ (-1)(x-(-3))+4/3(x+3)(x+1) + (-127/420) (x+3)(x+1)x;

c)Eroarea

$$E_n(x) \le (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)};$$

$$E(x) \le (x+3)(x+1)x(x-4)\frac{f^{(4)}(\xi)}{4};$$

3. Pentru funcţia $f : [-5,3] \to R$, $f(x) = 2x + 1$, determinaţi polinomul generalizat de interpolare Cebâşev de grad 2.

Soluţie. Facem schimbarea de variabilă

$$x = 4t - 1 \Rightarrow t = \frac{x+1}{4} \Rightarrow F : t \in [-1,1] \to F(t) \in R$$

$$P_2(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 \cdot T_1(t) + a_2 \cdot T_2(t)$$

Condiţiile de interpolare sunt:

$$\begin{cases} P_2(t_0) = a_0 + a_1 \cdot T_1(t_0) + a_2 \cdot T_2(t_0) = F(t_0) \\ P_2(t_1) = a_0 + a_1 \cdot T_1(t_1) + a_2 \cdot T_2(t_1) = F(t_1) \\ P_2(t_2) = a_0 + a_1 \cdot T_1(t_2) + a_2 \cdot T_2(t_2) = F(t_2) \end{cases}$$

unde

$$t_i = \cos\left(\frac{2i+1}{6}\pi\right),\ i = 0:2.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_0 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ t_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ t_2 = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1\cos\frac{\pi}{6} + a_2\cos\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} - 1 \\ a_0 + a_1\cos\frac{\pi}{2} + a_2\cos\pi = -1 \\ a_0 + a_1\cos\frac{5\pi}{6} + a_2\cos\frac{5\pi}{3} = -2\sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_0=-1,\ a_1=4\ ,\ a_2=0 \Rightarrow P_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot T_1(t)$

3. Fie f o funcţie periodică impară, cu perioada 2π, cunoscută prin valorile:

X	$\pi/4$	$2\pi/4$	$3\pi/4$
F(x)	-1	0	1

a) Determinaţi polinomul de interpolare trigonometrică de grad 3: $P_3=b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x$

Soluţie. a) Pentru a determina polinomul P_3 este necesar să determinăm coeficienţii b_1, b_2, b_3.

Pentru aceasta avem:

$$P_3\left(\frac{\pi}{4}\right)=b_1\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+b_2\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)+b_3\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$$
$$P_3\left(\frac{2\pi}{4}\right)=b_1\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)+b_2\sin\left(\frac{4\pi}{4}\right)+b_3\sin\left(\frac{6\pi}{4}\right)=0$$
$$P_3\left(\frac{3\pi}{4}\right)=b_1\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)+b_2\sin\left(\frac{6\pi}{4}\right)+b_3\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)=1$$

De aici obţinem sistemul:

$$\begin{cases}\sqrt{2}b_1+2b_2+\sqrt{2}b_3=-2\\ b_1-b_3=0\\ \sqrt{2}b_1-2b_2+\sqrt{2}b_3=2\end{cases}$$

care are soluţiile **$b_1 = 0$**, **$b_2 = -1$** şi **$b_3 = 0$**. Deci polinomul de interpolare trigonometric este P_3=-sin(2x).

4. Fie funcţia cunoscută prin tabelul:

X	-1	0	1	2
f(x)	-2	-1	2	4

a) Calculaţi funcţia spline cubică de clasă C^1 care interpolează funcţia dată.
b) Calculaţi funcţia spline cubică de clasă C^2 (spline natural) care interpolează funcţia dată.

Soluţie. a) spline în clasă C^1:

Considerăm funcţii de interpolare liniară, locale pe subintervalele: **[-1, 0], [0, 1], [1, 2]**, de forma **$p_i(x) = a_i x + b_i$**

- condiţii de interpolare: $\begin{cases}p_i(x_i)=f(x_i)\\ p_{n-1}(x_n)=f(x_n)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p_0(-1)=-2\\ p_1(0)=-1\\ p_2(1)=2\\ p_2(2)=4\end{cases}$

- condiţii de racordare: $p_i(x_{i+1})=p_{i+1}(x_{i+1}) \Rightarrow \begin{cases}p_0(0)=-1\\ p_1(1)=2\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a_0+b_0=-2\\ b_1=-1\\ a_2+b_2=2\\ 2a_2+b_2=4\\ b_0=-1\\ a_1+b_1=2\end{cases} \Rightarrow\begin{cases}a_0=1\\ b_0=-1\\ a_1=3\\ b_1=-1\\ a_2=2\\ b_2=0\end{cases}$$

b) spline în clasă C^2:

$$s_i = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$$

$$s_i^{'} = b_i + 2c_i(x-x_i) + 3d_i(x-x_i)^2$$

$$s_i^{''} = 2c_i + 6d_i(x-x_i)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_0(x) = a_0 + b_0(x+1) + c_0(x+1)^2 + d_0(x+1)^3 \\ s_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 \\ s_2(x) = a_2 + b_2(x-1) + c_2(x-1)^2 + d_2(x-1)^3 \end{cases}$$

- condiţii de interpolare: $\begin{cases} s_0(-1) = -2 \\ s_1(0) = -1 \\ s_2(1) = 2 \\ s_2(2) = 4 \end{cases}$

- condiţii de racordare: $\begin{cases} s_0(0) = s_1(0) \\ s_1(1) = s_2(1) \\ s_0^{'}(0) = s_1^{'}(0) \\ s_1^{'}(1) = s_2^{'}(1) \\ s_0^{''}(0) = s_1^{''}(0) \\ s_1^{''}(1) = s_2^{''}(1) \end{cases}$

- condiţii pentru funcţii spline naturale: $\begin{cases} s_0^{''}(-1) = 0 \\ s_2^{''}(2) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = -2 \\ a_1 = -1 \\ a_2 = 2 \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 4 \\ a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = a_1 \\ a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = a_2 \\ b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1 \\ b_1 + 2c_1 + 3d_1 = b_2 \\ 2c_0 + 6d_0 = 2c_1 \\ 2c_1 + 6d_1 = 2c_2 \\ 2c_0 = 0 \\ 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -2 \\ a_1 = -1 \\ a_2 = 2 \\ c_0 = 0 \\ c_2 = 0 \\ b_2 + d_2 = 2 \\ b_0 + d_0 = 1 \\ b_1 + c_1 + d_1 = 3 \\ b_0 + 3d_0 = b_1 \\ b_1 + 2c_1 + 3d_1 = b_2 \\ c_1 - 3d_0 = 0 \\ c_1 + 3d_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -2 \\ a_1 = -1 \\ a_2 = 2 \\ d_0 = \frac{1}{2} \\ d_1 = -\frac{1}{2} \\ d_2 = -\frac{9}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} b_0 = \frac{1}{2} \\ b_1 = 2 \\ b_2 = \frac{13}{2} \\ c_0 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Probleme Propuse

1. Calculaţi funcţiile spline în clasa *C*1 tensionate pentru funcţia cunoscută prin:

x	**1**	**2**	**3**
F	-1	1	**18**
f'	**-3**	**9**	**27**

2. Pentru nodurile **A(-1,3), B(1,1),C(3,-3), D(5,0)** calculaţi polinomul de interpolare sub formă Lagrange şi Newton şi daţi expresia erorii interpolării.
3. Se consideră nodurile **A(-1,1),B(2,3)** şi **C(4,5)** prin care trec două splineuri naturale de interpolare în clasă $\mathbf{C^2}$. Determinaţi-le.
4. Se consideră nodurile **A(-1,1), B(2,3)** şi **C(4,5)** prin care trec două splineuri de interpolare în clasă **C1** şi au pantele **m(A)=1, m(B)=0, m(C)=-1**. Determinaţi-le.
5. O funcţie este cunoscută prin tabloul:

x **x(1)** **x(2)** **x(3)**
y **y(1)** **y(2)** **y(3)**

Scrieţi o funcţie Matlab pentru calculul funcţiilor spline cubice **s1(x)** şi **s2(x)**în clasă **C2**, naturale cu semnătura **function a=splC2n(x,y)**, în care **a** este o matrice cu 2 linii şi 4 coloane, conţinând cei 4 parametri ai celor două splineuri.

6.Pentru funcţia $f(x)$ cunoscută prin tabelul următor, calculaţi funcţiile spline $s_0(x)$ şi $s_1(x)$,tensionate de clasă C^2, dacă $s_0''(1) = 2$ şi $s_1''(3) = -1$.

x	1	2	3
f(x)	3	4	2

7. Calculaţi funcţiile spline $s_0(x)$ şi $s_1(x)$ în clasă C^1 pentru funcţia $f(x)$ cunoscută prin tabelul următor:

x	1	2	4
f(x)	3	4	6
f'(x)	0	2	5

8. Calculați funcțiile spline C^1 și spline C^2 naturale pentru funcția cunoscută prin :

x	1	2	3
f	5	-1	4
f'	1	0	-1