Laboratorul 3 – Factorizări ortogonale

Responsabili:

Alexandru Bujor (bujor.alexandru89@gmail.com)

Mihaela Vasile (mihaela.a.vasile@gmail.com)

I. Noțiuni teoretice

Matrici ortogonale

Fie vectorii coloană:

$$x, y \in R^{n\times 1}, x = [x_1; x_2; \ldots x_n], y = [y_1; y_2; \ldots y_n]$$

Se definesc următoarele operații:

a) Produsul scalar:

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = y' \cdot x$$

b) Norma euclidiana:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x' \cdot x} = \sqrt{< x, x >}$$

Vectorii $z_1, z_2, \ldots z_n$ sunt ortogonali dacă:

1). $< z_i, z_j >= 0, \forall i \neq j$

2). $\|z_i\|_2 = 1, \forall i = 1:n$

O matrice este ortogonală dacă și numai dacă coloanele sale formează o bază ortonormată.

Proprietati ale matricilor ortogonale ($H \in R^{n\times n}$ ortogonala):

1). $H \cdot H^t = H^t \cdot H = I_n$

2). $H^t = H^{-1}$

3). $\|Hx\|_2 = \|x\|_2$

Factorizarea QR

Teoremă: Orice matrice pătratică A poate fi descompusă sub forma A=QR cu Q matrice ortogonală și R matrice superior triunghiulară

Ideea:

Fie un **sistem de forma Ax=b.**
A **se descompune astfel A=QR** (conform teoremei) printr-o metoda dintre cele prezentate in continuare.
Rezulta **sistemul QRx=b**
Se înmulțește cu Q' la stânga**: Q'QRx=Q'b, Q'Q** = matricea identitate
Obținem **Rx=b1 (b1=Q'b)**
Rezolvarea **sistemului superior triunghiular** este triviala, fiind studiata intr-un laborator anterior.

Metode de factorizare

1)Metoda Householder

Metoda de triunghiularizare ortogonală Householder transformă sistemul Ax=b, $A \in R^{mxn}$, într-un sistem ortogonal echivalent HAx = Hb, cu matricea sistemului HA superior triunghiulară, $H \in R^{mxm}$ fiind o matrice ortogonală. Matricea ortogonală H se construieşte ca un produs de *reflectori Householder*: $H=H_n \ldots H_2 H_1$; un reflector elementar Householder este de forma:

$$\mathbf{H_p} = \mathbf{I_m} - 2\frac{\mathbf{v_p v_p^T}}{\mathbf{v_p^T v_p}},$$

în care componentele *vectorului Householder* $v_p=[0 \ldots 0\ v_{pp} \ldots v_{mp}]^T$ se obţin cu relaţiile:

$$\sigma_p = \mathbf{sign}(\mathbf{a_{pp}})\sqrt{\sum_{i=p}^{m} \mathbf{a_{ip}^2}}$$, $v_{pp}=a_{pp}+\sigma_p$, $\beta_p=\sigma_p v_{pp}$, $v_{ip}=a_{ip}$, i>p.

Inmulţirea $HA=H_n \ldots H_2 H_1 A$ se scrie $A_{p+1}=H_p A_p$, p=1:n, $A_1=A$. Datorită formei particulare a reflectorilor, înmulţirile matriciale nu se fac efectiv. Astfel înmulţirea $A_{p+1}=H_p A_p$ se face astfel:

- coloanele j=1:p-1 rămân neschimbate
- în coloana p: a_{ip} cu i<p rămân neschimbate, $a_{pp}=-\sigma_p$, $a_{ip}=0$, i>p
- în coloanele j=p+1:n, a_{ij} cu i<p rămân neschimbate,

$a_{ij}=a_{ij}-\tau_j v_{ip}$, i>p,

unde $$\tau_j = \frac{\sum_{i=p}^{m} \mathbf{v_{ip} a_{ij}}}{\beta_p}$$

2) Ortogonalizarea Gram-Schmidt

Notăm :

a_i coloana i din matricea A
q_i coloana i din matricea Q
r_{ij} elementele matricii R superior triunghiulare, adica $r_{ij} = 0$ pentru $i > j$.

Scriind relația QR=A și considerând necunoscutele r_{ij}(elementele matricii R) și coloanele q_i ale matricii Q obținem pentru fiecare j = 1 : n următoarele relații:

$$a_j = \sum_{i=1}^{j} r_{ij} \cdot q_j, \ \ j = 1 : n$$
$$r_{ij} = q_i' \cdot a_j, \ \ i = 1 : j - 1$$

$$q_j = \frac{a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} \cdot q_i}{r_{jj}}$$

Din condiția $\|q_j\|_2 = 1$ rezultă:

$$r_{jj} = \|a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} \cdot q_i\|_2$$

3) Algoritmul Gram-Schmidt modificat

FOR i=1:n

$$R_{ii} = \|A_i\|_2$$
$$Q_i = \frac{A_i}{R(i,i)}$$

FOR j=i+1:n

$$R_{ij} = Q_i' \cdot A_j$$
$$A_j = A_j - Q_i \cdot R_{ij}$$

4) Metoda Givens

Utilizează matrici de rotație (care sunt matrici ortogonale) de forma:

$$G_{kl} = \begin{pmatrix} I_{k-1} & & & & \\ & c & & s & \\ & & I_{l-k-1} & & \\ & -s & & c & \\ & & & & I_{n-l} \end{pmatrix}$$

Matricea de rotație se utilizează pentru a anula elementele aflate sub diagonala principală. Pentru a elimina toate elementele necesare, se va determina:

$$Q' = (G_{n-1n})(G_{n-2n}G_{n-2n-1})\dots(G_{1n}G_{1n-1}G_{1n-2}\dots G_{12})$$

Astfel încât: $Q' \cdot A = R$
Rezultând ca $A = QR$

Pentru a realiza factorizarea prin metoda Givens este recomandat să folosiți următoarele funcții:

```
function x = rotvec(k,l,c,s,x) ; care aplica o rotatie asupra unui vector
```

```
function A = rotmat(k,l,c,s,A) ; care aplica o rotatie unei matrici (o
rotatie asupra fiecarei coloane)
```

```
function [c,s] = detrot(k,l,x) ; determina c si s
```

dupa relatiile:

$$\rho = \sqrt{A_{kk}^2 + A_{lk}^2}$$

$$s = -\frac{A_{lk}}{\rho}$$

$$c = \frac{A_{kk}}{\rho}$$

Aplicații:

1). Scrieți o funcție Octave *([Q,R]=qrGS(A))* care primește ca parametru o matrice A si determină matricile Q si R pentru descompunerea QR a matricei A. Implementați încă o funcție care utilizează procedura anterioara pentru a rezolva un sistem de ecuații de forma Ax=b

2). Implementați descompunerea QR pe baza algoritmului Gram Schmidt modificat.

3). Scrieți o funcție *([Q,R]=qrGivens(A))* care realizează descompunerea QR a matricei A utilizând rotori Givens.

4). Modificați problema anterioara pentru a descompune o matrice a într-un produs QL, Q fiind o matrice ortogonală, iar L o matrice inferior triunghiulară.

Linkuri utile:

http://en.wikipedia.org/wiki/QR_decomposition

http://ro.wikipedia.org/wiki/Descompunerea_QR