Seminar 2.Factorizări ortogonale

Responsabil:

Mihaela Vasile (mihaela.a.vasile@gmail.com)

Cosmin-Ştefan Stoica (cosmin.stoica9@gmail.com)

Obiective

În urma parcurgerii acestui seminar , studentul va fi capabil să:

- Definească notiunea de matrice ortogonală și vector ortogonal
- Aplice cele 3 metode de factorizare ortogonală

Breviar teoretic

Factorizarea QR stabileşte că orice matrice $A\in R^{mxn}$, poate fi descompusă ca un produs: A=QR între o matrice $Q\in R^{mxn}$ matrice ortogonală şi $R\in R^{nxn}$ o matrice superior triunghiulară cu elementele diagonale pozitive.

O matrice ortogonală $H\in R^{nxn}$ are următoarea proprietate: $H * H^T = H^T * H = I_n$. Observăm că H este ortogonală dacă și numai dacă coloanele matricii H sunt ortogonale.

1.Metoda Householder

Metoda de triunghiularizare ortogonală Householder transformă sistemul Ax=b, $A\in R^{mxn}$, într-un sistem ortogonal echivalent HAx = Hb, cu matricea sistemului HA superior triunghiulară, $H\in R^{mxm}$ fiind o matrice ortogonală. Matricea ortogonală H se construieşte ca un produs de *reflectori Householder*: $H=H_n\ldots H_2H_1$; un reflector elementar Householder este de forma:

$$\mathbf{H_p} = \mathbf{I_m} - 2\frac{\mathbf{v_p v_p^T}}{\mathbf{v_p^T v_p}},$$

în care componentele *vectorului Householder* $v_p=[0\ldots0\ v_{pp}\ldots v_{mp}]^T$ se obţin cu relaţiile:

$$\boldsymbol{\sigma_p} = \mathbf{sign}(\mathbf{a_{pp}})\sqrt{\sum_{i=p}^{m}\mathbf{a_{ip}^2}},\quad v_{pp}=a_{pp}+\sigma_p,\ \beta_p=\sigma_p v_{pp},\ v_{ip}=a_{ip},\ i>p.$$

Inmulţirea $HA=H_n\ldots H_2H_1A$ se scrie $A_{p+1}=H_pA_p$, p=1:n, $A_1=A$. Datorită formei particulare a reflectorilor, înmulţirile matriciale nu se fac efectiv. Astfel înmulţirea $A_{p+1}=H_pA_p$ se face astfel:

- coloanele j=1:p-1 rămân neschimbate
- în coloana p: a_{ip} cu i<p rămân neschimbate, $a_{pp}=-\sigma_p$, $a_{ip}=0$, i>p
- în coloanele j=p+1:n, a_{ij} cu i<p rămân neschimbate,

$$a_{ij}=a_{ij}-\tau_j v_{ip},\ i>p,$$

unde $\tau_j = \dfrac{\sum_{i=p}^{m} v_{ip} a_{ij}}{\beta_p}$.

2.Metoda Givens

Formează matricea ortogonală G ca un produs de <u>*matrice elementare de rotaţie*</u>:
$G = G_{n-1,n} G_{n-2,n} G_{n-2,n-1} \dots G_{1n} G_{1,n-1} \dots G_{12}$ în care:

$$G_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & \cos\theta & \cdots & -\sin\theta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sin\theta & \cdots & \cos\theta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Inmulţirea la stânga cu G_{kl} afectează numai liniile k şi l din A:

$$A'_{kj} = A_{kj}\cos\theta - A_{lj}\sin\theta, \quad A'_{lj} = A_{kj}\sin\theta + A_{lj}\cos\theta$$

Determinăm rotaţia θ, impunând ca $A'_{lk}=0$. Rezultă:

$$tg\,\theta = \frac{A_{lk}}{A_{kk}}, \rho = \sqrt{A_{kk}^2 + A_{lk}^2},$$

$$\cos\theta = \frac{A_{kk}}{\rho}, \quad \sin\theta = -\frac{A_{lk}}{\rho}$$

3.Ortogonalizare Gram-Schmidt

In metoda *Gram-Schmidt clasică* se scriu relaţiile obţinute din factorizarea QR, evidenţiind coloanele matricelor Q şi A:

$$a_1 = q_1 r_{11}, \qquad r_{11} = \|a_1\|_2 \qquad q_1 = \frac{a_1}{r_{11}}$$

$$a_2 = q_1 r_{12} + q_2 r_{22}, \quad r_{12} = q_1^T a_2, \quad r_{22} = \|a_2 - r_{12} q_1\|_2, \quad q_2 = \frac{a_2 - r_{12} q_1}{r_{22}}$$

$$a_j = \sum_{i=1}^{j} q_i r_{ij}, \quad r_{ij} = q_i^T a_j, \quad r_{jj} = \left\| a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} q_i \right\|_2, \quad q_j = \frac{a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} q_i}{r_{jj}}$$

Algoritmul clasic este instabil numeric. Operaţiile de scădere pot fi făcute progresiv, în momentul obţinerii elementului r_{ij}. Notăm

$$a_j^{(1)} = a_j^{(0)} - r_{1j} q_1$$
$$q_2^T a_j^{(1)} = q_2^T \left(a_j^{(0)} - r_{1j} q_1\right) = q_2^T a_j^{(0)} - r_{1j} q_2^T q_1 = q_2^T a_j^{(0)} = r_{2j},$$

sau în general $r_{ij} = q_i^T a_j^{(i-1)}$. In algoritmul *Gram-Schmidt modificat* se efectuează operaţiile în ordinea:

$$
\begin{array}{llllll}
r_{11} = \left\|a_1^{(0)}\right\| & q_1 = \dfrac{a_1^{(0)}}{r_{11}} & r_{12} = q_1^T a_2^{(0)} & r_{13} = q_1^T a_3^{(0)} & \cdots & r_{1n} = q_1^T a_n^{(0)} \\
 & & a_2^{(1)} = a_2^{(0)} - r_{12} q_1 & a_3^{(1)} = a_3^{(0)} - r_{13} q_1 & \cdots & a_n^{(1)} = a_n^{(0)} - r_{1n} q_1 \\
r_{22} = \left\|a_2^{(1)}\right\| & q_2 = \dfrac{a_2^{(1)}}{r_{22}} & & r_{23} = q_2^T a_3^{(1)} & \cdots & r_{2n} = q_2^T a_n^{(1)} \\
 & & & a_3^{(2)} = a_3^{(1)} - r_{23} q_2 & \cdots & a_n^{(2)} = a_n^{(1)} - r_{2n} q_2 \\
r_{33} = \left\|a_3^{(2)}\right\| & q_3 = \dfrac{a_3^{(2)}}{r_{33}} & & & \cdots & r_{3n} = q_3^T a_n^{(2)} \\
 & & & & \cdots & a_n^{(3)} = a_n^{(2)} - r_{3n} q_3 \\
 & & & & \cdots & \cdots \\
 & & & & \cdots & r_{n-1,n} = q_{n-1}^T a_n^{(n-2)} \\
 & & & & & a_n^{(n-1)} = a_n^{(n-2)} - r_{n-1,n} q_{n-1} \\
r_{nn} = \left\|a_n^{(n-1)}\right\| & q_n = \dfrac{a_n^{(n-1)}}{r_{nn}} & & & &
\end{array}
$$

Probleme rezolvate

1. Dacă H_1,H_2 – sunt ortogonale => H1H2=ortogonaă

Observaţie: H-matrice ortogonală=> $HH^T=I_n$;

Rezolvare

$H_1H_1^T=I_n$;
$H_2H_2^T=I_n$;
$H_1H_2(H_1H_2)^T= H_1H_2H_2^TH_1^T=I_n$

2. $\|Hx\|_2=\|x\|_2$;

Se stie că :
$y^T y=\|y\|_2^2$;

$(Hx)^THx= x^TH^THx=\|x\|^2_2 \Rightarrow \|Hx\|^2=\|x\|^2; \Rightarrow \|Hx\|=\|x\|;\ \|x\|_2 >=0$;

3. Fie $H = I_n - \dfrac{2uu^T}{\|u\|^2}$ -reflector Householder;

a) $H^T=H$; b) Hu=? ;

Rezolvare

a) $H^T = \left(I_n - \dfrac{2uu^T}{\|u\|^2} \right)^T = I_n - \dfrac{2uu^T}{\|u\|^2} = H$

b) $Hu=\left(I_n-\frac{2uu^T}{\|u\|^2}\right)u=u-\frac{2uu^T}{\|u\|^2}u=u-2u=-u$

4. $x\in R^n$; $\|x\|_2=1$; $u=\frac{x+e_1}{\sqrt{1+x_1}}$; $e_1=[1\ 0\ 0\ 0]^T$;

a) $\|u\|_2$;

b) $H=I_n-uu^T$; $Hx=?$;

Rezolvare

a) $\|u\|_2^2=u^Tu=\frac{x+e_1}{\sqrt{1+x_1}}\frac{(x+e_1)^T}{\sqrt{1+x_1}}=2$;

b) $Hx=(I_n-uu^T)x=x-uu^Tx=x-\frac{(x+e_1)(x^T+e_1^T)x}{1+x_1}=x-\frac{(x+e_1)(1+x_1)}{1+x_1}=-e_1$

5. Determinaţi factorizarea QR reflector Householder a matricei

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&4&5\\1&-1&1\\2&1&-1\end{bmatrix}.$$

Soluţie.

$$a_1=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\quad \sigma_1=\|a_1\|_2=3,\quad u_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},\|u_1\|_2^2=6;$$

$$H_1=I_3-\frac{2}{\|u_1\|_2^2}u_1u_1^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&-2\\-1&1&2\\-2&2&4\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&1&2\\1&2&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$A_2=H_1A_1=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&1&2\\1&2&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&4&5\\1&-1&1\\2&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&3\\0&0&3\\0&3&3\end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_2=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix},\quad \|\bar{a}_2\|_2=3,\quad u_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \|u_2\|_2^2=2;$$

$$\overline{\mathbf{a}_2}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix},\quad \|\overline{\mathbf{a}_2}\|_2=3,\quad \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \|\mathbf{u}_2\|_2^2=2$$

$$H_2 = I_3 - \frac{2}{\|u_2\|_2^2} u_2 u_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = R = H_2 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Q = (H_2 H_1)^T = H_1 H_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

6. Determinaţi factorizarea QR cu rotatori Givens a matricei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Soluţie. Pentru anularea lui **A(2,1)=1** se formează:

$$c_{21} = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \qquad s_{21} = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$G_{21} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix};$$

$$A_1 = G_{21} \cdot A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 5 & 7 & 11 \\ 0 & -6 & -3 \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Se anulează $\mathbf{A_1(3,1)=2}$:

$$c_{31} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \qquad s_{31} = -\frac{2}{3};$$

$$G_{31} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 3\sqrt{5} & 0 \\ -2\sqrt{5} & 0 & 5 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = G_{31} \cdot A_1 = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 3\sqrt{5} & 0 \\ -2\sqrt{5} & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 7 & 11 \\ 0 & -6 & -3 \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{bmatrix}_0$$

$$= \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 45 & 45 & 45 \\ 0 & -18\sqrt{5} & -9\sqrt{5} \\ 0 & -9\sqrt{5} & -27\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & 3\sqrt{5} & 3\sqrt{5} \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -9 \end{bmatrix}.$$

Se anulează $A_2(3,2) = -\dfrac{3}{\sqrt{5}}$:

$$c_{32} = \frac{-\dfrac{6}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\dfrac{36}{5} + \dfrac{9}{5}}} = -\frac{6}{3\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \qquad s_{32} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$G_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix};$$

$$A_3 = G_{32} \cdot A_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & 3\sqrt{5} & 3\sqrt{5} \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = R$$

$$Q = (G_{32} \cdot G_{31} \cdot G_{21})^T = G_{21}{}^T \cdot G_{31}{}^T \cdot G_{32}{}^T$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

7. Determinaţi coeficienții matricelor Q și R din factorizarea Gram-Schmidt a unei matrice A:

A=QR

$$[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n] = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

Rezolvare

1) $a_1 = q_1 r_{11}; \Rightarrow r_{11} = \|a_1\|;$

$$q_1 = \frac{a_1}{r_{11}};$$

2) $a_2 = q_1 r_{12} + q_2 r_{22}; / q_1^T; \Rightarrow r_{12} = q_1^T a_2;$

$$r_{22} = \frac{\|a_2 - q_1 r_{12}\|}{\|q_2\|} = \|a_2 - q_1 r_{12}\|;$$

$$q_2 = \frac{a_2 - q_1 r_{12}}{r_{22}};$$

3) $a_3 = q_1 r_{13} + q_2 r_{23} + q_3 r_{33}; / q_1^T; \Rightarrow r_{13} = q_1^T a_3;$

$/ q_2^T; \Rightarrow r_{23} = q_2^T a_3;$

4) $r_{33} = \|a_3 - q_1 r_{13} - q_2 r_{23}\|;$

$$q_3 = \frac{a_3 - q_1 r_{13} - q_2 r_{23}}{r_{33}};$$

....

Observaţie:

Se pot generaliza formulele:

$$r_{kj} = q_k^T a_j;$$

$$r_{jj} = \left\| a_j - \sum_{k=1}^{j-1} q_k r_{kj} \right\|;$$

$$q_j = \frac{a_j - \sum_{k=1}^{j-1} q_k r_{kj}}{r_{jj}};$$

8. Determinaţi factorizarea QR folosind factorizarea Gram-Schmidt a matricei:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Soluţie.

$$r_{11} = \|a_1\|_2 = 3,$$

$$q_1 = \frac{a_1}{r_{11}} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$r_{12} = \langle q_1, a_2 \rangle = 3,$$

$$a_2 - r_{12} q_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$r_{22} = \|a_2 - r_{12} q_1\|_2 = 3,$$

$$q_2 = \frac{a_2 - r_{12} q_1}{r_{22}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$r_{13} = \langle q_1, a_3 \rangle = 3,$$

$$r_{23} = \langle q_2, a_3 \rangle = 3,$$

$$a_3 - r_{13} q_1 - r_{23} q_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$r_{33} = \|a_3 - r_{13} q_1 - r_{23} q_2\|_2 = 3,$$

$$q_3 = \frac{a_3 - r_{13} q_1 - r_{23} q_2}{r_{33}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; Q = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observaţie:

Pentru a verifica dacă soluţia obţinută este cea corectă se poate folosi una din metodele:

1. QR=A
2. $QQ^T = I_n$;
3. Orice 2 coloane sunt ortogonale în Q
4. Orice coloană normată în Q

Probleme propuse

1.Scrieți o funcție matlab function [Q,R] = GrSch(A), pentru calculul factorizării QR pentru o matrice superior Hessenberg utilizând ortogonalizarea Gram - Schmidt.
2.Scrieți o funcție matlab function [Q,R] = Givens(A), pentru calculul factorizării QR pentru o matrice superior Hessenberg utilizând rotatori Givens.

3. Să se determine descompunerea QR pentru $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$(prin una din cele 3 metode).

4.Scrieţi relaţiile care realizează triunghiularizarea ortogonală cu reflectori Householder a unei matrice tridiagonale.Scrieţi o funcţie Matlab care rezolvă un sistem cu matrice tridiagonală, utilizând relaţiile stabilite mai sus. Funcţia are semnătura: **function x= Householder(a,b,c,d)** în care a este diagonala matricei, b-subdiagonala, c-supradiagonala, d-termenii liberi.

5. Fie matricea $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & \frac{8}{3}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.Determinți factorizarea QR pentru matricea A folosind algoritmul Gram-Schmidt clasic.

6. Se consideră vectorii $u, v \in R^n$ ortonormaţi ($\|u\|_2 = 1$, $\|v\|_2 = 1$, $u^T v = v^T u = 0$). Se formează vectorul $x = u + v$.
a) Să se dea exemplu de doi vectori ortonormaţi;
b) Să se calculeze $\|x\|_2$;
c) Se formează matricea $H = I_n - x \cdot x^T$. Să se calculeze $H \cdot u$, $H \cdot v$ şi $\|H\|_2$;
d) Dacă $A = uv^T$, calculaţi $B = H^{-n} A H^n, n \geq 2$.

7. Un vector $u \in R^n$ poate fi adus la un vector de normă 1 prin împărţirea cu norma sa. Fie reflectorii Householder $U = I_n - 2uu^T$, $\|u\|_2 = 1$ şi $V = I_n - vv^T$, $\|v\|_2 = \sqrt{2}$.
a) daţi un exemplu numeric pentru vectorii $u, v \in R^n$;
b) calculaţi reflectorii U, V pentru exemplul de la punctul a);
c) calculaţi $U \cdot u$ şi $V \cdot v$;
d) dacă $A = uv^T$, calculaţi $B = UAV^T$ şi $C = VAU^T$.