Laborator 2

Sisteme de ecuaţii liniare

Responsabili

1. Sfrent Andrei (andreisfrent@gmail.com)

2. Stoica Cosmin Ştefan (cosmin.stoica9@gmail.com)

Obiective

În urma parcurgerii acestui laborator elevul va fi capabil să:

- înţeleagă şi să folosească metode de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare;
- prezinte avantajele şi dezavantajele modurilor de rezolvare a sistemelor;
- folosească funcţiile Octave pentru rezolvarea sistemelor liniare

Breviar teoretic

Sistemele de ecuaţii reprezintă noţiunea care face legatură între lumea reală şi cea conceptuală. Printr-un sistem de ecuaţii se pot formaliza anumite procese \ fenomene din realitate şi studia. De cele mai multe ori sistemele de ecuaţii obţinute sunt unele complexe de grad superior. Analizând rezultatul urmărit şi importanţa efectelor pe care le au asupra lui toţi factorii din lumea reală se urmăreşte eliminarea acelora care nu influenţează major rezultatul pentru a se reduce sistemul de ecuaţii la unul de grad mai mic sau chiar liniar.

Fie sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Scris sub formă matriceala A · x = b cu $A \in \Re^{nxn}, b \in \Re^n$ are soluţie unică, dacă A este nesingulară($|A| \neq 0$).

Procedeul Kramer de rezolvare a unui sistem liniar devine ineficient în momentul în care numărul de ecuaţii şi necunoscute creşte (n > 10), deoarece numărul de operaţii aritmetice necesare are valoare n!n. Într-un astfel de caz sistemele liniare se rezolvă prin metode specifice:

$$\textbf{1. Metode directe } (n < 10^3): \begin{cases} \textbf{1.1} \quad \text{Rezolvarea sistemelor triunghiulare: } \begin{cases} inferior \\ superior \end{cases} \\ \textbf{1.2} \quad \text{Factorizare LU } \begin{cases} Crout \\ Doolittle \\ Cholesky \end{cases} \end{cases}$$

2.Metode iterative (aproximative /indirect),50 < n< 10^6 : $\begin{cases} \text{2.1 Jacobi} \\ \text{2.2 Gauss} - \text{Seidel} \\ \text{2.3 } Suprarelaxare \end{cases}$

1. Metode directe de rezolvare

1.1 Rezolvare sistemelor triunghiulare

Def1 : Se numeşte matrice inferior triunghiulară matricea care are toate elementele situate deasupra diagonala principală nulă.

Def2: Se numeşte sistem inferior triunghiular un sistem a cărui matrice este inferior triunghiulară.

Def3 : Se numeşte matrice superior triunghiulară matricea care are toate elementele situate sub diagonala principală nulă.

Def4: Se numeşte sistem superior triunghiular un sistem a cărui matrice este superior triunghiulară.

	Sistem inferior triunghiular	Sistem superior triunghiular
Forma sistemului	$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$
Formula de rezolvare	$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} \cdot x_j}{A_{ii}}, i = 1:n$	$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} \cdot x_j}{A_{ii}}, i = n:-1:1$

Observaţie: Un sistem de ecuaţii liniare poate fi adus la forma de sistem triunghiular prin aplicarea algoritmilor de eliminare gaussiană.

1.2 Factorizare LU

Def1: O matrice $A \in \Re^{nxn}$ admite o factorizare A = L*U cu $L \in \Re^{nxn}$ - inferior triunghiu-lară, $U \in \Re^{nxn}$ -superior triunghiulară, dacă $A_{pp} \neq 0$, p = 1:n, în care $A_{pp} = (A_{ij})_{1 \le i, j \le n}$.

Exemplu de factorizare LU:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Observatie:

1) Din această descompunere nu se pot determina coeficienţii pentru L şi U. Din această cauză se introduc unele restricţii şi astfel apar factorizările Crout, Doolittle, Cholesky.
2) [L, U] = lu(A) – funcţia Octave de factorizare LU

	Crout	Doolittle	Cholesky
Restricţii	**u_{ii}=1**	**l_{ii}=1**	A - $\begin{cases} -simetrica: A = A^T \\ -pozitiv-definita: x^T Ax > 0, \forall x \epsilon R^n \end{cases}$
Factorizarea LU	$A=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & \dots & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & u_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & \dots & u_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$	$A=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & \dots & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & \dots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & l_{23} & l_{24} & \dots & l_{2n} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{33} & \dots & l_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} & \dots & l_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{nn} \end{bmatrix}$ **A=L*L^T**
Formule de determinare a coeficienţilor lui L şi U	$L_{ip} = A_{ip} - \sum_{m=1}^{p-1} L_{im} U_{mp}, i = p:n$ $U_{pj} = \frac{A_{pj} - \sum_{m=1}^{p-1} L_{pm} U_{mj}}{L_{pp}}, j = p+1:n$ $p = 1:n$	$L_{ip} = \frac{A_{ip} - \sum_{m=1}^{p-1} L_{im} U_{mp}}{U_{pp}}, i = p:n$ $U_{pj} = A_{pj} - \sum_{m=1}^{p-1} L_{pm} U_{mj}, j = p+1:n$ $p = 1:n$	$L_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}, i = 1:n$ $L_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{jk}}{L_{jj}}, j = 1:i-1$
Utilizarea factorizărilor LU în rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare	**A*x=b** A=L*U=>$\begin{cases} L * y = b(1) \\ U * x = y(2) \end{cases}$ **Observaţie:** Se rezolvă mai întâi sistemul inferior triunghiular(1) şi apoi cel superior triunghiular (2)	Se procedează la fel ca la factorizare Crout	**A*x=b** A=L*L'=>$\begin{cases} L * y = b(1) \\ L' * x = y(2) \end{cases}$ **Observaţie:** Se rezolvă mai întâi sistemul inferior triunghiular(1) şi apoi cel superior triunghiular (2)

Observaţie: Funcţia Octave care realizează factorizarea Cholesky este: L=chol(A);

2. Metode iterative de rezolvare

Metodele iterative pornesc de la o aproximare iniţială $x^{(0)}$ a soluţiei, folosind o relaţie de recurenţă.

Plecând de la sistemului A*x=b, descompunem A=N-P, unde N este o matrice uşor de inversat.

$$(N - P) * x = b \quad (1)$$

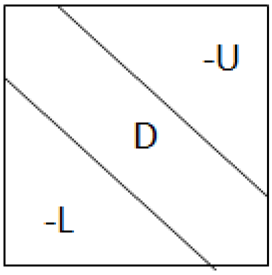
$$x = N^{-1} \cdot P \cdot x + N^{-1} \cdot b \quad (2)$$

Se deduce relația de recurenţă:

$$x^{(p+1)} = N^{-1} \cdot Px^{(p)} + N^{-1} \cdot b \qquad (3)$$

Fie $G= N^{-1} \cdot P$ –**matricea de iteraţie** şi $c = N^{-1} \cdot b$ - **vector de iteraţie**

$$x^{(p+1)} = Gx^{(p)} + c \qquad (4)$$



Matricea A se partiţionează ca **A=D-L-U**, unde:

- *D=o matrice diagonală*
- *L=o matrice strict inferior triunghiulară*
- *U=o matrice superior triunghiulară*

Observaţie:

1) Metoda iterativă este ***stabilă*** dacă şirul de iteraţii $x^{(p)}$ converge şi este consistentă daca limita şirului este egală cu o soluţie exactă
2) Oprirea iteraţiilor se face la depăşirea unui număr maxim admis de iteraţii sau la atingerea unei apropieri în normă stabilite , faţă de limită de forma:
   $\| x^{(p+1)} - x^{(p)} \| < eps * \| x^{(p)} \|$.

	Jacobi	**Gauss-Seidel**
N **P**	**N = D** **P = L + U**	**N = D – L** **P = U**
Formule de recurenţă sub formă matriceală	$G_J=D^{-1}(L+U)$ $Dx^{(p+1)}=(L+U)\,x^{(p)}+b$	$G_{GS}=(D-L)^{-1}U$ $(D-L)x^{(p+1)}=U\,x^{(p)}+b$
Formule de recurenţă pe elemente	$x_i^{(p+1)} = \dfrac{b_i - \sum_{j=1;\, j\neq i}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(p)}}{a_{ii}}$ $i = 1:n$	$x_i^{(p+1)} = \dfrac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(p+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(p)}}{a_{ii}}$ $i = 1:n$

Observaţie:

1)Metoda Jacobi este convergentă dacă A este diagonal predominantă pe linii.

2) Metoda Gauss+Seidel este convergentă dacă A este simetrică şi pozitiv-definită.

Metoda suprarelaxării

Fie w- parametrul de relaxare; wϵ(0,2);

A = N – P = N –w·N –P + w·N=(1-w) ·N –(P - w·N) => $\begin{cases} N(w) = (1-w)\cdot N \\ P(w) = P - w\cdot N \end{cases}$

G(w) =N^{-1}(w) ·P(w) = $\frac{N^{-1}}{1-w}(P - w\cdot N)$ => G(w) = $\frac{G - wI_n}{1-w}$

În practică se folosesc relaţiile:

$$N(w) = \frac{1}{w}D - L \qquad\qquad P(w) = \left(\frac{1}{w} - 1\right)D + U$$

$$G(w) = (D - w\cdot L)^{-1}\cdot[(1-w)\cdot D + w\cdot U]$$

$$w_{optim} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(G)^2}}$$

Relaţia de recurenţă:

$$x_i^{(p+1)} = \frac{wb_i + (1-w)a_{ii}x_i^{(p)} - w\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(p+1)} - w\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(p+1)}}{a_{ii}}$$

Aplicaţii

1. Fiind dată matricea $A \in \Re^{nxn}$ şi un vector coloană $b \in \Re^{n}$

a) [1 pct] Să se implementeze o funcţie MATLAB care aduce matricea A în forma superior triunghiulară prin eliminare Gaussiană.

[A, b] = Elm_Gauss(A,b);

b) [1,5 pct] Să se realizeze o funcţie MATLAB care rezolvă un sistem superior triunghiular de ecuaţii liniare. Folosindu-vă de funcţia Elm_Gauss(A, b) să scrie o funcţie de test care rezolvă sistemul de ecuaţii liniare dat prin A şi b iniţial.

x=SST(A,b);

x=test(A,b);

2. a) [2 pct] Să se scrie o funcţie MATLAB care realizează o factorizare LU (Crout/Doolittle/Cholesky – la alegere) pentru o matrice $A \in \Re^{nxn}$ dată.

[L,U]=Fact(A);

b)[1,5 pct] Fie $T \in \Re^{nxn}$ o matrice simetrică ,tridiagonală şi pozitiv definită. Scrieţi un algoritm de calcul al factorizării Cholesky T= LL^T, cu L inferior triunghiulară.(Hint: Cazul general de factorizare LU => se deduce o formulă de recurenţă).

[L,U]=choT(A)

c) [1 pct]: Să se rezolve un sistem de ecuații liniare cu matricea sistemului simetrică, tridiagonală și pozitiv definită folosind funcțiile chotTA) și SST(A,b) .

x=Sys_Tri(A,b)

3. a) [2 pct] Să se implementeze o funcție MATLAB care rezolvă un sistem de ecuații liniare prin metoda iterativă **Gauss-Seidel.**

b)[1 pct] Să se modifice funcția anterioară a rezolva sistemul anterior prin **metoda Jacobi**.

c) [BONUS: 0,5 pct]: Să se modifice programul de la 3. a) astfel încât programul să rezolve în mod eficient un sistem tridiagonal.

d) [BONUS: 0,5 pct]: (Inversarea unei matrice bazata pe factorizare LU)

Utilizați programul de la 2.a) și determinați A^{-1}. (HINT : A=L*U; L,U-matrice triunghiulare; $A^{-1}=(L*U)^{-1}=?$)