Seminar1. Sisteme de ecuaţii liniare

Responsabili:
Istrate Roxana (istrateroxana2006@gmail.com)
Andrei Sfrent (andreisfrent@gmail.com)

1 Obiective

În urma parcurgerii acestui seminar, studentul va fi capabil să:
-aplice metodele de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare
-decidă convergenţa unei metode iterative.

Breviar Teoretic

Fie sistemul de ecuaţii linare cu n ecuaţii şi n necunoscute:

$$1.\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Sistemul (1) este echivalent cu ecuatia matriceala A*x=b , unde:

$$A= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Observaţie. Sistemul (1) are solutie unică $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$.
Metode de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare:

- metode directe
  - metode gaussiene
  - factorizarea LU
  - factorizarea Cholesky
  - factorizarea Crout
  - factorizarea Dolittle
- metode iterative
  - Jacobi
  - Gauss-Seidel
  - metoda suprarelaxării

2 Metode directe

2.1 Metoda substituţiei(pentru sistemele triunghiulare)

2.1.1 Rezolvarea sistemelor triunghiulare

sisteme superior triunghiulare

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \qquad a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

$\mathrm{x}_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, i = n : -1 : 1, a_{ii} \neq 0$

sisteme inferior triunghiulare

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

$\mathrm{x}_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, i = 1 : n, a_{ii} \neq 0$

2.1.2 Eliminarea gaussiană

Această metodă are scopul de a aduce un sistem de tipul sistemului (1) la forma triunghiulară urmând a aplica formulele prezentate mai sus.
Transformarea Gauss , care aplicată unui vector îi păstrează identice primele p elemente şi pe restul le anulează este :
$\mathrm{T}_p = I_n - t_p \cdot e_p^T, unde\ e_p\ este\ coloana\ p\ din\ matricea\ unitate\ si\ :$
$t_p = \ [0 \cdots 0 \frac{x_{p+1}}{x_p} \cdots \frac{x_n}{x_p}\ ].$

Eliminarea Gauss constă în determinara vectorului Gauss pentru fiecare coloană "i" din matricea coeficienţilor şi aplicarea transformării Gauss coloanelor i:n.

2.2 Factorizarea LU

Această metodă presupune descompunerea matricei sistemului, A, astfel:
A = L * U ; L- inferior triunghiulară , U - superior triunghiulară.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

În funcţie de condiţiile impuse, se disting factorizările: Crout, Choleski şi Doolittle.
Importanţa factorizării LU constă în transformarea unui sistem cu matrice pătratică in două sisteme triunghiulare.

2.2.1 Factorizarea Crout

Condiţia ce se impune este : $u_{ii} = 1$.

$\quad Parametrii\ factorizării\ Crout$:

$l_{i1} = a_{i1}; i = 1 : n$

$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}; j = 2 : n$

$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}; i \geq j$

$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} * (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}); i < j$

2.2.2 Factorizarea Doolitle

Condiţia ce se impune este : $l_{ii} = 1$.

$\quad Parametrii\ factorizării\ Doolittle$:

$u_{i1} = a_{i1}; i = 1 : n$

$l_{i1} = \frac{a_{1j}}{u_{11}}; i = 2 : n$

$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} * (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}); i > j$

$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$

2.2.3 Factorizarea Cholesky

Condiţia ce se impune este : $U = L^T$.

$\quad Parametrii\ factorizării\ Cholesky$:

$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}; i = 1 : n$

$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}; j = 1 : i - 1.$

3 Metode iterative

Fie sistemul Ax = b. Putem descompune matricea A , astfel: A = N-P. Atunci:

$\quad (N - P)x = b;$

$\quad x^{(p+1)} = N^{-1}Px^{(p)} + N^{-1}b;$

Dacă notăm : $G = N^{-1}P$ *si* $c = N^{-1}b$:

$\quad x^{(p+1)} = Gx^{(p)} + c;$

În general se consideră descompunerea :

$\quad A = D - L - U;$

$L -$ *inferior triunghiulară*, $U -$ *superior triunghiulară*, $D -$ *diagonală*.

3.1 Metoda Jacobi

$N = D;$

$P = L + U;$

$G_J = D^{-1}(L + U);$

$x_i^{(p+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(p)}}{a_{ii}}; i \neq j.$

3.2 Metoda Gauss-Seidel

N = D - L;
P = U;
G$_{GS} = (D - L)^{-1}U$;
$x_i^{(p+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(p+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(p)}}{a_{ii}}$.

3.3 Metoda suprarelaxării

N(ω) $= \frac{1}{\omega}D - L$;
$P(\omega) = (\frac{1}{\omega} - 1)D + U$;
$G_\omega = (D - \omega * L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$;
$x_i^{(p+1)} = \omega * \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(p+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(p)}}{a_{ii}} + (1-\omega) x_i^{(p)}$.

3.4 Condiţii de convergenţă pentru metodele iterative

- Condiţia necesară şi suficientă de convergenţă :
  $\rho(G) < 1$: *raza spectrală a matricei de iteraţie* G; *cea mai mare valoare proprie în modul.*
- Condiţii suficiente de convergenţaă:
  A - diagonal dominantă;
  A - simetrică şi pozitiv definită.

- Fie două metode iterative care converg. Vom spune ca prima metodă este mai rapid convergentă decât a doua , dacă:
  $\rho(G_1) < \rho(G_2)$;

Probleme Rezolvate

1. Stabiliţi pentru ce valori ale lui α, *sistemul* :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ -\alpha x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \quad , \quad \text{poate fi rezolvat prin metoda Jacobi.}$$

Soluţie:
Matricea asociată sistemului este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\alpha \\ 2 & 5 & 2 \\ -\alpha & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Metoda Jacobi converge(sistemul poate fi rezolvat prin metoda Jacobi) daca A este diagonal dominantă pe linii:

$$\begin{cases} 1 > 2 - \alpha \\ 5 > 2 + 2 \end{cases} .$$

Pentru $\alpha > 1$ *sistemul poate fi rezolvat prin metoda Jacobi.*

2. Fie sistemul Ax = b, A$\epsilon R^{2x2}, x, b\epsilon R^2$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.*Matricea A nu este diagonal dominantă pe linii. În aceste condiţii este convergentă metoda Gauss − Seidel?*

   Soluţie :
   Determinăm matricea de iteraţie a sistemului pentru metoda Gauss−Seidel : G_{GS}.

   A = D - L - U : D = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, L = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, U = $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.Atunci:

   $G_{GS} = (D - L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$

   $= \frac{1}{6} * \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$

   $= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$

   $\lambda I - G_{GS} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \Rightarrow \sigma(G_{GS}) = \{0, \frac{1}{3}\}$ *si* $\rho(G_{GS}) = \frac{1}{3} < 1.$

   Deci metoda Gauss − Seidel e convergentă.

3. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare Ax=b , cu A $\epsilon R^{nxn}, b\epsilon R^n$, *cu* :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & d_1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & d_2 & & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & & d_3 & 0 & 0 \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ & & c_{n-2} & 0 & a_{n-2} & 0 & d_{n-2} \\ & & & \ddots & & a_{n-1} & 0 \\ & & & & c_n & 0 & a_n \end{bmatrix}.$$

   Scrieţi o funcţie MATLAB cu semnătura function x = Gauss(a, b, c, d) care rezolvă sistemul prin eliminare gaussiană.

   Soluţie:

```
function x = Gauss(a,b,c,d)
    A = ConstrMatrix(a,c,d)
    b = b(:);
    n = length(a);
    for p=1:n-2
        T = zeros(n,1);
        T(p+2) = c(p)/a(p);
        A(p+2,p) = 0;
        for j = p+1:n
            A(:,j) = TGy(A(:,j),T,p);
            b = TGy(b,T,p);
        endfor
    endfor
    x = zeros(n,1);
```

```
x(n) = b(n)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
    x(i) = [b(i) - A(i,i+1:n)*x(i+1:n)]/A(i,i);
endfor
endfunction
function A = ConstrMatrix(a,c,d)        a = a(:);
    c = c(:);
    d = d(:);
    k = 1;
    j = 1;
    n = length(a);
    A = zeros(n);
    for i = 1:n
        x = zeros(n,1);
        x(i) = a(i);
        if(i ≤ n − 2)
            x(i + 2) = c(j);
            j + +;
        endif
        if(i ≥ 3)
            x(i − 2) = d(k);
            k + +;
        endif
        A(:, i) = x;
    endfor
endfunction
function y = TGy(y, t, p)
    n = length(y);
    y(p + 1 : n) = y(p + 1 : n) − t(p + 1 : n) ∗ y(p);
endfunction
```

4. Determinaţi factorizarea Doolittle pentru matricea : A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$.Scrieţi o funcţie MATLAB function [L,U] = Doolittle(A), A ϵR^{nxn}.
Soluţie :

Pentru factorizarea Doolittle: L= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix}$, U = $\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$, A = LU $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u12 \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u12 + u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_{11} = 1 \\ u_{12} = 2 \\ l_{21}u_{11} = 3 \Rightarrow l_{21} = 3 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} = 13 \Rightarrow u_{22} = 7 \end{cases}.$$

$$Deci\ L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Se folosesc formulele de la factorizarea Doolittle:
$u_{i1} = a_{i1}; i = 1 : n$

$l_{i1} = \frac{a_{1j}}{u_{11}}; i = 2 : n$
$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} * (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} ukj); i > j$
$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$

```
function [L,U] = Doolittle(A)
    n = length(A);
    U = zeros(n);
    L = zeros(n);
    U(1,1:n) = A(1,1:n);
    L(2:n,1) = A(2:n,1)/U(1,1);
    for i=2:n
        for j=2:n
            if(i ≤ j)
                U(i,j) = A(i,j) − L(i,1:i−1) ∗ U(1:i−1,j);
            else
                L(i,j) = 1/U(j,j) ∗ (A(i,j) − L(i,1:j−1)U(1:j−1,j));
            endif
        endfor
    endfor
endfunction
```

Probleme Propuse

1. Fie matricea $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.Determinaţi factorizarea LU Crout.

2. Fie A matrice simetrică şi pozitiv definită , având factorizarea Cholesky A=LL^T.*Arătaţi că :* $det(A) = L_{11}^2 * L_{22}^2 * ... * L_{nn}^2$.

3. Fie sistemul Ax = b , A$\epsilon R^{2x2}, b\epsilon R^2, cu\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.
   Determinaţi raza spectrală a matricei de iteraţie Jacobi.

4. Fie sistemul Ax = b , A$\epsilon R^{2x2}, b\epsilon R^2, cu\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.*Matricea A nu este diagonal dominantă pe linii.*
   În aceste condiţii este convergentă metoda Jacobi?

5. Fie matricea $\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & a_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_n & a_n \end{bmatrix}$.Scrieţi o funcţie
   MATLAB function x=Solve(a,b,c,d) care să rezolve sistemul Ax = b.

6. Folosiţi metoda Gauss-Seidel pentru a rezolva următorul sistem de ecuaţii:
$$\begin{cases} 2x - y - z + 30t = 120 \\ x - 20y - z + 3t = 40 \\ x + y - 10z + 2t = 40 \\ 10x + 2y + 3z - t = 80 \end{cases}$$

7. Fie o matrice A ϵR^{nxn} *tridiagonală si sistemul de ecuaţii* $Ax = b$, *cu* $b, x\epsilon R^n$.*Scrieţi o funcţie MATLAB*, $function\ x = solJacobi(A, b, x0)$, *care rezolvă sistemul de ecuaţii prin metoda iterativă Jacobi.În ce condiţii metoda converge?*

8. Fie sistemul A*x=b , A$\epsilon R^{mxm}, x, b\epsilon R^m$.*Dacă numărul* $q = ||I - A||$ *are proprietatea* $q\epsilon(0, 1)$(*se va folosi doar* $||.||_1$), *atunci sistemul are soluţie unică x si soluţia sistemu poate fi obţinută iterativ prin sirul definit astfel* :
$x_0 = 0, x_{n+1} = (I - A) * x_n + b$.
a)Demonstraţi relaţia :
$||x_n - x|| \le \frac{1}{1-q} * ||x_{n+1} - x_n|| \le \frac{q^n}{1-q} * ||b||$.
b)Determinaţi cea mai mică valoare n care satisface inegalitatea :
$||x_n - x|| < \epsilon$.
c)Discutaţi sistemul de ecuaţii de mai jos în conformitate rezultatele de mai sus :
$$\begin{cases} x_1 + 0.4x_2 - 0.1x_3 = 0.9 \\ 0.2x_1 + x_2 + 0.3x_3 = -1 \\ -0.3x_1 - 0.4x_2 + x_3 = -1.1 \end{cases}$$
d) Scrieţi o funcţie MATLAB care determină soluţia unui sistem folosind recurenţa din enunţ.
e) Determinaţi complexitatea metodei iterative propuse.