APROXIMARE UNIFORMĂ

Definirea şi caracterizarea celui mai bun polinom de aproximare uniformă (polinomul minimax)

Pentru orice funcţie continuă pe un interval inchis $f \in C([a, b])$ se defineşte *norma aproximării uniforme* prin: $\| f \| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Cel mai bun polinom de aprxoximare uniformă de ordin n (*aproximant uniform* sau *polinom minimax*) al unei funcţii: $f \in C([a,b])$ este acel polinom $p_n^*(x) \in \Pi_n$ care se îndepărtează cel mai puţin, în sensul normei de funcţia dată, adică:

$$\|f - p_n^*\| = \min_{p_n \in \Pi_n} \|f - p_n\| = \min_{p_n \in \Pi_n} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)|$$

Teorema de caracterizare: $p_n^*(x)$ este aproximant uniform de ordin n, dacă: $e(x) = f(x) - p_n^*(x)$ atinge de $n+2$ ori valoarea extremă $+E$ sau $-E$, cu alternanţe de semn între două extreme consecutive.

Aceasta presupune existenţa a $n+2$ puncte distincte în $[a,b]$: $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ cu proprietatea de alternanţă a extremelor, adică:

$$e(x_k) = f(x_k) - p_n^*(x_k) = (-1)^k E, \; k = 0 : n + 1,$$
$$E = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n^*(x)| .$$

Cel mai bun polinom de aproximare uniformă este unic.

Dacă funcţiile $1, x, x^2, \ldots, x^n, f$ sunt liniar independente şi generează un spaţiu vectorial V şi dacă orice element din V are $n+2$ zerouri în $[a,b]$ atunci:

1^0. $f - p_n^*$ posedă exact $n+2$ extreme alternante

2^0. a şi b fac parte dintre punctele extreme

3^0. între punctele extreme nu există alte extreme

4^0. $f - p_n^*$ este strict monotonă între două puncte extreme alternante consecutive.

În determinarea celui mai bun polinom de aproximare uniformă se folosesc *polinoame Cebâşev*, întrucât acestea prezintă proprietatea de oscilaţie cerută de teorema de caracterizare.

Proprietăţi ale polinoamelor Cebâşev.

Polinoamele Cebâşev se definesc prin relaţia: $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

Dacă se introduce notaţia:

$$x = \cos\theta,$$
$$T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

Se observă că: $x \in [-1,1]$ şi $T_n(x) \in [-1,1]$, adică:

$$T_n : [-1, 1] \to [-1, 1].$$

Polinomul $T_n(x)$ este un polinom de gradul n în x având coeficientul puterii dominante 2^{n-1}:

$$T_n(x) = 2^{n-1} \cdot x^n + \ldots$$

Polinoamele Cebâşev se calculează cu relaţia de recurenţă:

$$T_{p+1}(x) - 2 \cdot x \cdot T_p(x) + T_{p-1}(x) = 0, \qquad p = 1 : n - 1,$$

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x.$$

Intr-adevăr relaţia de recurenţă se poate exprima prin relaţia trigonometrică evidentă:

$$\cos (p + 1)\theta + \cos (p - 1)\theta = 2 \cdot \cos \theta \cdot \cos p\theta$$

Zerourile polinomului Cebâşev se obţin din ecuaţia trigonometrică:

$$\cos n\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_k = (2 \cdot k + 1)\frac{\pi}{2n},$$

$$x_k = (2 \cdot k + 1)\frac{\pi}{2n}.$$

Punctele de extrem ale polinomului Cebâşev: $T_n(x_p) = \mp 1$ sunt:

$$x_p = \cos\frac{p\pi}{n}.$$

Relaţiile de ortogonalitate satisfăcute de aceste polinoame:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_p(x) \cdot T_q(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \begin{cases} 0 & p \neq q, \\ \frac{\pi}{2} & p = q \neq 0, \\ \pi & p = q = 0. \end{cases}$$

se deduc din identitatea trigonometrică:

$$\cos (p\theta) \cdot \cos (q\theta) = \frac{1}{2}[\cos (p + q)\theta + \cos (p - q)\theta]$$

Dezvoltarea în serie de polinoame Cebâşev a unei funcţii definite pe $[-1, 1]$ este:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p T_p(x),$$

unde:

$$a_p = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) T_p(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

şi se obţine din dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei:

$$f(\cos\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \cdot \cos p\theta.$$

$$a_p = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(\cos\theta) \cdot \cos p\theta d\theta,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\theta) d\theta.$$

O *funcţie generatoare* a polinoamelor Cebâşev este:

$$\frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2} = 1 + t \cdot T_1(x) + t^2 \cdot T_2(x) + \ldots$$

Polinomul Cebâşev monic de gradul n (având coeficientul puterii maxime 1) $T_n^{\sim}(x)$ se obţine din polinomul Cebâşev corespunzător prin împărţire cu 2^{n-1}

$$T_n^{\sim}(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$$

Relaţia de recurenţă pentru polinoame Cebâşev monice se deduce din relaţia corespunzătoare polinoamelor Cebâşev obişnuite:

$$T_{p+1}^{\sim}(x) - x \cdot T_p^{\sim}(x) + \frac{1}{4} \cdot T_{p-1}^{\sim}(x) = 0.$$

Polinoamele Cebâşev monice au aceleaşi zerouri şi aceleaşi puncte în care prezintă extreme ca şi polinoamele Cebâşev corespunzătoare. Valorile extremelor sunt însă diferite şi anume:

$$T_n^{\sim}(x_p) = \frac{(-1)^p}{2^{n-1}} \text{cu} x_p = \cos\frac{p\pi}{n} \text{ si } p = 0 : n \cdot$$

Dintre polinoamele monice de ordin n definite pe $[-1,1]$, *polinomul monic Cebâşev are norma aproximării uniforme minimă şi:*

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} \left| T_n^{\sim}(x) \right| < \max_{x\in[-1,1]} \left| P_n(x) \right| \quad \forall P_n \in \Pi_n^{\sim}$$

Presupunând că ar exista un polinom $P_n \in \Pi_n^{*}$ cu proprietatea:

$$\max_{x\in[-1,1]} P_n(x) < \frac{1}{2^{n-1}},$$

atunci polinomul:

$$Q = T_n^{\sim} - P_n \in \Pi_{n-1}^{\sim}.$$

ar prezenta în punctele: $x_p = \cos p\pi,\ p = 0 : n$, n alternanţe de semn, adică ar avea n zerouri pe $[-1,1]$ ceeace este imposibil fiind un polinom de grad $n-1$.
Teorema ne permite să găsim abscisele $x_0, x_1, \ldots, x_n$ din $[-1,1]$ care minimizează eroarea interpolării Lagrange

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0) \ldots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} = P_n(x) + R_{n+1}^{\sim}(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.$$

Restul interpolării este minimizat în sensul aproximării uniforme pentru: $R^{\sim}_{n+1} = T^{\sim}_{n+1}$, adică pentru punctele:

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \cdot \pi,$$

şi în acest caz avem majorarea:

$$\max_{x \in [-1,1]} \left| f(x) - P_n(x) \right| < \frac{1}{2^n \cdot (n+1)!} \cdot \max_{x \in [-1,1]} f^{(n+1)}(x),$$

Intervalul de interpolare poate fi extins la $[a,b]$ cu schimbarea de variabilă:

$$t = \frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{b+a}{2}$$

Determinarea polinomului minimax al unei functii date

Se face mai intâi o schimbare liniară de variabilă pentru a se trece în domeniul $[-1,1]$:

$$x = \alpha \cdot t + \beta = \frac{2}{b-a} \cdot t - \frac{b+a}{b-a}.$$

Vom considera în cele ce urmeaza că funcţiile sunt definite pe $[-1,1]$ în variabila x.
În cazul particular în care funcţia f este un polinom de grad $n+1$:

$$f(x) = a_{n+1} \cdot x^{n+1} + a_n \cdot x^n + \ldots + a_0,$$

cel mai bun polinom de aproximare uniformă de ordin n este:

$$p_n^*(x) = f(x) - \frac{a_{n+1}}{2^n} \cdot T_{n+1}(x)$$

Intr-adevăr $f(x) - p_n^*(x) = \frac{a_{n+1}}{2^n} \cdot T_{n+1}(x)$ satisface teorema de caracterizare, prezentând $n+2$ alternanţe: $\frac{1}{2^n}, -\frac{1}{2^n}, \ldots,$ în punctele:

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1} \qquad k = 0 : n+1.$$

În cazul general, în care f este o funcţie continuă oarecare, o aproximare a polinomului minimax se determină pornind de la dezvoltarea în serie de polinoame Cebâşev a funcţiei:

$$f(x) - p_n^*(x) = \sum_{p=0}^{n} c_p \cdot T_p(x) + c_{n+1}T_{n+1}(x) + \sum_{p=n+2}^{\infty} c_p T_p(x)$$

Dacă dezvoltarea în serie a lui f este rapid convergentă:

$$\sum_{p=n+2}^{\infty} c_p \cdot T_p(x) \approx 0,$$

atunci, dacă se ia pentru polinomul minimax dezvoltarea limitată:

$$p_n^*(x) = \sum_{p=0}^{n} c_p \cdot T_p(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p \cdot x^p.$$

se constată că diferenţa $f(x) - p_n^*(x)$ prezintă proprietatea de oscilaţie din teorema de caracterizare

Dezvoltarea limitată reprezintă o aproximaţie a polinomului minimax întrucât se neglijează termenii de la rangul **n+2** în sus.

Se pot obţine aproximaţii mai bune ale polinomului minimax folosind algoritmii lui Rémes.

În algoritmul 1 Remes, în locul rezolvării sistemului:

$$\sum_{k=0}^{n} a_i \cdot x_i^k + (-1)^k \cdot E = f(x_k), \qquad k = 0 : n+1,$$

cu necunoscutele a_i, $i = 0 : n$ şi E, obţinut din:

$$f(x_k) - p_n^*(x_k) = (-1)^k \cdot E \qquad k = 0 : n+1,$$

$$p_n^*(x_k) = \sum_{k=0}^{n} a_i \cdot x_i^k.$$

se construiesc polinoamele de interpolare Lagrange: $R_{n+1}(x)$ şi $S_{n+1}(x)$ ale funcţiilor $f(x)$ şi $(-1)^k$:

$$R_{n+1}(x_k) = f(x_k), \qquad k = 0 : n+1,$$
$$S_{n+1}(x_k) = (-1)^k,$$

cu care se face aproximarea în:

$$p_n^*(x) = R_{n+1}(x) - E \cdot S_{n+1}(x)$$

Valoarea E se determina impunând coeficientul puterii **n+1** să fie **0**:

$$a_{n+1} = r_{n+1} - E \cdot s_{n+1} = 0,$$

$$E = \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}},$$

$$a_i = r_i - \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} \cdot s_i, \qquad i = 0 : n.$$

Algoritmul 2 Rémés porneşte de la polinomul astfel determinat şi stabileşte valoarea extremă a funcţiei $e(x)$; fie xM abscisa pentru care se atinge acest extrem.

```
[a, x, y] = Remes1(n, f, nrapel) este
/* Intrări:
/* n = gradul polinomului minimax
/* f = funcţia aproximată prin polinomul minimax
/*nrapel = indicator al primului apel al procedurii
/*         în care se iniţializeaza tabelele x şi y.
/*   Apelurile următoare făcute din Remes2
/*   modifică o singură componentă din x şi y
/* Ieşiri:
/* a = tabel coeficienţi polinom minimax
/* x= abscisele punctelor de oscilaţie
/* y = ordonatele punctelor de oscilaţie
```

```
{ dacă nrapel = 0 atunci
    pentru k ← 0 : n+1
      {x(k) ← cos (k*pi/(n+1))
        y(k) ← f(x(k))
        dacă k este impar atunci z(k) ← -1
                            altfel z(k) ←  1
      }
  calcul coeficienţi r polinom Lagrange în (x, y)
  calcul coeficienţi s polinom Lagrange în (x, z)
  E ← r(n+1) / s(n+1)
  pentru k ← 0 : n
    a(k) ← r(k) - E*s(k)
}
```

Dacă **xM** este unul din puncte, determinarea polinomului minimax s-a încheiat, în caz contrar se încadrează între două puncte consecutive: $x_p < xM < x_{p+1}$ atunci se înlocuieşte secvenţa de puncte:

$x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{n+1}$, prin:

$x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, xM, x_{p+1}, \dots, x_{n+1}$, dacă $e(x_p) \cdot e(xM) > 0$,

$x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x_p, xM, \dots, x_{n+1}$, dacă $e(xM) \cdot e(x_{p+1}) > 0$.

şi se reiau paşii pentru noul ansamblu de puncte.

```
[a, x, y] = Remes2(n, f) este
/* Intrări:n = gradul polinomului minimax
/*   f = funcţia aproximată prin polinomul minimax
/* Ieşiri:
/*   a = tabelul coeficienţilor polinomului minimax
/*   x = abscisele punctelor de oscilaţie
/*   y = ordonatele punctelor de oscilaţie
{ nrapel ← 0
  execută Remes1(n, f, a, x, y, nrapel)
  repetă
    căutare xm a.î |f(xm)-pn(xm)| să fie maxim
    dacă xm nu se află printre abscisele x atunci
      { încadrează x(p) < xm < x(p+1)
        dacă (y(p)-pn(x(p)))*(f(xm)-pn(xm)) > 0 atunci
          { x(p) ← xm
            y(p) ← ym
          }
        altfel
          { x(p+1) ← xm
            y(p+1) ← ym
          }
        nrapel ← nrapel + 1
        execută Remes1(n, f, a, x, y, nrapel)
      }
  pină când xm coincide cu una din abscisele x
}
```

Economizare Cebâşev.

Polinoamele Cebâşev se pot folosi pentru a reduce gradul polinomului de aproximare, cu o pierdere minimă de precizie.
De obicei funcţiile se aproximează prin polinoame Taylor:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

cu restul aproximării:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n + 1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Polinoamele Taylor sunt exacte în vecinătatea lui x_0, dar precizia lor scade rapid pe măsură ce x se indepărtează de x_0.
Intrucât polinoamele Cebâşev prezintă un minim al normei aproximării uniforme, ele pot fi folosite pentru reducerea gradului polinomului Taylor fără a depăşi toleranţa impusă erorii
In acest scop, în polinomul Taylor P_n se înlocuieşte puterea cea mai mare x^n cu o combinaţie de polinoame Cebâşev şi se neglijează termenul conţinând pe $T_n(x)$, comiţând prin aceasta o eroare care se majorează prin:

$$a_n \cdot T_n(x) < a_n.$$

De exemplu pentru funcţia $f(x) = e^x$, pentru care se admite o toleranţă a erorii $Emax = 0.05$, polinomul Taylor de grad 4 pentru o dezvoltare în vecinătatea lui 0 este:

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

Majorarea erorii este:

$$f(x) - P_4(x) < \frac{f^{(5)}(\theta) \cdot x^5}{5!} < \frac{e}{120} \approx 0.023 < 0.05$$

Pentru a reduce gradul polinomului de aproximare, înlocuim puterea cea mai mare x^4 cu o combinaţie de polinoame Cebâşev:

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{24}\left[T_0(x) + \frac{1}{2}T_2(x) + \frac{1}{8}T_4(x)\right] =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{64} + \frac{1}{48}(2x^2 - 1) + \frac{1}{192}T_4(x) =$$

$$\frac{191}{192} + x + \frac{13}{24} \cdot x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{192} \cdot T_4(x)$$

Prin reducerea termenului în $T_4(x)$ se comite o eroare majorată de:

$$\frac{1}{192} \cdot T_4(x) < \frac{1}{192} \approx 0.005$$

Eroarea cumulată:

$$R_4(x) + \frac{1}{192} \cdot T_4(x) < 0.023 + 0.005 = 0.028 < E_{max} = 0.05$$

nu depăşeşte toleranţa admisă.

APROXIMARE ÎN SENSUL CELOR MAI MICI PĂTRATE

Cea mai bună aproximare într-un spaţiu prehilbertian. Definire şi caracterizare

Un *spaţiu prehilbertian* este un dublet (F,u) în care F este un *spaţiu vectorial cu scalari în corpul* R *(sau* C*)*, iar u un *produs scalar*, adică o aplicaţie: $u:F \times F \to R$ $(f_1,f_2) \to <f_1,f_2>$ cu $f_1,f_2 \in F$, având proprietăţile:

linearitate	$<f_1+f_2, f_3>=<f_1,f_3> + <f_2,f_3>$,
	$<c.f_1, f_2>=c.<f_1, f_2>$,
comutativitate	$<f_1, f_2> = <f_2, f_1>$
definire pozitivă	$<f, f> \geq 0$
nesingularitate	$<f, f> = 0 \Leftrightarrow f = 0$

Exemple:

$F=R^3$ $$<x,y>=\sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

$F=C([a,b])$ $$<f,g>=\int_a^b f(x)\cdot g(x)\cdot w(x)\,dx$$

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\cdot g(x_i)\cdot w(x_i)$$

Fie F un spaţiu prehilbertian şi $G \subseteq F$ un subspaţiu al său de dimensiune finită, adică având un număr finit de elemente liniar independente.
Definim *norma unui element* $f \in F$ prin $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$
Cel mai bun aproximant în sensul celor mai mici pătrate a unui element $f\in F$ în subspaţiul G este un element g cu proprietatea $\|f - g^*\| = \min_{g\in G}\|f - g\|$

Teorema 1 *Condiţia necesară şi suficientă ca* $g^* \in G \subset F$ *să fie cel mai bun aproximant a lui* $f \in F$ *este ca* $<f-g^*, g>=0, \forall g\in G$.

Condiţia este necesară; fie g^* cel mai bun aproximant al lui $f \in F$ şi presupunem că există g_1 astfel încât $<f-g^*,g_1>=k\neq 0$. Pentru un element $g_2 = g^* + \frac{k}{\|g_1\|^2} g_1$ avem

$$\|f - g_2\|^2 = \langle f - g_2, f - g_2\rangle = \left\langle f - g^* - \frac{k}{\|g_1\|^2} g_1, f - g^* - \frac{k}{\|g_1\|^2} g_1 \right\rangle =$$

$$\langle f - g^*, f - g^*\rangle - 2\frac{k}{\|g_1\|^2}\langle f - g^*, g_1\rangle + \frac{k^2}{\|g_1\|^4}\langle g_1, g_1\rangle = \|f - g^*\|^2 - \frac{k^2}{\|g_1\|^2}$$

$\|f - g_2\| < \|f - g^*\|$, ceea ce contrazice ipoteza că g^* este cea mai bună aproximare, adică $k=0$.
Condiţia este suficientă : fie $g_1\in G$ astfel ca $<f-g_1, g>=0, \forall g\in G$.
$\|f-g\|^2=<f-g,f-g>=<f-g_1-(g-g_1), f-g_1-(g-g_1)>= \|f-g_1\|^2+\|g-g_1\|^2$ adică $\|f-g1\|<\|f-g\|$ ceea ce implică $g1=g^*$.

Teorema 2 *Cea mai bună aproximare în sensul celor mai mici pătrate* $g^*\in G$ *a lui* $f\in F$ *este unică.*

Presupunem că există două cele mai bune aproximaţii g_1^* şi g_2^* ale lui f, ceea ce implică:

$<f-g1^*,\ g>=<f-g2^*,\ g>=0$, pentru $\forall g\in G$ şi în particular pentru $g=g_1^*-g_2^*$ $\|g_1^*-g_2^*\|^2$ $= <g_1^* - f + f - g_2^*,\ g> = \underbrace{\langle f - g_2^*, g\rangle}_{0} - \underbrace{\langle f - g_1^*, g\rangle}_{0} = 0$, adică $g_1^*=g_2^*$.

Pentru o bază, $u_1, \dots, u_n$ din G (i.e. pentru un set minimal de elemente liniar independente), un element oarecare $g\in G$ şi cel mai bun aproximant se exprimă ca

$$g = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k, \qquad g^* = \sum_{k=1}^{n} c_k^* u_k$$

$$\langle f - g^*, g\rangle = \left\langle f - g^*, \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle f - g^*, u_j\rangle = 0$$

$$\langle f - g^*, u_j\rangle = 0, \qquad j = 0 : n$$

$$\langle g^*, u_j\rangle = \langle f, u_j\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{n} \langle c_k^* u_k, u_j\rangle = \langle f, u_j\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \langle u_k, u_j\rangle = \langle f, u_j\rangle, \qquad j = 1 : n$$

Sistemul poartă numele de *sistem normal*
Sistemul normal este simetric (produsele scalare fiind comutative, în general) şi rău condiţionat.
Determinantul sistemului poartă numele de *determinant Gram*.

$$\begin{cases} \langle u_1, u_1\rangle \cdot c_1 & + & \langle u_2, u_1\rangle \cdot c_2 & + \dots + & \langle u_n, u_1\rangle \cdot c_n & = & \langle f, u_1\rangle \\ \langle u_1, u_2\rangle \cdot c_1 & + & \langle u_2, u_2\rangle \cdot c_2 & + \dots + & \langle u_n, u_2\rangle \cdot c_n & = & \langle f, u_2\rangle \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \langle u_1, u_n\rangle \cdot c_1 & + & \langle u_2, u_n\rangle \cdot c_2 & + \dots + & \langle u_n, u_n\rangle \cdot c_n & = & \langle f, u_n\rangle \end{cases}$$

Sistemul normal este simetric (produsele scalare fiind comutative, în general) şi rău condiţionat.
Determinantul sistemului poartă numele de *determinant Gram*.

$$G(u_1, \dots u_n) = \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1\rangle & \dots & \langle u_1, u_1\rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle u_1, u_1\rangle & \dots & \langle u_1, u_1\rangle \end{vmatrix}$$

Intrucât rezolvarea directă a sistemului prezintă dificultăţi, se preferă aducerea la forme particulare; astfel pentru o bază ortonormată sistemul normal devine diagonal. Componentele bazei c_k^*, în acest caz, se numesc *coeficienţi Fourier* şi au forma

$$c_k^* = <f, u_k>, \qquad k=0:n.$$

Calitatea aproximării se evaluează prin distanţa

$$\|f - g^*\|^2 = \langle f - g^*, f - g^*\rangle = \langle f - g^*, f\rangle - \underbrace{\langle f - g^*, g^*\rangle}_{0} = \langle f, f\rangle - \langle g^*, f\rangle$$

$$\|f - g^*\|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^* \langle f, u_k\rangle$$

Pentru o bază ortonormată se obţine forma simplificată

$$\left\| f - g^* \right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^{*2}$$

Aproximarea continuă în sensul cmmp

In *aproximarea continuă în sensul celor mai mici pătrate* se alege produsul scalar de forma

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) \cdot f(x) \cdot g(x)\, dx$$

$$\| f \| = \sqrt{\int_a^b w(x) \cdot f^2(x)\, dx}$$

unde $w(x)>0$ este o funcţie de ponderare, definită pe (a,b) aleasă adecvat scopurilor aproximării.

Aproximarea continuă în sensul celor mai mici pătrate $g^*(x)$ a lui $f(x)$ pe $C([a,b])$ este definită prin

$$\underbrace{\int_a^b w(x) \cdot \left[f(x) - g^*(x)\right]^2 dx}_{E^*} = \min_{g \in G} \underbrace{\int_a^b w(x) \cdot [f(x) - g(x)]^2 dx}_{E}$$

Considerând o bază $u=\{u_0, \dots, u_n\}$ pentru G şi scriind $g = \sum_{k=0}^{n} c_k u_k$ minimul este obţinut pentru

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = 0 \quad \text{cu } i = 0 : n$$

Aceste ecuaţii sunt echivalente cu cele obţinute din teorema de caracterizare. Concret, trebuie satisfăcută condiţia de ortogonalitate

$$\int_a^b w(x) \cdot \left[f(x) - g^*(x)\right] \cdot g(x)\, dx = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^* \int_a^b w(x) \cdot u_k(x) \cdot u_j(x)\, dx = \int_a^b w(x) \cdot f(x) \cdot u_j(x)\, dx, \qquad j = 1 : n$$

Alegem baza polinomială, cu $\dim G=n+1$, şi notăm pentru comoditate indicii începând de la 0

$u_0(x)=1,\ u_1(x)=x, \dots,\ u_n(x)=x^n$,

Sistemul normal obţinut pentru aproximarea continuă în sensul celor mai mici pătrate este

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^* \int_a^b w(x) \cdot x^{k+j}\, dx = \int_a^b w(x) \cdot f(x) \cdot x^j\, dx, \qquad j = 0 : n$$

Baza polinomială nu este ortonormată; sistemul normal, pentru $w(x)=1$ este un sistem Hilbert, foarte rău condiţionat.

Pornind de la o bază oarecare $u_0, u_1, \dots, u_n$, se poate trece la o bază ortonormată $v_0, v_1, \dots, v_n$, folosind *algoritmul de ortogonalizare Gram-Schmidt*

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{u}_0, \qquad \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{w}_0}{\|\mathbf{w}_0\|_2}$$

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_0 \rangle \mathbf{v}_0, \qquad \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2}$$

$$\mathbf{w}_m = \mathbf{u}_m - \sum_{p=0}^{m-1} \langle \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_p \rangle \mathbf{v}_p, \qquad \mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{w}_m}{\|\mathbf{w}_m\|_2}$$

Pentru $\mathbf{F}=\mathbf{R}^n$, cu produsul scalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k \mathbf{y}_k = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ implementarea algoritmului de ortogonalizare este:

```
function V = Orto_Schmidt(U)
% Intrări:
%  U- o bază oarecare (dată prin n vectori)
% Ieşiri:
%  V -  baza ortonormată corespunzătoare
 [m,n]=size(U);
 W=zeros(n);
 for m = 1 : n
      W(:,m) = U(:,m);
      for  j = 1 : m-1
            c = U'(:,m)*V(:,j);
            W(:,m) = W(:,m) - c*V(:,j);
      end;
      V(:,m) = W(:,m) / norm( W(:,m) );
 end
```

Aproximare continuă trigonometrică în sens cmmp

Spaţiul $\mathbf{G}$ este generat de cele $\mathbf{2n+1}$ componente ale bazei trigonometric

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin(x) \;\; \cos(x) \cdots \sin(nx) \;\; \cos(nx)$$

relaţiile de ortogonalitate sunt:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_q(x) u_r(x)\, dx = \delta_{qr} = \begin{cases} 0, & q \neq r \\ 1, & q = r \end{cases}$$

pentru orice funcţie $f \in C([-1,1])$

$$\langle u_0, u_0 \rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx = 1$$

$$\langle u_{2q-1}, u_{2q-1} \rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 qx\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2qx)\, dx =$$

$$1 - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin 2qx}{2q} \Big|_0^{2\pi} = 1$$

$$\left\langle u_{2q}, u_{2q}\right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 qx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2qx)dx = 1 + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin 2qx}{2q}\Big|_0^{2\pi} = 1$$

$$\left\langle u_0, u_{2q-1}\right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin qx\,dx = 0$$

$$\left\langle u_0, u_{2q}\right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos qx\,dx = 0$$

$$\left\langle u_{2q-1}, u_{2r-1}\right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin qx\sin rx\,dx = 0$$

$$\left\langle u_{2q}, u_{2r}\right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos qx\cdot\cos rx\,dx = 0$$

$$\left\langle u_{2q-1}, u_{2r}\right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin qx\cdot\cos rx\,dx = 0$$

Sistemul normal devine diagonal şi:

$$a_0 = \left\langle f, u_0\right\rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx \qquad a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin px\,dx \qquad a_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos px\,dx$$

$$g^* = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{p=1}^{n}\left(a_p\cos px + b_p\sin px\right)$$

Aproximare continuă Cebâşev în sensul cmmp.

Spaţiul **G** este generat de cele **n+1** componente ale bazei Cebâşev

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ T_1(x),\ \ldots,\ T_n(x)$$

Baza este ortogonală în raport cu produsul scalar:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_q(x)\cdot T_r(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & q \neq r, \\ \frac{\pi}{2} & q = r \neq 0, \\ \pi & q = r = 0. \end{cases}$$

$$p_n^*(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1T_1(x) + \ldots + a_nT_n(x)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$a_p = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\cdot T_p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Aproximare discretă în sensul cmmp.

In *aproximarea discretă în sensul celor mai mici pătrate*, funcţia $f \in F = C([a,b])$ este cunoscută pe un suport finit dat de punctele $x_0, x_1, \ldots, x_m$ prin valorile ei $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_m)$ şi se doreşte a fi aproximată optimal în sensul celor mai mici pătrate printr-o funcţie $g \in G \subset F$, cunoscută prin valorile sale $g(x_0), g(x_1), \ldots, g(x_m)$ în aceleaşi puncte.

Subspaţiul G de dimensiune $n+1$, este generat de elementele liniar independente $u(x_0), u(x_1), \ldots, u(x_n)$ din F.

Ţinând seama de faptul că funcţiile f şi g se cunosc numai în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_m$, produsul scalar şi norma vor fi definite pe spaţiul vectorilor valorilor funcţiilor din $C([a,b])$ în punctele menţionate prin

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{m} w(x_i)\, f(x_i)\, g(x_i)$$

$$\| f \| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} w(x_i) \cdot f^2(x_i)}$$

Problema aproximării discrete în sensul celor mai mici pătrate este de a găsi funcţia $g^*(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k^* u_k(x)$ Adică coeficienţii c_k^*, $k=0 : n$ astfel încât:

$$\| f(x) - g^*(x) \| = \min_{g \in G} \| f(x) - g(x) \|$$

În aceste condiţii aproximarea discretă în sensul celor mai mici pătrate există şi este unică.

Un sistem de funcţii ortonormate discret satisface condiţiile

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i) u_j(x_i) u_k(x_i) = 0, \quad \text{pentru } j \neq k, \quad j, k = 0 : n,$$

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i) u_j^2(x_i) = 1$$

Teorema de caracterizare $\sum_{i=0}^{p} w(x_i) \cdot [f(x_i) - g^*(x_i)] \cdot g(x_i) = 0$

conduce la sistemul normal

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^* \sum_{i=0}^{p} w(x_i) \cdot u_k(x_i) \cdot u_j(x_i) = \sum_{i=0}^{p} w(x_i) \cdot f(x_i) \cdot u_j(x_i), \qquad j = 0 : n$$

Pentru un sistem de ecuaţii normale diagonal coeficienţii Fourier sunt

$$c_k^* = \sum_{i=0}^{p} w(x_i)\, f(x_i)\, u_k(x_i), \qquad k = 0 : n$$

iar calitatea aproximării este dată de

$$\sum_{i=0}^{p} w(x_i) \cdot \left[f(x_i) - \sum_{k=0}^{n} c_k^* \cdot u_k(x_i) \right]^2 = \sum_{i=0}^{p} w(x_i) \cdot f^2(x_i) - \sum_{k=0}^{n} c_k^{*2}$$

Sistemul normal obţinut folosind baza polinomială are forma

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^* \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, f(x_i)\, x_i^j, \qquad j = 0 : n$$

Aproximare discretă trigonometrică în sens cmmp.

Baza $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \cdots \sin nx, \cos nx$
este ortogonală în raport cu produsul scalar discret

$$\sum_{k=1}^{2n+2} u_q(x_k) \cdot u_r(x_k) = \begin{cases} 0, & q \neq r \\ n+1, & q = r \end{cases}, \qquad q, r = 1 : 2n+2$$

în care suportul aproximării este constituit din punctele echidistante din intervalul $[0, 2\pi]$

$$x_k = \frac{2\pi \cdot k}{2n+2} = \frac{k\pi}{n+1}, \qquad k = 1 : 2n+2$$

Coeficienţii polinomului minimal de aproximare discretă trigonometrică în sensul celor mai mici pătrate rezultă din sistemul diagonal Gram

$$a_0 = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{k=1}^{2n+2} f\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

$$b_j = \langle f, \sin jx \rangle = \sum_{k=1}^{2n+2} f\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \sin \frac{k\pi}{n+1} j$$

$$a_j = \langle f, \cos jx \rangle = \sum_{k=1}^{2n+2} f\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \cos \frac{k\pi}{n+1} j, \qquad j = 1 : n.$$

Aproximarea discretă Cebâşev în sensul cmmp

Baza $\frac{1}{\sqrt{2}}, T_1(x), \cdots, T_n(x)$ este ortogonală în raport cu produsul scalar discret

$$\sum_{k=0}^{n} u_q(x_k) u_r(x_k) = \begin{cases} 0, & q \neq r \\ \frac{n+1}{2}, & q = r \end{cases}, \qquad q, r = 0 : n$$

Punctele x_k de pe suportul evaluării produsului scalar sunt rădăcinile polinomului $T_{n+1}(x_k)=0$,

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \qquad k = 0 : n$$

Facem substituţia

$$x = \cos\theta \Rightarrow \theta_k = \frac{2k+1}{2n+2} \pi$$

$$\sum_{k=0}^{n} T_q(x_k) T_r(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \cos q\theta_k \cos r\theta_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left[\cos(q+r)\theta_k + \cos(q-r)\theta_k\right]$$

$$p(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 T_1(x) + \cdots + a_n T_n(x)$$

$$\frac{n+1}{2} a_0 = \langle f, u_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{n} f_k, \qquad a_0 = \frac{\sqrt{2}}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f_k$$

$$\frac{n+1}{2} a_j = \langle f, u_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} f_k T_j(x_k), \qquad a_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f_k T_j(x_k)$$

Polinoame ortogonale

Un şir de funcţii $\{p_i(x)\}_{i\in N}$ este *ortonormat*, dacă

$<p_i, p_j>=0, i\neq j$

$\|p_i\|_2=1$

Dacă şirul $\{u_i\}$ este liniar independent, atunci există un şir ortonormat $\{v_i\}$ format din combinaţii liniare de elemente ale lui $\{u_i\}$ astfel încât subspaţiul liniar generat de $u_0, u_1, \ldots, u_i$ coincide cu subspaţiul liniar generat de $v_0, v_1, \ldots, v_i$.
Înlocuind şirul $\{u_i\}$ prin şirul de polinoame $1, x, x^2, \ldots, x^n$ se obţine un şir de polinoame ortogonale corespunzător şirului $\{w_i\}$ $p_0, p_1, \ldots, p_n$

$p_0=1$

$$p_i = x^i - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\langle x^i, p_j\rangle}{\| p_j \|^2} p_j$$

O familie de polinoame ortogonale se defineşte în mod unic în raport cu un interval $[a,b]$ şi o funcţie pondere $w(x)$.

Anumite produse scalare satisfac *relaţia de simetrie* $<xf, g>=<f, xg>$ situaţie în care:

$p_0(x)=1, \quad p_1(x)=x-\alpha_0$

$p_{k+1}(x)=(x-\alpha_k)p_k(x)-\beta_k p_{k-1}(x), \qquad k = 1:n-1$

$$\alpha_k = \frac{\langle xp_k, p_k\rangle}{\| p_k \|^2}, \qquad k = 0 : n-1,$$

$$\beta_k = \frac{\| p_k \|^2}{\| p_{k-1} \|^2}, \qquad k = 1 : n-1.$$

Pentru un polinom ortonormat

$$p_n(x) = a_{nn}x^n + a_{n-1,n}x^{n-1} + a_{0n}$$

avem relaţia de recurenţă

$$\frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} \cdot p_{n+1}(x) + \left(\frac{a_{n-1,n}}{a_{n,n}} - \frac{a_{n,n+1}}{a_{n+1,n+1}} - x\right) \cdot p_n(x) + \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \cdot p_{n-1}(x) = 0$$

dacă polinomul este numai ortogonal, fără a fi ortonormat, atunci relaţia de recurenţă este

$$\frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} \cdot p_{n+1}(x) + \left(\frac{a_{n-1,n}}{a_{n,n}} - \frac{a_{n,n+1}}{a_{n+1,n+1}} - x\right) \cdot p_n(x) + \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \cdot \frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2} p_{n-1}(x) = 0$$

Polinoamele ortogonale mai des utilizate *Cebâşev*, *Legendre*, *Laguerre* şi *Hermite*

Cebâşev	$T_{n+1}-2xT_n+T_{n-1}=0,$	$T_0=1, \ T_1=x$
Legendre	$(n+1)L_{n+1}-(2n+1)xL_n+nL_{n-1}=0,$	$L_0=1, \ L_1=x$
Laguerre	$G_{n+1}-(2n+1-x)G_n+n^2G_{n-1}=0,$	$G_0=1, \ G_1=1-x$
Hermite	$H_{n+1}-2xH_n+2nH_{n-1}=0,$	$H_0=1, \ H_1=2x$

```
function z=Leg(n)
% calcul coeficienti polinom Legendre de grad n
y=[1 0];   %L1(x)=x
if n==0
  z=x;
elseif n==1
  x=1;     %L0(x)=1
  z=y;
else
  for k=2:n
   z=[(2*k-1)/k*y 0]-[0 0 (k-1)/k*x];
      x=y;
      y=z;
   end
end
```

Proprietăţi polinoame ortogonale

1. un polinom ortogonal are rădăcini reale, distincte situate în intervalul $[a,\ b]$

2. un polinom ortogonal prezintă proprietatea de ortogonalitate în raport cu orice polinom (neortogonal) cu grad mai mic decât el
$\langle p_n, q_k \rangle = 0,\ k=0:n-1$, în particular $q_k = x^k$, unde produsul scalar, prin ponderea w şi intervalul $[a,b]$ individualizează un anumit polinom ortogonal.

$$0 = \langle p_n,\ p_k \rangle = \left\langle p_n,\ \sum_{j=0}^{k} a_j x^j \right\rangle = \sum_{j=0}^{k} a_j \langle p_n,\ x^j \rangle$$ de unde $\langle p_n,\ x^j \rangle = 0$ şi

$$\left\langle p_n, \sum_{j=0}^{k} c_j x^j \right\rangle = \langle p_n, q_k \rangle = 0$$

3. rădăcinile polinomului $p_n(x)$ *determină intervale de separare pentru rădăcinile polinomului* $p_{n-1}(x)$

Dacă $x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn}$ sunt rădăcinile lui $p_n(x)$ şi $x_{1,n-1}, x_{2,n-1}, \dots, x_{n-1,n-1}$ - rădăcinile lui $p_{n-1}(x)$, ambele ordonate crescător, atunci

$$x_{1n} < x_{1,n-1},$$
$$x_{nn} > x_{n-1,n-1},$$
$$x_{i-1,n-1} < x_{i,n} < x_{i-1,n},\ 1 < i < n.$$

adică rădăcinile lui $p_n(x)$ se află între rădăcinile lui $p_{n-1}(x)$ pe care le folosesc ca intervale de separare.

Capătul stâng α al intervalului de separare a primei rădăcini $\alpha < x_{1,n} < x_{1,n-1}$, şi capătul drept β al intervalului de separare a ultimei rădăcini $x_{n-1,n-1} < x_{n,n} < \beta$ se determină impunând variaţia semnului polinomului la capetele intervalului de separare a rădăcinii

$$p_n(x_{1,n-1}) \cdot p_n(\alpha) < 0,$$
$$p_n(x_{n-1,n-1}) \cdot p_n(\beta) < 0.$$

O rădăcină separată într-un interval poate fi localizată prin bisecţie (înjumătăţirea intervalului).

```
function x = Radacini(n, 'f', x)
% Intrări:  n = gradul polinomului ortogonal
%f=funcţia pt calcul polinom ortogonal
```

```
%x=vectorul celor n rădăcini ale polinomului
%x(1) contine iniţial rădăcina polinomului de grad 1
for k = 2 : n
     x(0) = x(1) -h;
     while feval(f,x(1))*feval(f,x(0)) >0
        x(0) = x(0) - h;
     end;
     x(k) = x(k-1) +h;
     while feval(f,x(k-1))*feval(f,x(k)) >0
        x(k) = x(k) + h;
     end
     for i = 1 : k
         a = x(i-1);
         b = x(i);
         do
           y(i) = (a+b)/2;
           if feval(f,a)*feval(f,y(i))> 0
              a = y(i);
           else
              b = y(i);
           end
         while abs(feval(f,y(i)))<e or  b-a<e;
     end
   for i = 1 : k
      x(i) = y(i);
   end
  end
```

4. *minimul integralei* $\min_{q_n \in \Pi_n} \int_a^b w(x)\, q_n^2(x)\, dx$ *este realizat de către polinomul ortogonal* $p_n(x)$, *definit în mod unic de ponderea* $w(x)$ *şi de intervalul* $[a,b]$

Descompunem polinomul $q_n(x)$ după baza reprezentată de polinoamele ortogonale $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$

$q_n(x) = p_n(x) + \alpha_{n-1} p_{n-1}(x) + \ldots + \alpha_0 p_0(x)$

$$\int_a^b w(x) q_n^2(x)\, dx = \int_a^b w(x) p_n^2(x)\, dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b w(x) \alpha_i^2 p_i(x)\, dx$$

Termenii de forma $\int_a^b 2w(x)\, \alpha_i\, \alpha_j\, p_i(x)\, p_j(x)\, dx$ dispar, datorită ortogonalităţii. Se observă că minimul integralei se obţine pentru toţi $\alpha_i=0$, ceea ce conduce la $q_n(x)=p_n(x)$

Polinoamele ortogonale pot fi obţinute şi folosind *relaţia lui Rodrigues*

$$p_n(x) = \frac{K_n}{w(x)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} G_n(x)$$

în care K_n este o constantă, iar funcţia $G_n(x)$, specifică unui anumit polinom ortogonal verifică condiţiile

$G_n(a) = G_n'(a) = G_n''(a) = \ldots = G_n^{(n-1)}(a) = 0$
$G_n(b) = G_n'(b) = G_n''(b) = \ldots = G_n^{(n-1)}(b) = 0$

Pentru polinoamele ortogonale uzuale, funcţia $G_n(x)$ este:

$$\frac{(1 - x^2)^n}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Cebâşev ordin 1

Cebâşev ordin 2 $\left(1 - x^2\right)^n \sqrt{1 - x^2}$

Legendre $\left(x^2 - 1\right)^n$

Laguerre: $x^n e^{-x}$

Hermite: e^{-x^2}

Formula lui Rodrigues, pentru polinoamele ortogonale

Cebâşev ordin 1: $(-1)^n \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{1 - x^2}}{2^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \frac{d^n}{dx^n} \frac{\left(1 - x^2\right)^n}{\sqrt{1 - x^2}}$

Cebâşev ordin 2: $(-1)^n \frac{(n + 1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(1 - x^2\right)^n \sqrt{1 - x^2}$

Legendre: $(-1)^n \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left(1 - x^2\right)^n$

Laguerre: $\frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x}\right)$

Hermite: $(-1)^n e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right)$