Interpolare cu funcţii spline

Curbele pot fi reprezentate în plan prin:

- ***ecuaţii explicite***: De exemplu $y=\sqrt{(r^2-x^2)}$ şi $y=-\sqrt{(r^2-x^2)}$

reprezintă un cerc cu centrul în origine, de rază **r**

- ***ecuaţii implicite***: $x^2+y^2=r^2$
- ***ecuaţii parametrice***: $x(t)=r\cos t$ şi $y(t)=r\sin t$

Reprezentarea prin ecuaţii explicite, de forma $y=f(x)$ şi nici ecuaţiile implicite nu asigură reprezentarea curbelor având mai multe valori într-un punct (nu sunt funcţii).
$f(p)=f(x,y)=0$ nu tratează corect tangentele verticale la curbă.
Forma parametrică:

$$p(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

- este mult mai flexibilă
- permite reprezentarea de curbe care nu sunt funcţii (au mai multe valori într-un punct)
- este independentă de coordonate

Specificarea unei curbe se face prin:

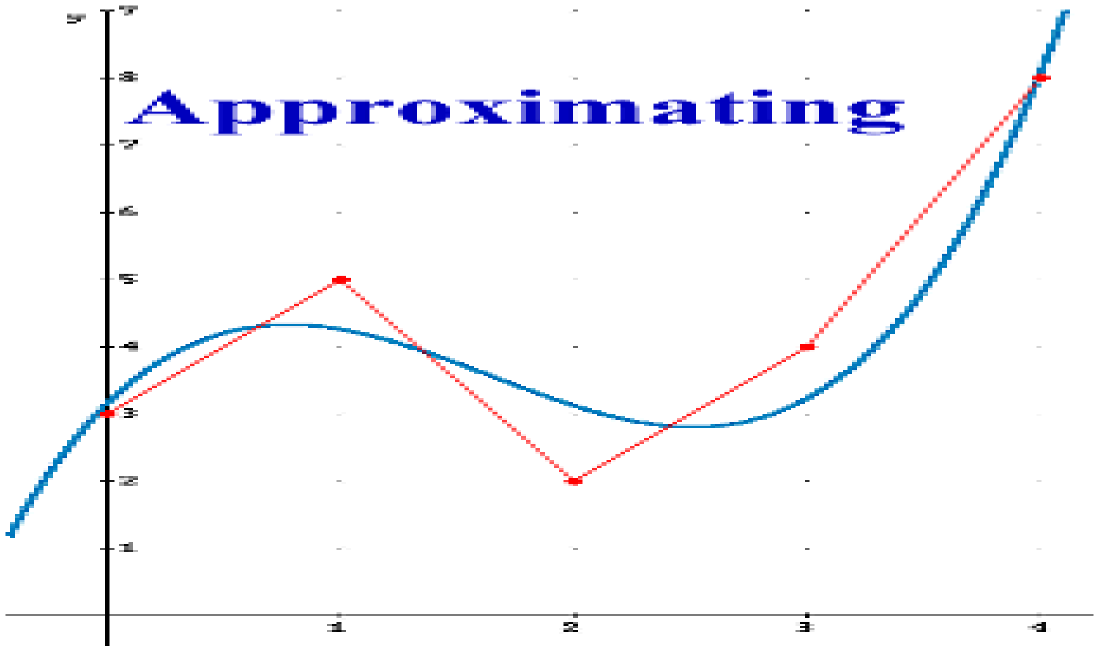
- ***puncte de control*** – mulţime de puncte care influienţează forma curbei
- ***noduri*** – puncte de control care se află pe curbă

Un spline este o curbă parametrică definită prin puncte de control.

- Un *spline* este o funcţie $S:[a, b)\rightarrow R$, definită local pe mai multe intervale prin $P_i:[t_i, t_{i+1}) \rightarrow R$, cu $a=t_0 < t_1 <...< t_{k-1} =b$

$$S(t)=P_0(t), \quad t_0 \le t < t_1$$
$$S(t)=P_1(t), \quad t_1 \le t < t_2$$
$$S(t)=P_{k-2}(t), \quad t_{k-2} \le t < t_{k-1}$$

- Funcţiile $p_i(t)$ sunt de regulă polinoame de grad 3
- Nodurile t_i se aleg deobicei echidistante, definind un spline *uniform*
- Dacă în vecinătatea nodurilor t_i, $S\in C^{ri}$, atunci spline-ul are *netezimea* C^{ri}. (adică spline-urile P_{i-1} şi P_i au aceleaşi derivate de ordin 0 până la r_i)
- Splineul de grad 0 este *splineul treaptă*, cel de ordin 1 este *spline liniar* şi coincide cu poligonul punctelor de control.
- Un spline utilizat – *spline-ul cubic natural* are gradul 3 şi continuitatea C^2. În plus, la capete: $S''(a)= S''(b) = 0$.
- Splineurile de grad **n** utilizate în analiza numerică au continuitatea $S(t)\in C^{n-1}[a,b]$
- Splineurile utilizate în Adobe şi PostScript au continuitatea $S(t) \in C^1[a,b]$
- Pentru asigurarea continuităţii C^2, funcţiile spline trebuie să aibă cel puţin gradul 3
- Funcţiile spline pot fi:
- *funcţii spline de interpolare* – care trec prin toate punctele de control
- *funcţii spline de aproximare* – care nu trec prin toate punctele de control



Funcţii spline de interpolare în clasă C^1.

Vom alege polinoame de interpolare de grad mic, valabile pe subintervale

$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$
$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$

şi vom considera funcţii de interpolare liniare, locale pe subintervalele

$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$

$p_i(x) = a_i x + b_i, \quad i=0:n-1$

în care cei $2n$ parametri se determină din *condiţiile de interpolare:*

$p_i(x_i) = f(x_i), \quad i=0:n-1$
$p_{n-1}(x_n) = f(x_n)$

şi a *condiţiilor de racordare* (*continuitate* în punctele interioare):

$p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1}), \quad i=0:n-2$

Interpolarea liniară prezintă dezavantajul discontinuităţii derivatelor în punctele interioare.

$$a_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0 : n - 1$$

$$b_i = \frac{x_{i+1} \cdot f(x_i) - x_i \cdot f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}$$

Prin alegerea unor funcţii de interpolare de gradul 3 se poate realiza o interpolare Hermite, care presupune şi fixarea valorii derivatelor pe suportul interpolării :

$f'(x_0), f'(x_1), \ldots, f'(x_n)$

O funcţie spline cubică se exprimă sub forma:

$S_i(x)=a_i+b_i(x-xi)+c_i(x-xi)^2+d_i(x-xi)^3$

sau *parametric*

$S_i(t)=a_i+b_ih_it+c_ih_i^2t^2+d_ih_i^3t^3, \quad t\in[0,1]$

în care s-a notat $h_i=x_{i+1}-x_i$ şi s-a efectuat schimbarea de variabilă:

$$t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{h_i}$$

Baza *Bernstein* : $(1-t)^3,\ 3t(1-t)^2,\ 3t^2(1-t),\ t^3$ cu $t\in[0,1]$
reduce volumul de calcule necesar determinării coeficienţilor.

$$s_i(t) = a'_i(1-t)^3 + 3b'_it(1-t)^2 + 3c'_it^2(1-t) + d'_it^3$$

Avem $2n+2$ condiţii de interpolare de tip Hermite:

$$s_i(x_i)=f(x_i)$$
$$s'_i(x_i)=f'(x_i),\ i=0:n$$

şi $2n-2$ condiţii de racordare (continuitate şi derivabilitate în punctele interioare):

$$s_i(x_{i+1})=s_{i+1}(x_{i+1})$$
$$s'_i(x_{i+1})=s'_{i+1}(x_{i+1}),\ i=0:n-2$$

$$a'_i = f(x_i) \qquad b'_i = f(x_i) + \frac{h_i}{3}f'(x_i)$$

$$d'_i = f(x_{i+1}) \qquad c'_i = f(x_{i+1}) - \frac{h_i}{3}f'(x_{i+1})$$

$$s_i(t) = y_i(1-t)^3 + (3y_i + h_iy'_i)t(1-t)^2 + (3y_{i+1} - hy'_{i+1})t^2(1-t) + y_{i+1}t^3$$

Eroarea interpolării pentru funcţiile spline în clasă C^1 este:

$$E(x) = \frac{(x-x_0)^2 \ldots (x-x_n)^2}{(2n+2)!} \cdot f^{(2n+2)}(\xi)$$

$$E(x) = \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}{4!} f^{(4)}(\xi) = \frac{t^2(1-t)^2h^4f^{(4)}(\xi)}{24}$$

$$E(x) \le \frac{(1/2)^2(1/2)^2h^4f^{(4)}(\xi)}{24} = \frac{M_4h^4}{384}$$

Funcţii spline de interpolare în clasă C^2.

Considerăm numai $n+1$ condiţii de interpolare de tip Lagrange:

$$s_i(x_i)=f(x_i),\ i=0:n-1$$
$$s_{n-1}(x_n)=f(x_n)$$

rezultă:

$$a_i=f(x_i),\ i=0:n-1$$

$$a_{n-1} + b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1}h_{n-1}^2 + d_{n-1}h_{n-1}^3 = f(x_n) \equiv a_n$$

$$a_i = f(x_i), \quad i = 0:n$$

Dispunem de mai multe grade de libertate pentru condiţiile de racordare: continuitatea valorilor şi a derivatelor de ordinul 1 şi 2 în punctele interioare

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$$

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \qquad i = 0 : n-2$$

$$a_n \equiv a_{n-1} + b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1}h_{n-1}^2 + d_{n-1}h_{n-1}^3$$

$$s_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$$

$$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad i = 0 : n-2$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$$

pe care o prelungim cu **i=0:n-1**, introducând notaţia

$$b_n \equiv b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2$$

$$s_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i)$$

$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1})$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i$$

$$c_n \equiv c_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}$$

s-au obţinut astfel **4n-2** relaţii, mai putem impune 2 condiţii suplimentare

$$S_0''(x_0) = 0, \qquad S_{n-1}''(x_n) = 0$$

care definesc *funcţiile spline naturale*

$$S_0'(x_0) = f'(x_0), \qquad S_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$$

pentru *funcţii spline tensionate*.

$$a_i = f(x_i), \qquad i = 0 : n-1$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \qquad i = 0 : n-1$$

$$b_i = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{c_{i-1} + 2c_i}{3} h_{i-1}, \qquad i = 1 : n-1$$

$$h_{i-1} \cdot c_{i-1} + 2 \cdot (h_{i-1} + h_i) \cdot c_i + h_i \cdot c_{i+1} = \frac{3 \cdot (a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{3 \cdot (a_i - a_{i-1})}{h_{i-1}}$$

$$S_0''(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$

$$S_{n-1}''(x_n) = 2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} \equiv 2c_n = 0 \Rightarrow c_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & 0 & 0 & h_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \cdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \cdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} \\ \cdots \\ \frac{3(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}} - \frac{3(a_{n-1} - a_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_0'(x_0) = b_0 + 2c_0(x_0 - x_0) + 3d_0(x_0 - x_0)^2 = b_0 = f'(x_0)$$

$$b_0 = \frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1) = f'(x_0)$$

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = 3f'(x_0) - \frac{a_1 - a_0}{h_0}$$

$$S_{n-1}'(x_n) = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2 = b_n = f'(x_n)$$

$$b_n = f'(x_n) = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + (c_n - c_{n-1})h_{n-1} =$$
$$\frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1}c_{n-1} + h_{n-1}c_n,$$

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(x_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$$

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \cdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \cdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} - 3f'(x_0) \\ \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} \\ \cdots \\ \frac{3(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}} - \frac{3(a_{n-1} - a_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 3f'(x_n) - \frac{3(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Curbe Hermite.

O curbă Hermite este o cubică exprimată parametric prin:

- $$\mathbf{Q(t)= at^3+bt^2+ct +d} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^3 & \mathbf{t}^2 & \mathbf{t} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

- $$\mathbf{Q'(t)=3at^2+2bt+c} \quad \begin{bmatrix} 0 & 3\mathbf{t}^2 & 2\mathbf{t} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

Vom impune ca restricţii valorile la capete ($\mathbf{Q(0)=P_1, Q(1)=P_2}$) şi valorile derivatelor la capete ($\mathbf{Q'}(0) = \mathbf{P}_1', \ \mathbf{Q'}(1) = \mathbf{P}_2'$)

*Vectorul de control (*sau *geometria)* este : $$\mathbf{G_H} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_1' \\ \mathbf{P}_2' \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{Q(0)=d} & & \mathbf{a=2P_1-2P_2+P_1'+P_2'} \\ \mathbf{Q(1)=a+b+c+d} & & \mathbf{b=-3P_1+3P_2-2P_1'-P_2'} \\ \mathbf{Q'(0)=c} & \Rightarrow & \mathbf{c=P_1'} \\ \mathbf{Q'(1)=3a+2b} & & \mathbf{d=P_1} \end{array}$$

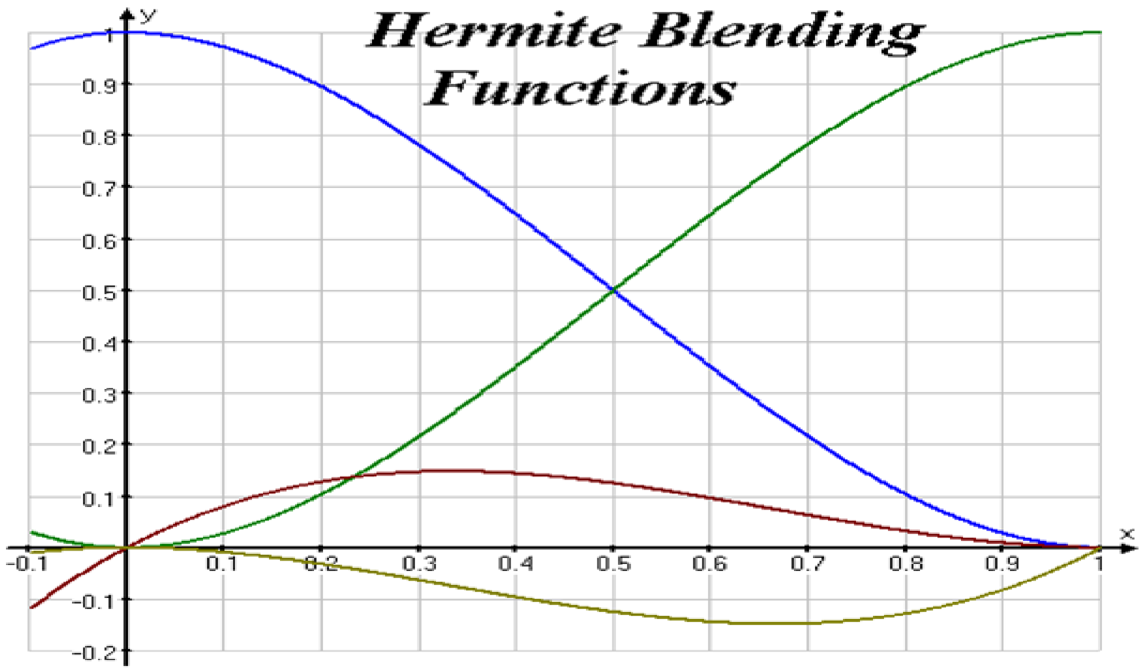
$$\mathbf{Q(t)} = \mathbf{at}^3 + \mathbf{bt}^2 + \mathbf{ct} + \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^3 & \mathbf{t}^2 & \mathbf{t} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{t}^3 & \mathbf{t}^2 & \mathbf{t} & 1 \end{bmatrix}}_{\text{baza}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M_H}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_1' \\ \mathbf{P}_2' \end{bmatrix}}_{\text{vector de control}} = \mathbf{T^T} \cdot \mathbf{M_H} \cdot \mathbf{G_H}$$

$$\mathbf{Q(t)} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{t}^3 - 3\mathbf{t}^2 + 1 & -2\mathbf{t}^3 + 3\mathbf{t}^2 & \mathbf{t}^3 - 2\mathbf{t}^2 + \mathbf{t} & \mathbf{t}^3 - \mathbf{t}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_1' \\ \mathbf{P}_2' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q(t)=(2t^3-3t^2+1)P_1+(-2t^3+3t^2)P_2+(t^3-2t^2+t)P_1'+(t^3-t^2)P_2'}$$

Ultima expresie evidenţiază contribuţia fiecărui punct de control asupra formei curbei, prin intermediul unor ***funcţii de îmbinare*** (blending functions):



Spline Hermite.

Reprezintă curbe Hermite alăturate, în punctele de joncţiune asigurându-se continuitate C^0 şi C^1. Aceasta reduce numărul gradelor de libertate în alegerea punctelor de control.

Astfel dacă considerăm două curbe Hermite cu geometriile (P_1, P_2, P'_1, P'_2) şi (Q_1, Q_2, Q'_1, Q'_2) continuitatea în joncţiune impune $Q_1=P_2$, iar derivabilitatea $Q'_1=P'_2$, deci a doua curbă are numai două puncte de control independente.

Polinoame Bernstein.

Sunt generate din dezvoltarea $[t+(1-t)]^n$

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \qquad i = 0 : n$$

Proprietăţile polinoamelor Bernstein:

- Nenegativitatea $\quad B_i^n > 0, \quad t \in (0,1]$
- Partiţia unităţii $\quad \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$
- Simetria $\quad B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$
- Maxim unic $t=i/n$ în $[0,1]$
- Formula de recurenţă $\quad B_i^n(t) = (1-t)\cdot B_i^{n-1}(t) + t\cdot B_{i-1}^{n-1}(t), \quad i = 0 : n$
- Derivare

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = \begin{cases} -nB_i^{n-1} & i = 0 \\ n\left(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)\right) & 0 < i < n \\ nB_{n-1}^{n-1}(t) & i = n \end{cases}$$

Curbe Bézier

Curba Bézier de grad $\mathbf{n}$ este definită pentru $\mathbf{n+1}$ puncte de control: $P_0, P_1, ..., P_n$ prin:

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_i^n(t), \qquad t \in [0,1]$$

în care funcţiile de îmbinare sunt polinoame Bernstein.

Poligonul punctelor de control $P_0P_1...P_n$ se numeşte *poligon Bézier* . *Poligonul Bézier conţine în interiorul lui curba Bézier*

Proprietăţi ale curbelor Bézier:

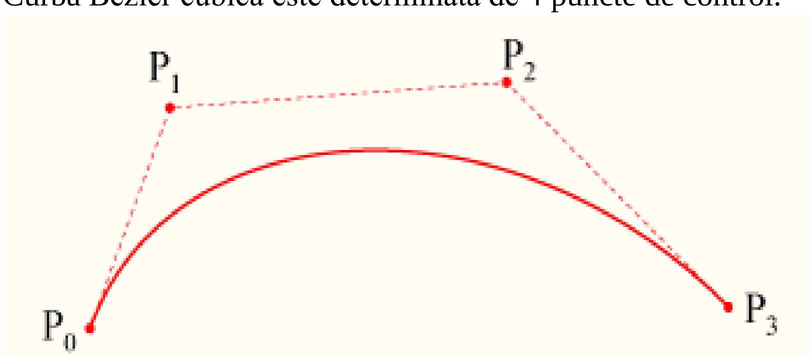
- *proprietatea punctelor de capăt* – curba începe în P_0 şi se termină în P_n
- curba Bézier este lineară numai dacă punctele de control sunt coliniare
- curba Bézier este tangentă segmentelor P_0P_1 şi $P_{n-1}P_n$.
- o curbă Bézier este conţinută complet în înfăşurătoarea convexă a punctelor de control.
- O curbă Bézier poate fi separată în alte două curbe Bézier.
- Transformările afine (translaţia şi rotaţia) aplicată punctelor de control are acelaşi efect cu aplicarea transformării afine asupra curbei

Curba Bézier cubică are forma parametrică:

$$Q(t)= P_0(1-t)^3+3P_1t(1-t)^2+3P_2t^2(1-t)+ P_3t^3, \quad t\in[0,1]$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Postscript şi GIMP folosesc pentru reprezentarea literelor curbe Bézier cubice.
Curba Bézier cubică este determinată de 4 puncte de control.



Spline-urile cubice Bézier folosesc în locul derivatelor două puncte suplimentare de control.
Punctele de control suplimentare determină derivatele, şi asigură un control mai eficient decât cel prin derivate
Derivatele la capete (în P_0 şi P_3)se exprimă se exprimă folosind celelalte două puncte de control prin:

$$P_1'=3(P_1-P_0)$$

$P_2' = 3(P_3 - P_2)$

Putem face trecerea între vectorii de control Hermite şi Bézier:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_1' \\ \mathbf{P}_2' \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{Hermite}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{Bezier}}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{Hermite}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{Bezier}}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{Bezier}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{Bezier}}$$

Funcţiile de îmbinare pentru spline-ul Bézier sunt polinoamele Bernstein B^3_i, $i=0:3$

$$\mathbf{p}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} (1-\mathbf{t})^3 \\ 3\mathbf{t}(1-\mathbf{t})^2 \\ 3\mathbf{t}^2(1-\mathbf{t}) \\ \mathbf{t}^3 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}$$

Polinoamele Bernstein au proprietăţile:

- sunt pozitive în [0,1]
- au suma egală cu 1
- curba este o combinaţie convexă a punctelor de control

Dându-se două puncte P_0 şi P_1, orice punct de pe segmentul P_0P_1 reprezintă o *curbă Bézier liniară*,definită prin:

$B_1(P_0, P_1, t) = (1-t)P_0 + tP_1, \quad t \in [0,1]$

Curba Bézier pătratică, determinată de punctele P_0şi P_2 ca puncte de interpolare şi P_1 ca punct de aproximare se poate calcula, pentru fiecare t prin 3 interpolări liniare:

$P_a = B_1(P_0, P_1, t)$
$P_b = B_1(P_1, P_2, t)$
$B_2(P_0, P_1, P_2, t) = B_1(P_a, P_b, t) = B_1(B_1(P_0, P_1, t),\ B_1(P_1, P_2, t), t)$
$B_2(P_0, P_1, P_2, t) = B_1[(1-t)P_0 + tP_1,\ (1-t)P_1 + tP_2]$
$B_2(P_0, P_1, P_2, t) = (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2]$
$B_2(P_0, P_1, P_2, t) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2, \quad t \in [0,1]$

Fonturile TrueType folosesc curbe Bézier pătratice.

Curbele Bézier modelează curbele netede în grafica pe calculator. Cele mai folosite sunt curbele Bézier pătratice şi cubice. Acestea sunt folosite ca splineuri Bézier pentru a aproxima alte funcţii

Desenarea curbelor Bézier.

Determinarea unui punct de pe curba Bézier se poate face direct prin aplicarea relaţiei pentru $\mathbf{t}$ şi punctele de control date

$$\mathbf{B}(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i^n(\mathbf{t})$$

unde $\mathbf{B}_i^n$ este baza polinoamelor Bernstein.

Metoda nu este stabilă numeric, datorită erorilor în evaluarea polinoamelor Bernstein.

Algoritmul De Casteljau utilizează relaţia de recurenţă

$$\mathbf{P}_i^{(0)} = \mathbf{P}_i, \qquad \mathbf{i} = 0 : \mathbf{n}$$
$$\mathbf{P}_i^{(j)} = \mathbf{P}_i^{(j-1)}(1 - \mathbf{t}_0) + \mathbf{P}_{i+1}^{(j-1)}\mathbf{t}_0, \qquad \mathbf{i} = 0 : \mathbf{n} - \mathbf{j}, \qquad \mathbf{j} = 1 : \mathbf{n}$$

cu $\mathbf{B(t_0)=P_0^{(n)}}$

Fie $\mathbf{P^0_i, i=0:n}$ poligonul punctelor de control $\mathbf{P^0_i}$ şi $\mathbf{P^0_{i+1}}$ două puncte succesive şi $\mathbf{P^1_i}$ un punct care împarte segmentul $\mathbf{P^0_i P^0_{i+1}}$ în raportul $\mathbf{t/(1-t)}$:

$\mathbf{P^1_i=P^0_i+t(P^0_{i+1}-P^0_i)=(1-t)P^0_i+tP^0_{i+1}}$

- Se formează în acest fel poligonul $\mathbf{P^1_i}$, $\mathbf{i=0:n-1}$.
- Se aplică algoritmul noului poligon acelaşi algoritm obţinându-se poligonul $\mathbf{P^2_i, i=0:n-2}$. Repetând procesul de $\mathbf{n}$ ori se obţine un singur punct $\mathbf{P^n_0}$. Acest punct este punctul cerut

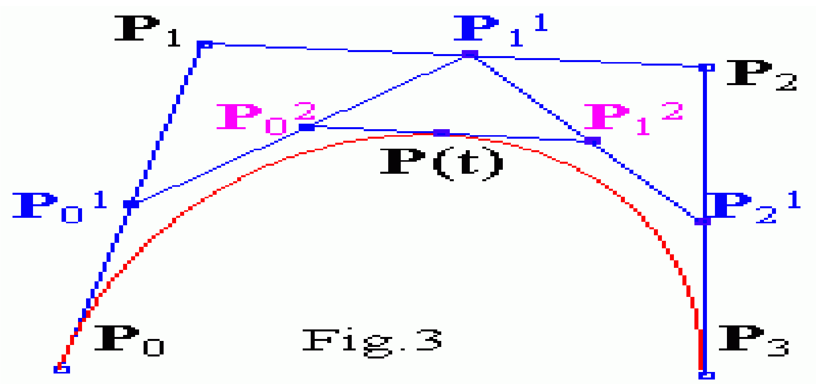
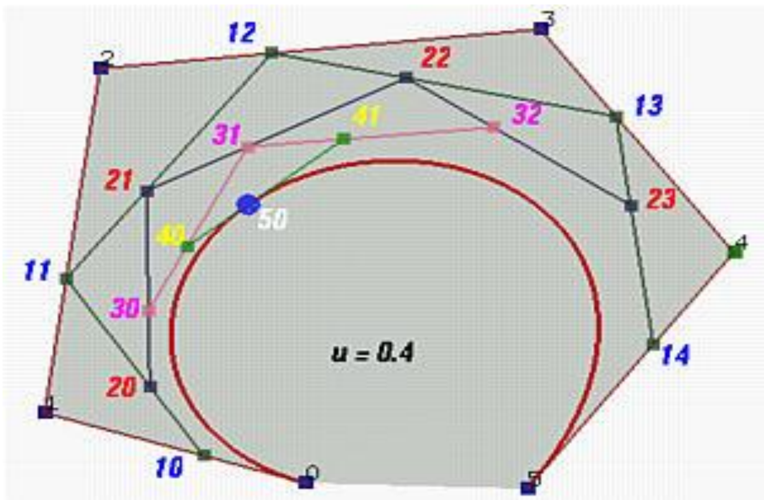
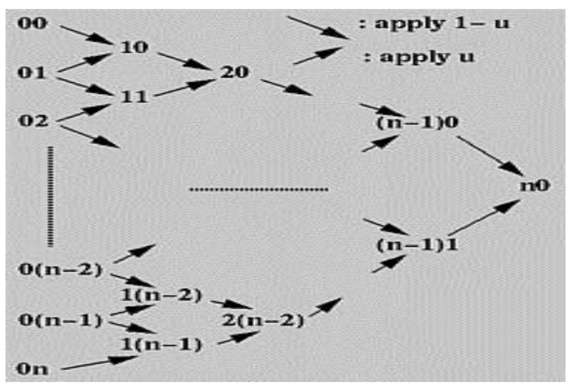


Fig.3



Algoritmul De Casteljau.



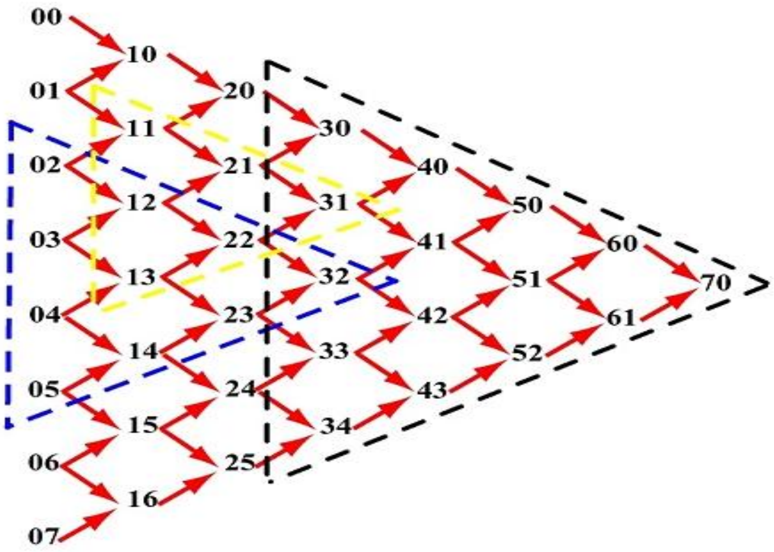
Calculul poate fi exprimat recursiv prin relaţia:

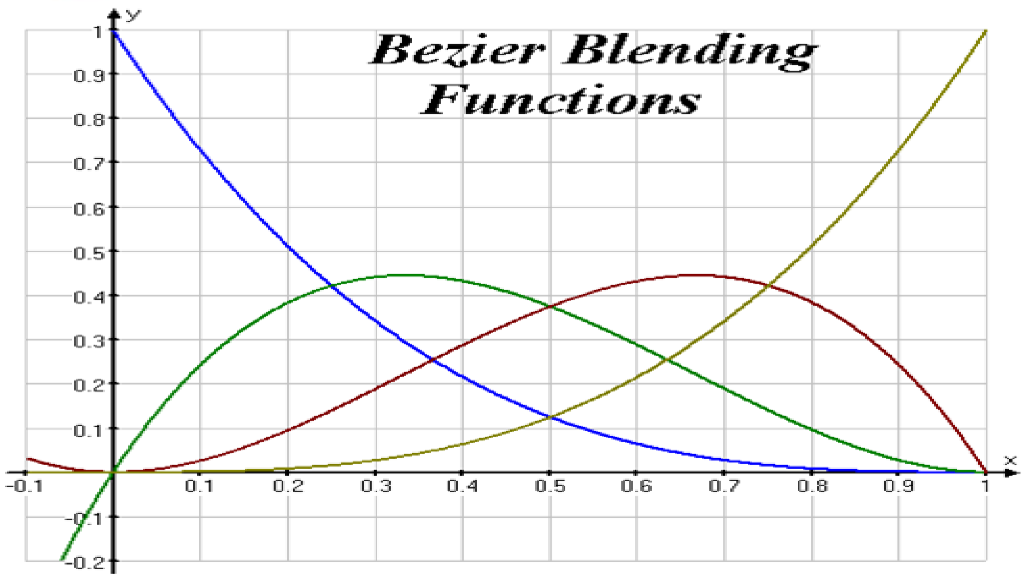
$$P_i^j=(1-t)P_{i-1}^j+tP_{i-1}^{j+1}, \quad i=1:n, \quad j=0:n-i$$

şi implementat ineficient prin:

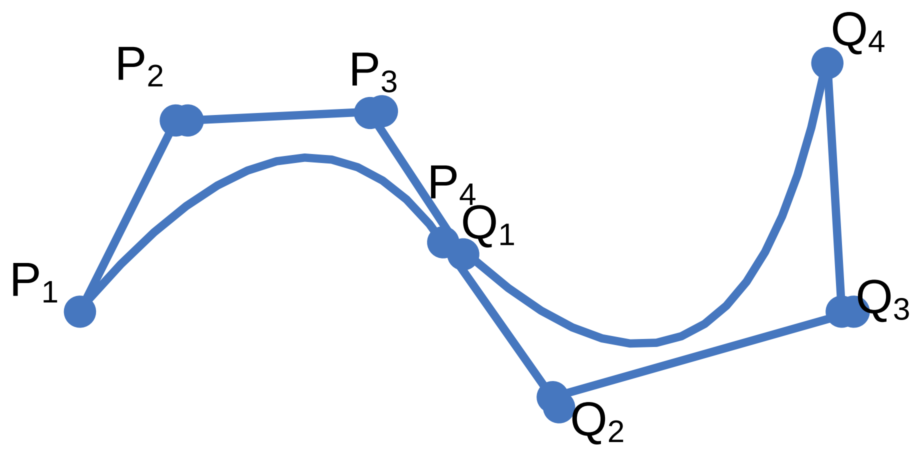
```
function b=Castrec(P, u, i, j)
  if i==1
    b=P(1,j);
  else
    b=(1-u)*Castrec(P,u,i-1,j)+u*Castrec(P,u,i-1,j+1);
```

Ineficienţa provine din apelurile recursive repetate. Acestea pot fi evitate urmărind schema de calcul pentru puncte de control succesive.





Splineurile Bezier se obţin prin joncţiunea de curbe Bezier.



Continuitate C^0: $P_4 = Q_1$

Continuitate C^1 $P'_4 = Q'_1$ $P_4 - P_3 = Q_2 - Q_1$

Continuitate C^2 $P''_4 = Q''_1$ $P_2 - 2P_3 + P_4 = Q_1 - 2Q_2 + Q_3$

Din cele 3 condiţii rezultă:

$Q_1 = P_4$

$Q_2 = 2P_4 - P_3$

$Q_3 = P_2 - 4P_3 + 4P_4$

Cu alte cuvinte pentru cel de-al doilea spline avem un singur grad de libertate.

Spline B

Curbele Bezier nu asigură un control local efectiv, în sensul că modificarea punctelor de control afectează în mod global forma curbei.

Splineurile B asigură un control local mai bun decât splineurile Bezier.

Splineurile B sunt precizate prin:

- $m+1$ puncte de control $P_0, P_1, \ldots, P_m$
- $m-2$ curbe spline B: $Q_3, \ldots, Q_m$

Splineul $Q_i(t)$ determinat de punctele de control $P_{i-3}, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i$ în intervalul $t \in [t_i, t_{i+1})$.

Splineurile B uniforme consideră $t_{i+1} = t_i + 1$.

Un punct de control influienţează cel mult 4 curbe. Astfel avem:

Curba	puncte de control	Interval	
Q_3	P_0, P_1, P_2, P_3	$t_3=0$	$t_4=1$
Q_4	P_1, P_2, P_3, P_4	$t_4=1$	$t_5=2$
Q_5	P_2, P_3, P_4, P_5	$t_5=2$	$t_6=3$
Q_6	P_3, P_4, P_5, P_6	$t_6=3$	$t_7=4$
	. . .		
Q_m	$P_{m-3}, P_{m-2}, P_{m-1}, P_m$	$t_m=m-3$	$t_{m+1}=m-2$

Pentru baza: $T_i^T = \left[(t - t_i)^3 \quad (t - t_i)^2 \quad (t - t_i) \quad 1 \right]$

$$Q_i(t) = T_i^T \cdot M_{Bs} \cdot G_{Bs}, \qquad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i=3:m$$

În cazul splineurilor uniforme, obţinerea matricei de transformare M_{Bs} se face impunând condiţii de continuitate pentru:

$Q_i(t)=a(t-t_i)^3+b(t-t_i)^2+c(t-t_i)+d$

$Q'_i(t)=3a(t-t_i)^2+2b(t-t_i)+c$

$Q''_i(t)=6a(t-t_i)+2b$

$Q'_i(t_i)=c=(P_{i-1}-P_{i-3})/2$

$Q'_i(t_{i+1})=3a+2b+c=(P_i-P_{i-2})/2$

$Q''_i(t_i)=2b=(P_i-P_{i-2})-(P_{i-1}-P_{i-3})$

$Q''_i(t_{i+1})=6a+2b=(P_i-P_{i-1})-(P_{i-1}-P_{i-2})$

de unde rezultă:

$$a = \frac{-P_{i-3} + 3P_{i-2} - 3P_{i-1}}{6}$$

$$b = \frac{3P_{i-3} - 6P_{i-2} + 3P_{i-1}}{6}$$

$$\mathbf{c} = \frac{-3\mathbf{P}_{i-3} + 3\mathbf{P}_{i-1}}{6}$$

Pentru determinarea lui d se impune condiţia suplimentară:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{t}_i) = \mathbf{d} = \frac{\mathbf{P}_{i-3} + 4\mathbf{P}_{i-2} + \mathbf{P}_{i-1}}{6}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-3} \\ \mathbf{P}_{i-2} \\ \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_{i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^3 & \mathbf{t}^2 & \mathbf{t} & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-3} \\ \mathbf{P}_{i-2} \\ \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_{i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{Bs}} = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\mathbf{splineB}}}$$

Funcţiile de îmbinare sunt:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{Bs}} = \mathbf{T}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{Bs}} = \frac{1}{6} \cdot \left[(1 - \mathbf{t})^3 \quad (3\mathbf{t}^3 - 6\mathbf{t}^2 + 4) \quad (-3\mathbf{t}^3 + 3\mathbf{t}^2 + 3\mathbf{t} + 1) \quad \mathbf{t}^3\right]$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{t}) = \frac{1}{6} \cdot \left[(1 - \mathbf{t})^3 \quad (3\mathbf{t}^3 - 6\mathbf{t}^2 + 4) \quad (-3\mathbf{t}^3 + 3\mathbf{t}^2 + 3\mathbf{t} + 1) \quad \mathbf{t}^3\right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k} \\ \mathbf{P}_{k+1} \\ \mathbf{P}_{k+2} \\ \mathbf{P}_{k+3} \end{bmatrix}$$

Proprietăţile splineurilor B:

1. control local mai bun – fiecare punct de control are efect local
2. continuitate – curba de grad $\mathbf{n}$ este $\mathbf{C}^{n-1}$ continuă
3. aproximare – un spline B nu trece prin nici un punct de control
4. curba este conţinută în poligonul $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\ldots\mathbf{P}_{n+1}$

Se pot defini funcţii spline B de ordin superior:

$$\mathbf{N}_{ik}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{t} - \mathbf{t}_i}{\mathbf{t}_{i+k-1} - \mathbf{t}_i} \cdot \mathbf{N}_{i,k-1}(\mathbf{t}) + \frac{\mathbf{t}_{i+k} - \mathbf{t}}{\mathbf{t}_{i+k} - \mathbf{t}_{i+1}} \cdot \mathbf{N}_{i+1,k-1}(\mathbf{t})$$

$$\mathbf{N}_{i1}(\mathbf{t}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{t}_i < \mathbf{t} < \mathbf{t}_{i+1} \\ 0 & \text{in caz contrar} \end{cases}$$

NURBS (Spline B Raţionale NeUniforme).

Se definesc prin relaţiile:

$$R_k(t) = \frac{w_k N_{k,d+1}(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j N_{j,d+1}(t)}$$

În care:

$N_{k,d}$ – este baza funcţiilor B spline

w_k – sunt ponderi (sau parametri de formă)

Proprietăţi:

1. interpolează la capete
2. asigură reprezentări exacte curbelor canonice (cerc, elipsă)
3. sunt invariante la proiecţia perspectivă

Spline cardinale.

Sunt spline Hermite, care nu folosesc derivate, care sunt înlocuite prin diferenţele:

$T_i=a(P_{i+1}-P_{i-1})$

$p(0)=P_k$

$p(1)=P_{k+1}$

$p'(0)=a(P_{k+1} - P_{k-1})$

$p'(1)=a(P_{k+2} - P_k)$

$$G_H = \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ P'_k \\ P'_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \end{bmatrix}}_{M_{HC}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} P_{k-1} \\ P_k \\ P_{k+1} \\ P_{k+2} \end{bmatrix}}_{G_c}$$

$P(t)=T(t).M_H.G_H=T(t).M_H.M_{HC}.G_C$

$$p(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{k-1} \\ P_k \\ P_{k+1} \\ P_{k+2} \end{bmatrix}$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a & 2-a & a-2 & a \\ 2a & a-3 & 3-2a & -a \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{k-1} \\ P_k \\ P_{k+1} \\ P_{k+2} \end{bmatrix}$$

Spline Catmull-Rom.

Sunt spline cardinale cu $a=0.5$ $T_i=0.5(P_{i+1}-P_{i-1})$

Spline-ul Catmull-Rom are proprietăţile:

- trece prin toate punctele de control (spline de interpolare)

- este $\mathbf{C}^1$ continuu

$$\mathbf{p}(\mathbf{t}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{t}^3 & \mathbf{t}^2 & \mathbf{t} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{k}-1} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{k}} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{k}+1} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{k}+2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{t}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\mathbf{t}^3 + 2\mathbf{t}^2 - \mathbf{t} & 3\mathbf{t}^3 - 5\mathbf{t}^2 + 2 & -3\mathbf{t}^3 + 4\mathbf{t}^2 + \mathbf{t} & \mathbf{t}^3 - \mathbf{t}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{k}-1} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{k}} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{k}+1} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{k}+2} \end{bmatrix}$$

Spline Kochanek – Bartels

Sunt spline Hermite, folosite de 3d-Studio Max cu control mai bun asupra animaţiei. Calculul tangentelor se face cu relaţiile:

$$\mathbf{TS}_i = \frac{(1 - t)(1 - c)(1 + b)}{2}(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) + \frac{(1 - t)(1 + c)(1 - b)}{2}(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$$

$$\mathbf{TD}_i = \frac{(1 - t)(1 + c)(1 + b)}{2}(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) + \frac{(1 - t)(1 - c)(1 - b)}{2}(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$$