Curs 3

Propagarea erorilor în rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare.

O *normă vectorială* se defineşte ca o aplicaţie:

$$\|\cdot\| \; : \; R^n \to R^+$$
$$x \to \|x\|$$

care satisface următoarele axiome:

$1^0 \quad \|x\| \geq 0,$

$2^0 \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0,$

$3^0 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$

$4^0 \quad \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \quad \forall \alpha \in C.$

Expresia:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

satisface proprietăţile unei norme vectoriale. Ea este cunoscută sub numele de *norma Hölder* (sau *p-normă*).

Particularizând valorile lui p se obţin relaţii de calcul ale unor norme vectoriale uzuale. Astfel pentru $x \in C^n$: avem:

$p = 1 \Rightarrow \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$ norma Napoleon,

$p = 2 \Rightarrow \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$ norma Euclid,

$p = \infty \Rightarrow \|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$

MATLAB: $||x||_1$ se calculează apelând funcţia `norm(x,1)`, $||x||_2$ cu `norm(x)` sau `norm(x,2)` şi $||x||_\infty$ cu `norm(x,inf)` şi în general p-norma Hőlder se calculează cu `norm(x, p)`.

Două norme $\|\cdot\|_p$ şi $\|\cdot\|_q$ (nu neapărat norme Hőlder), sunt *echivalente*, dacă există constantele $K_1, K_2 > 0$ astfel încât:

$$K_1 * \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq K_2 * \|x\|_q.$$

Toate normele vectoriale din R^n (sau C^n) sunt echivalente.

Pot fi verificate relativ uşor relaţiile:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2,$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty.$$

Norma matriceală se defineşte axiomatic ca o aplicaţie:

$$\|\cdot\| \; : R^{m\times n} \to R^+, \quad (\text{sau } C^{m\times n} \to R^+)$$
$$A \to \|A\|$$

care satisface proprietăţile:

$1^0 \quad \| A \| \geq 0,$

$2^0 \quad \| A \| = 0 \Rightarrow A = 0,$

$3^0 \quad \| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|,$

$4^0 \quad \| \alpha \cdot A \| = | \alpha | \cdot \| A \|,$

la care se adaugă pentru "*norme consistente*" condiţia suplimentară:

$5^0 \quad \| A * B \| \leq \| A \| \cdot \| B \|.$

Norma matriceală: $\sum_i \sum_j | A_{ij} |$ nu este o normă matriceală consistentă.

Norma *Frobenius* se defineşte ca:

$$\| A \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | A(i, j) |^2}.$$

Norma matriceală subordonată unei norme vectoriale p (nu neapărat norma Holder) se exprimă prin:

$$\| A \|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\| A \cdot x \|_p}{\| x \|_p}.$$

O normă matriceală poate fi subordonată la două norme vectoriale:

$$\| A \|_{pq} = \sup_{x \neq 0} \frac{\| A \cdot x \|_p}{\| x \|_q}.$$

Se obţin astfel normele matriceale mai des folosite:

$$\| A \|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} | A_{ij} |,$$

$$\| A \|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} | A_{ij} |,$$

$$\| A \|_2 = \sqrt{\rho(A \cdot A^T)} = \sigma_2(A).$$

unde $\rho(\cdot)$ este raza spectrală (vezi cap.9) a matricei $A * A^T$, iar $\sigma_2(\cdot)$ este valoarea singulară maximă a matricei A (vezi cap.12).

MATLAB: $||A||_1$ se calculează\` apelând funcţia **norm(A,1),** $||A||_2$ cu **norm(A)** sau **norm(A,2)**, $||A||_\omega$ cu **norm(A,inf),** iar norma Frobenius $||A||_F$ cu **norm(A,'fro')**.

Pentru o matrice $A \in R^{m \times n}$ avem relaţiile:

$$\| A \|_2 \leq \| A \|_F \leq \sqrt{n} \cdot \| A \|_2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \| A \|_\infty \leq \| A \|_2 \leq \sqrt{m} \cdot \| A \|_\infty,$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \| A \|_1 \leq \| A \|_F \leq \sqrt{n} \cdot \| A \|_1.$$

În calculele cu matrice se folosesc în mod frecvent următoarele notaţii:

$$|A| = (|A_{ij}|)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$$

$$|A| \le |B| \Rightarrow |A_{ij}| \le |B_{ij}|, \; i = 1:m, \; j = 1:n$$

De asemenea vom scrie: $A > 0$, $A > B$, dacă matricile A, respectiv $A - B$ sunt simetrice (hermitice în cazul complex) şi pozitiv-definite.

In rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare, anumite matrici (rău condiţionate) pot crea dificultăţi, în sensul că mici variaţii ale datelor pot produce mari variaţii în soluţii. Astfel dacă în sistemul de ecuaţii :

$$\begin{cases} 10 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 7 \cdot x_4 = 32 \\ 7 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 = 23 \\ 8 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 + 9 \cdot x_4 = 33 \\ 7 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 = 31 \end{cases}$$

având soluţiile `x = [1 1 1 1]'` .Se aplică termenilor liberi mici perturbaţii astfel încât devin:

`b˜=[32.1 22.9 33.1 30.9]'.`

Se obţin soluţiile noului sistem:

`x˜=[9.2 -12.6 4.5 -1.1]' .`

Să considerăm sistemul perturbat:

$A.\tilde{x} = \tilde{b}$

$A.(x+\delta x) = b+\delta b$

$A.\delta x = \delta b$

$\delta x = A^{-1}.\ \delta b \Rightarrow \|\delta x\| \le \|A^{-1}\|.\|\delta b\|$

$b = A.x \Rightarrow \|b\| \le \|A\|.\|x\|$

$\|b\|.\|\delta x\| \le \|A\|.\|A^{-1}\|.\|x\|.\|\delta b\|$

$\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \kappa(A)\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ în care s-a notat cu:

$\kappa(A) = \|A\|.\|A^{-1}\|$ *numărul de condiţionare* al matricei, care acţioneaza ca un factor de amplificare al perturbării soluţiilor datorite variaţiei termenilor liberi
O relaţie asemănătoare se obţine în cazul perturbării matricei coeficienţilor :

$(A+\delta A).(x+\delta x) = b \Rightarrow A.\ \delta x = -\ \delta A.x \Rightarrow \delta x = -A^{-1}.\ \delta A.x$

$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\|.\|\delta A\|.\|x\| \Rightarrow \dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \kappa(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

Dacă în relaţiile anterioare nu se neglijează termenul $\delta A.\delta x$ se obţine o majorare mai exactă de forma:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\kappa(A)\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\kappa(A)\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

Dacă se consideră că numerele reale au mantisa reprezentată cu t cifre binare semnificative:

$$|\delta A_{ij}| \le 2^{-t}.|A_{ij}| \Rightarrow \|\delta A\| \le 2^{-t}.\|A\| \Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{2^{-t}\cdot\kappa(A)}{1-2^{-t}\cdot\kappa(A)}$$

Se verifică relativ uşor următoarele proprietăţi ale numărului de condiţionare al unei matrice>

$\kappa(A)\ge 1$
$\kappa(A)= \kappa(A^{-1})$
$\kappa(cA)= \kappa(A)$
Numărul de condiţionare depinde de norma considerată.

În MATLAB numărul de condiţionare al unei matrice în normă `p` se calculează cu `cond(A, p)`

Pentru matricele cu număr de condiţionare mare (matrice rău condiţionate) amplificarea erorilor din datele iniţiale este mare, indiferent de cât de exact sunt efectuate calculele, justificând variaţia relativă mare a soluţiilor în raport cu variaţia termenilor liberi.

Hilbert

$$A = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \end{vmatrix}$$

Wilson

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{vmatrix}$$

Rutishauser

$$A = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Metode aproximative de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare

Metodele exacte de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare, având complexitate $O(n^3)$, au aplicabilitate limitată la ordine de sisteme ce nu depăşesc 1000. Pentru sisteme de dimensiuni mai mari se utilizează metode cu complexitate $O(n^2)$ într-un pas de iteraţie. Acestea utilizează relaţii de recurenţă, care prin aplicare repetată furnizează aproximaţii cu precizie controlată a soluţiei sistemului.
Sistemul $A.x=b$ este adus la forma echivalentă $x=G.x+c$. Pornindu-se cu o aproximaţie iniţială $x^{(0)}$ a soluţiei se generează, folosind o relaţie iterativă de forma:

$$x^{(p+1)}=G.\ x^{(p)}\ +c$$

un şir de vectori: $x^{(0)},x^{(1)},\dots,x^{(p)},\dots$
Matricea G reprezintă *matricea de iteraţie*, iar c - *vectorul de iteraţie*.
Aplicarea, intr-un pas, a iteraţiei are complexitatea $O(n^2)$.
Condiţiile în care şirul este convergent poartă numele de *condiţii de stabilitate*).
In ipoteza convergenţei şirului $\lim\limits_{p\to\infty} x^{(p)} = x^*$

$$x^*=G.x^*+c \Rightarrow x^{(p)}-x^* =G.(x^{(p-1)}-x^*) \Rightarrow e^{(p)}=G.e^{(p-1)}=G^2.e^{(p-2)}=\dots=G^p.e^{(0)}$$

$\lim\limits_{p\to\infty} e^{(p)} = 0$ şi $e^{(0)} \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty} G^p = 0$

Condiţia de stabilitate admite reprezentările echivalente:

$$\|G\| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(G) < 1$$

în care $\rho(G)$ reprezintă cea mai mare valoare proprie în valoare absolută a matricei de iteraţie (*raza spectral*ă.

Verificarea condiţiei de stabilitate, în oricare din cele 3 forme, nu se face, deoarece ar implica un efort de calcul considerabil. Şirul se presupune convergent, şi determinarea limitei presupune ca apropierea în normă între doi termeni din şir, în vecinătatea limitei să se facă înaintea depăşirii unui număr maxim impus de iteraţii, adică:

$$\left\|\underline{x}^{(p+1)} - \underline{x}^{(p)}\right\| < \varepsilon \cdot \left\|\underline{x}^{(p)}\right\| \text{ şi } p < maxiter$$

Limita şirului trebuie să coincidă cu soluţia exactă a sistemului de ecuaţii liniare, adică **x*=x,** relaţie cunoscută sub numele de *condiţie de consistenţă*. O *metodă stabilă şi consistentă este convergentă.*

Descompunem matricea sistemului sub forma

A=N-P

impunând condiţia ca matricea sa fie uşor de inversat

$$(N-P).x = b$$

$$x = N^{-1}.P.x + N^{-1}.b$$

$$x^{(m+1)} = N^{-1}.P.x^{(m)} + N^{-1}.b = G.x^{(m)} + c$$

în care $G=N^{-1}.P$ este *matricea de iteraţie*, iar $c=N^{-1}.b$ este *vectorul de iteraţie*.

Se partiţionează matricea punând în evidenţă o matrice diagonală **D**, o matrice strict inferior triunghiulară **L** (cu elemente diagonale nule) şi o matrice strict superior triunghiulară **U**.

A=D-L-U

În metoda Jacobi se aleg:

N=D

P=L+U

$$G_J=D^{-1}(L+U)$$

$$D.x^{(p+1)}=(L+U).x^{(p)}+b$$

$$x_i^{(p+1)} = \frac{b_i - \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(p)}}{a_{ii}}$$

$$G_{ij} = \delta_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

$$\|G\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left|g_{ij}\right| = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

Metoda Gauss – Seidel alege:

N=D-L

P=U

$G_{GS}=(D-L)^{-1}U$

$(D-L)x^{(p+1)}=Ux^{(p)}+b$

$$x_i^{(p+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(p+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(p)}}{a_{ii}}$$

Metoda Gauss-Seidel este convergentă dacă matricea sistemului este diagonal dominantă pe linii**.**

(Reich) Metoda Gauss-Seidel este convergentă dacă matricea sistemului este simetrică şi pozitiv - definită.

```
[x,succes] = GaussSeidel(A,b,x0,maxiter,tol)
% rezolvare sistem cu Gauss-Seidel
% Intrări: A = matricea sistemului
%          b = vectorul termenilor liberi
%         x0 = aproximaţia iniţială soluţii
%    maxiter = număr maxim admis de iteraţii
%        tol = precizia determinarii solutii
% Iesiri:  x = solutia sistremului
%    success = indicator convergenţă metoda
  [m,n] = size(A);
  if m~=n
    error('matricea trebuie sa fie patrata!')
  end;
for k=1 : maxiter
     for i = 1 : n
        s1=A(i,1:i-1)*x(1:i-1);
        s2=A(i,i+1:n)*x0(i+1:n);
        x(i) = (b(i)-s1-s2)/A(i,i)
     end
     p = norm(x-x0,1);
     q = norm(x, 1);
     x = x0
     if p < tol*q
       break;
     end;
   end
  succes = k<=maxiter
}
```

Pentru găsirea unei descompuneri cât mai rapid convergente se introduce parametrul de relaxare **w**:

$A=N-P=N-wN-P+wN=(1-w)N-(P-wN)=N(w)-P(w)$

$$G(w) = N^{-1}(w) \cdot P(w) = \frac{N^{-1}}{1-w} \cdot \left(P - w \cdot N\right)$$

$$G(w) = \frac{G - w \cdot I_n}{1 - w}$$

Dacă se notează cu λ_i valorile proprii ale matricei $G=N^{-1}P$, atunci valorile proprii ale matricei $G(w)$ vor fi

$$\lambda_i(w) = \frac{\lambda_i - w}{1 - w}$$

$$\rho(G(w)) = \max_i |\lambda_i(w)| < 1$$

Determinăm w^* astfel ca:

$$\rho(G(w^*)) = \min_w \rho(G(w))$$

$$\max_i |\lambda_i(w^*)| = \min_w \max_i |\lambda_i(w)|$$

$$\max_i \left| \frac{\lambda_i - w^*}{1 - w^*} \right| = \min_{w=1} \max_i \left| \frac{\lambda_i - w}{1 - w} \right|$$

In practică, metoda suprarelaxării ia

$$N(w) = \frac{1}{w} \cdot D - L \qquad P(w) = \left(\frac{1}{w} - 1 \right) \cdot D + U$$

$$G_w = (D - w \cdot L)^{-1} \cdot [(1 - w) \cdot D + w \cdot U]$$

Dacă $A_{ii} \neq 0$, atunci $\rho(G_w) > w-1$ şi condiţia de stabilitate impune ca $0 < w < 2$.

Dacă matricea este tridiagonală şi pozitiv-definită, atunci valoarea optimă a parametrului de relaxare este

$$w_{optim} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(G_J)^2}}$$

Relaţia de recurenţă are în acest caz forma

$$N(w) \cdot \underline{x}^{(k+1)} = P(w) \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{b}$$

$$\left(\frac{1}{w} \cdot D + L \right) \cdot \underline{x}^{(k+1)} = \left(\frac{1 - w}{w} \cdot D - U \right) \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{b}$$

$$\frac{1}{w} \cdot A_{ii} x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(k+1)} = \frac{1 - w}{w} \cdot A_{ii} x_i^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

$$x_i^{(k+1)} = -w \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \frac{A_{ij}}{A_{ii}} \cdot x_j^{(k+1)} + (1 - w) \cdot x_i^{(k)} - w \cdot \sum_{j=i+1}^{n} \frac{A_{ij}}{A_{ii}} \cdot x_j^{(k)} + w \cdot \frac{b_i}{A_{ii}}$$