VARIABILE ALEATOARE

DEFINIŢIE ŞI CLASIFICARE

Intuitiv, o *variabilă aleatoare* este o mărime care în urma realizării unei experienţe poate lua o valoare dintr-o mulţime bine definită (mulţimea valorilor posibile).

Variabila aleatoare este o funcţie reală care depinde de rezultatul unui anumit experiment:

Definiţie: Fie $\{E, K, P\}$ spaţiu de probabilitate. Funcţia $X : E \to \mathbb{R}$ se numeşte *variabilă aleatoare* dacă:

$$\text{pentru } (\forall) a \in \mathbb{R},\ \{e \in E \mid X(e) < a\} \in K$$

(în notaţie simplificată, scriem direct $\{X < a\}$)

Observaţie:

Mulţimea valorilor variabilei aleatoare, $X(E)$, este o submulţime a mulţimii numerelor reale ($X(E) \subseteq \mathbb{R}$), adică variabila aleatoare nu este obligatoriu o funcţie surjectivă.

Prin variabilele aleatoare, unui fenomen supus unor circumstanţe aleatoare i se asociază un număr real, deci se stabileşte o corespondenţă între spaţiul de selecţie E, convenabil ales, şi $\mathbb{R}$.

În practică este dificil să găsim valorile acestor corespondenţe, dar este posibil să determinăm „cât de des” sunt luate aceste valori (cu ce probabilitate). Astfel, putem defini *funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare* X :

Definiţie: Fie $\{E, K, P\}$ spaţiu de probabilitate şi $X : E \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare. Funcţia $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definită prin:

$$F_X(a) = P\left(\{e \in E \mid X(e) < a\}\right), \text{ cu } a \in \mathbb{R}$$

se numeşte ***funcţia de distribuţie*** *(sau de repartiţie) a variabilei aleatoare* X.

(prescurtat, se scrie: $F_X(a) = P(X < a)$)

Observaţie:

Determinarea, pentru $(\forall) a \in \mathbb{R}$ a probabilităţii cu care X ia valori mai mici decât a înseamnă a găsi (defini) funcţia de repartiţie pentru X.

Clasificarea variabilelor aleatoare se face după proprietăţile mulţimii $X(E)$:

a) **V.A. de tip discret** – dacă $X(E)$ este mulţime cel mult numărabilă:
   - $X(E)$ finită – *V.A. discretă simplă*
   - $X(E)$ infinită dar numărabilă – *V.A. discretă cu o infinitate de valori*.

b) **V.A. de tip continuu** – dacă $X(E)$ este o mulţime infinită de numere reale.

1. VARIABILE ALEATOARE DISCRETE SIMPLE

O variabilă aleatoare discretă simplă este o funcţie reală ale cărei valori sunt luate cu probabilităţile corespunzătoare unui sistem complet de evenimente:

Considerăm o experienţă şi legat de aceasta un sistem complet de evenimente $(A_i)_{1\le i\le n}$. Definim funcţia X pe acest sistem complet de evenimente şi o reprezentăm prin tabelul de asociere (perechi ordonate) numit **tabloul de repartiţie** al variabilei aleatoare X :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \text{ cu } p_i \ge 0 \text{ şi } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

unde numerele x_i se numesc *valorile variabilei aleatoare* iar p_i sunt probabilităţile cu care variabila aleatoare ia aceste valori (se mai poate scrie: $p_i = P(A_i) = P\{X = x_i\} = P\left(\{e \in E \mid X(e) = x_i\}\right)$)

Convenţii:

- În tabloul de repartiţie se trec valorile distincte ale variabilei aleatoare;
- În tabloul de repartiţie NU se trec valorile luate cu probabilitatea 0.

Atenţie !!
Două variabile aleatoare asociate unor sisteme complete de evenimente diferite (pentru o aceeaşi experienţă) pot avea tabloul de repartiţie identic, deşi variabilele aleatoare nu sunt aceleaşi.
Exemplu: Considerăm experienţa aruncării unui zar şi două sisteme complete de evenimente, definite astfel:

A_1: se acordă 1 punct pentru faţa 1 sau 2

A_2: se acordă 2 puncte pentru faţa 3 sau 4

A_3: se acordă 3 puncte pentru faţa 5 sau 6

B_1: se acordă 1 punct pentru faţa 1 sau 6

B_2: se acordă 2 puncte pentru faţa 2 sau 5

B_3: se acordă 3 puncte pentru faţa 3 sau 4

Variabilele aleatoare corespunzătoare celor două sisteme sunt X (pentru A_i) şi Y (pentru B_i):

$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ şi respectiv: $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Deşi tabloul de repartiţie este acelaşi, variabilele aleatoare X şi Y nu sunt egale (de exemplu, $X(6) = 3$ şi $Y(6) = 1$).

Funcţia de distribuţie (repartiţie):
Fie variabila aleatoare discretă simplă X, cu tabloul de repartiţie:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & .... & x_n \\ p_1 & p_2 & .... & p_n \end{pmatrix} \text{ (cu } p_i \geq 0 \text{ şi } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\text{)}$$

Atunci funcția $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, definită prin relația: $F_X(x) = P\left(\left\{e \in E \,\middle|\, X(e) < x\right\}\right)$ se numește ***funcția de repartiție*** a variabilei aleatoare X.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \leq x < x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3, & x_3 \leq x < x_4 \\ .... & \\ \sum_{j=1}^{i} p_j \,, & x_{i-1} \leq x < x_i \\ .... & \\ 1, & x \geq x_n \end{cases}$$

Proprietăţi:

- Funcţie mărginită (valoarea minimă este 0, cea maximă 1).
- F_X este o funcţie „treaptă", continuă la dreapta (şi discontinuă la stânga) în punctele x_i, cu salturi egale cu p_i în aceste puncte.
- Este nedescrescătoare ($F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ dacă $x_1 < x_2$)

Observaţie:
În definirea funcţiei de distribuţie se pot folosi şi inegalităţile $x_{i-1} < x \leq x_i$, ceea ce este corect dar duce la modificarea tipului de continuitate (în acest caz, F_X este continuă la stânga şi discontinuă la dreapta).

Reprezentare grafică:

- Orice *variabilă aleatoare discretă simplă* dată prin tabloul său de repartiţie se poate reprezenta grafic prin „poligonul" său de repartiţie: pe axa absciselor se trec valorile variabilei aleatoare, iar pe axa ordonatelor se trec probabilităţile.
- *Funcţia de distribuţie (repartiţie)* a unei variabile aleatoare discrete simple se poate reprezenta grafic.

Exemplu:
Se consideră variabila aleatoare discretă simplă X, cu tabloul de repartiţie:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Determinaţi funcţia de distribuţie a variabilei aleatoare X şi reprezentaţi grafic variabila şi funcţia ei de distribuţie.

Faceti graficele !

$$F_X = \begin{cases} 0\,, & x<1 \\ 0.1\,, & 1 \le x < 2 \\ 0.3, & 2 \le x < 3 \\ 0.6, & 3 \le x < 4 \\ 0.7\,, & 4 \le x < 5 \\ 0.9\,, & 5 \le x < 6 \\ 1, & x \ge 6 \end{cases}$$

Variabile aleatoare (discrete simple) independente:

Fie variabilele aleatoare discrete simple X și Y cu tablourile de repartiție:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & .... & x_n \\ p_1 & p_2 & .... & p_n \end{pmatrix}\ ,\ Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & .... & y_m \\ q_1 & q_2 & .... & q_m \end{pmatrix} \text{cu } p_i, q_j \ge 0 \text{ şi } \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{m} q_j = 1.$$

X și Y se numesc *independente* (în totalitatea lor) dacă evenimentele $(X = x_i)$ și $(Y = y_j)$ cu $i = \overline{1,n}$ și $j = \overline{1,m}$ sunt independente, adică:

$$P\big[(X = x_i),(Y = y_j)\big] = P\big[(X = x_i) \cap (Y = y_j)\big] = p_i \cdot q_j$$

Operații cu variabile aleatoare discrete simple:

Fie variabilele aleatoare discrete simple X, Y și Z cu tablourile de repartiție:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & .... & x_n \\ p_1 & p_2 & .... & p_n \end{pmatrix}\ ,\ Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & .... & y_m \\ q_1 & q_2 & .... & q_m \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & .... & z_s \\ r_1 & r_2 & .... & r_s \end{pmatrix}$$

cu $p_i, q_j, r_k \ge 0$ și $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{m} q_j = \sum_{k=1}^{s} r_k = 1$. Putem defini următoarele operații (care au ca rezultat tot variabile aleatoare simple):

1. Suma dintre o constantă "a" și variabila aleatoare X este variabila aleatoare care ia valoarea $a + x_i$ când X ia valoarea x_i:

$$a + X = \begin{pmatrix} a + x_1 & a + x_2 & .... & a + x_n \\ p_1 & p_2 & .... & p_n \end{pmatrix}$$

2. Produsul dintre o constantă "a" și variabila aleatoare X este variabila aleatoare care ia valoarea $a \cdot x_i$ când X ia valoarea x_i:

$$a \cdot X = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 & a \cdot x_2 & .... & a \cdot x_n \\ p_1 & p_2 & .... & p_n \end{pmatrix}$$

3. Suma dintre două variabile aleatoare X și Y este variabila aleatoare care ia valoarea $x_i + y_j$ (când X ia valoarea x_i și Y ia valoarea y_j) cu probabilitatea p_{ij}:

$$X+Y=\begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & .... & x_i+y_j & .... & x_n+y_m \\ p_{11} & p_{12} & .... & p_{ij} & .... & p_{nm} \end{pmatrix}$$

unde probabilitatea p_{ij} ($i=\overline{1,n}$ și $j=\overline{1,m}$) este probabilitatea realizării simultane a evenimentelor $(X=x_i)$ și $(Y=y_j)$. Altfel spus, $p_{ij}=P\left[(X=x_i),(Y=y_j)\right]=P\left[(X=x_i)\cap(Y=y_j)\right]$.

Observație:
Dacă variabilele aleatoare discrete simple X și Y sunt <u>independente</u>, atunci $p_{ij}=p_i\cdot q_j$

Suma se poate extinde și pentru trei sau mai multe variabile aleatoare discrete simple:

$$X+Y+Z=\begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 & x_1+y_1+z_2 & .... & x_i+y_j+z_k & .... & x_n+y_m+z_s \\ p_{111} & p_{112} & .... & p_{ijk} & .... & p_{nms} \end{pmatrix}$$

unde probabilitatea p_{ijk} ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ și $k=\overline{1,s}$) este probabilitatea realizării <u>simultane</u> a evenimentelor $(X=x_i)$, $(Y=y_j)$ și $(Z=z_k)$. Altfel spus, $p_{ijk}=P\left[(X=x_i)\cap(Y=y_j)\cap(Z=z_k)\right]$.

Observație:
Dacă variabilele aleatoare discrete simple X , Y și Z sunt <u>independente</u>, atunci $p_{ijk}=p_i\cdot q_j\cdot r_k$

4. Produsul dintre două variabile aleatoare X și Y este variabila aleatoare care ia valoarea $x_i\cdot y_j$ (când X ia valoarea x_i și Y ia valoarea y_j) cu probabilitatea p_{ij}:

$$X\cdot Y=\begin{pmatrix} x_1\cdot y_1 & x_1\cdot y_2 & .... & x_i\cdot y_j & .... & x_n\cdot y_m \\ p_{11} & p_{12} & .... & p_{ij} & .... & p_{nm} \end{pmatrix}$$

unde probabilitatea p_{ij} ($i=\overline{1,n}$ și $j=\overline{1,m}$) este probabilitatea realizării <u>simultane</u> a evenimentelor $(X=x_i)$ și $(Y=y_j)$. Altfel spus, $p_{ij}=P\left[(X=x_i),(Y=y_j)\right]=P\left[(X=x_i)\cap(Y=y_j)\right]$.

Observații:
Dacă variabilele aleatoare discrete simple X și Y sunt <u>independente</u>, atunci $p_{ij}=p_i\cdot q_j$;
Produsul se poate extinde și pentru trei sau mai multe variabile aleatoare discrete simple.

5. Ridicarea la putere: vom numi ”puterea r a unei variabile aleatoare X ” variabila aleatoare care ia valoarea x_i^r când X ia valoarea x_i:

$$X=\begin{pmatrix} x_1^r & x_2^r & .... & x_n^r \\ p_1 & p_2 & .... & p_n \end{pmatrix}$$

6. Alte operații cu variabile aleatoare simple:

- **Inversa unei variabile aleatoare** X (care ia valori nenule) – este variabila $\frac{1}{X}$ care ia valoarea $\frac{1}{x_i}$ când X ia valoarea x_i (caz particular al ridicării la puterea -1):
- **Raportul a două variabile aleatoare X și Y** (unde Y nu ia valori nule) – este variabila $\frac{X}{Y}$ care ia valoarea $\frac{x_i}{y_j}$ dacă X ia valoarea x_i și Y ia valoarea y_j (caz particular al înmulțirii variabilei X cu variabila $\frac{1}{Y}$).

Exemplu:
Fie variabilele aleatoare discrete X şi Y, independente, cu repartiţiile: $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$ şi $Y:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$.
Să se calculeze: $3X$, X^3, $X+Y$ şi $X\cdot Y$.

Rezolvare:

$$3X=\begin{pmatrix}0\cdot 3 & 1\cdot 3 & 2\cdot 3\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 6\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\end{pmatrix};\qquad X^3=\begin{pmatrix}0^3 & 1^3 & 2^3\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 8\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\end{pmatrix};$$

$$X+Y=\begin{pmatrix}0+(-1) & 0+1 & 1+(-1) & 1+1 & 2+(-1) & 2+1\\ 0.3\cdot 0.5 & 0.3\cdot 0.5 & 0.5\cdot 0.5 & 0.5\cdot 0.5 & 0.2\cdot 0.5 & 0.2\cdot 0.5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3\\ 0.15 & 0.15 & 0.25 & 0.25 & 0.10 & 0.10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0.15 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.10\end{pmatrix};$$

$$X\cdot Y=\begin{pmatrix}0\cdot(-1) & 0\cdot 1 & 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 1\\ 0.3\cdot 0.5 & 0.3\cdot 0.5 & 0.5\cdot 0.5 & 0.5\cdot 0.5 & 0.2\cdot 0.5 & 0.2\cdot 0.5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2\\ 0.15 & 0.15 & 0.25 & 0.25 & 0.10 & 0.10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0.10 & 0.25 & 0.3 & 0.25 & 0.10\end{pmatrix}.$$

2. VARIABILE ALEATOARE DISCRETE CU UN NUMĂR INFINIT (DAR NUMĂRABIL) DE VALORI

Definirea şi operaţiile cu variabile aleatoare cu un număr infinit de valori sunt similare cu cele de la variabile aleatoare discrete simple.
Deoarece în repartiţia unei variabile aleatoare discrete ar trebui enumerate toate valorile posibile ale variabilei aleatoare precum şi probabilităţile corespunzătoare, o variabilă aleatoare cu un număr infinit de valori se va reprezenta cu ajutorul *funcţiei de probabilitate* $f(x_i)$:

$$X=\begin{pmatrix}x_i\\ f(x_i)\end{pmatrix}$$

unde $f(x_i)=P(X=x_i)=p_i$.

3. VARIABILE ALEATOARE CONTINUE

Definiţie: Fie $\{E,K,P\}$ câmp borelian de probabilitate. Funcţia $X:E\to\mathbb{R}$ se numeşte *variabilă aleatoare* dacă:

$$\text{pentru } (\forall)a\in\mathbb{R},\ \{e\in E \mid X(e)<a\}\in K$$

(în notaţie simplificată, scriem direct $\{X<a\}$)

Definiţie: Funcţia $F_X:\mathbb{R}\to[0,1]$ definită prin:

$$F_X(x)=P(\{e\in E \mid X(e)<x\}),\ \text{cu } a\in\mathbb{R}$$

se numeşte ***funcţia de repartiţie*** *a variabilei aleatoare* X.
(prescurtat, se scrie: $F_X(x)=P(X<x)$)

Proprietăţi:

- Funcţie mărginită: $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$
- F_X este continuă la stânga : $F(x-0)=F(x)$ pentru $\forall x\in\mathbb{R}$, şi are un număr cel mul numărabil de puncte de discontinuitate de prima speţă.
- Este nedescrescătoare ($F_X(x_1)\le F_X(x_2)$ dacă $x_1<x_2$, pentru $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$)

Definiţie: Fie $\{E,K,P\}$ câmp borelian de probabilitate. Considerăm o clasă de variabile aleatoare X pentru care există o funcţie $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ cu un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speţă (deci integrabilă), ce satisface relaţia:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$$

unde $F(x)$ este funcţia de repartiţie a variabilei X. Atunci funcţia f se numeşte ***densitate de repartiţie (sau de probabilitate)*** a variabilei aleatoare X.

Observaţie:
Dacă f este continuă în $x \in \mathbb{R}$, atunci F este derivabilă în x şi avem: $F'(x) = f(x)$.

Proprietăţi:

- Funcţie pozitivă: $f(x) \geq 0$, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$
- Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ şi F continuă, atunci $P(\{a \leq X < b\}) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Observaţie:
În cazul variabilelor aleatoare continue, operaţiile definite pentru variabile discrete au alte forme de definire (cu ajutorul densităţilor de repartiţie).

4. CARACTERISTICI NUMERICE (VALORI TIPICE) ALE VARIABILELOR ALEATOARE

4.1. MEDIA unei variabilei aleatoare:

- **Cazul discret:**

Fie variabila aleatoare discretă simplă $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & .... & x_n \\ p_1 & p_2 & .... & p_n \end{pmatrix}$, cu $p_i \geq 0$ şi $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Media variabilei X este numărul:

$$\boxed{m = M[X] = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i}$$

Pentru $n \to \infty$ (cazul discret cu o infinitate de valori numărabile), seria $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ trebuie să fie convergentă !!!

- **Cazul variabilelor continue:**

Fie variabila aleatoare continuă $X = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, cu $x \in \mathbb{R}$. Media variabilei X este integrala improprie:

$$\boxed{m = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx}$$. (trebuie să fie convergentă)

Pentru $x \in [a, b]$, media devine: $m = M[X] = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$.

Observaţie:
Există variabile aleatoare care <u>NU AU MEDIE</u>:

Fie variabila aleatoare discretă $X = \begin{pmatrix} n \\ \dfrac{1}{n(n+1)} \end{pmatrix}$, cu $n \in \mathbb{N}$. (este variabilă discretă cu o infinitate de valori).

Tabloul reprezintă o variabilă aleatoare, deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Deoarece seria $M[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n+1)}$ este divergentă, variabila aleatoare nu are medie.

Proprietăţi ale mediei:

a) valoarea medie a unei constante este egală cu constanta:

$$X : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M[X] = c$$

b) dacă X este o variabilă aleatoare discretă simplă şi $a \in \mathbb{R}$ o constantă, atunci au loc relaţiile:

$$M[a + X] = a + M[X] \text{ şi}$$
$$M[a \cdot X] = a \cdot M[X]$$

c) valoarea medie a unei variabile aleatoare este cuprinsă între cea mai mică şi cea mai mare dintre valorile posibile ale variabilei aleatoare:

$$a < M[X] < A$$

(unde am notat $a = \min_i x_i$ şi $A = \max_i x_i$)

d) valoarea medie a unei sume finite de variabile aleatoare este egală cu suma valorilor medii ale variabilelor aleatoare respective:

$$M[X+Y+Z+...] = M[X]+M[Y]+M[Z]+........$$

e) valoarea medie a unui produs de variabile aleatoare ***independente*** este egală cu produsul mediilor variabilelor considerate:

$$M[X \cdot Y \cdot Z \cdot ...] = M[X] \cdot M[Y] \cdot M[Z] \cdot ....$$

Atenţie!!! dacă variabilele aleatoare nu sunt independente, se calculează variabila produs şi apoi media ei, cu definiţia.

f) Oricare ar fi variabila aleatoare X, are loc relaţia:

$$(M[X])^2 \leq M[X^2]$$

g) Inegalitatea lui Schwarz:

Fie X şi Y două variabile aleatoare. Are loc inegalitatea:

$$(M[X \cdot Y])^2 \leq M[X^2] \cdot M[Y^2]$$

4.2. MOMENT INIŢIAL DE ORDIN k ($k \in \mathbb{N}$ **)** al variabilei aleatoare X : **media lui** X^k**.**

Se notează cu m_k sau $M_k[X]$ sau $M[X^k]$.

- **Cazul discret:**

$$m_k = M_k[X] = M[X^k] = \sum_{i \geq 1} x_i^k \cdot p_i$$

- **Cazul variabilei continue** $X = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ cu $x \in [a,b]$:

$$m_k = M_k[X] = M[X^k] = \int_a^b x^k \cdot f(x)dx$$

Observaţii:

1. Momentul iniţial de ordinul 0 al variabilei aleatoare X este: $m_0 = M[X^0] = M[1] = 1$

2. Momentul iniţial de ordinul 1 al variabilei aleatoare X este chiar media variabilei: $m_1 = M[X^1] = M[X]$.

4.3. MOMENT CENTRAT DE ORDIN k

În raport cu variabila aleatoare X, se numeşte moment centrat de ordin k raportat la constanta a media variabilei $(X-a)^k$.

Pentru $a = M[X]$ (constanta este media variabilei X), obţinem **momentul centrat de ordin** k **al variabilei** X :

- **Cazul discret:**

$$\mu_k(X) = M\left((X - M[X])^k\right) = \sum_{i \geq 1} (x_i - M[X])^k \cdot p_i$$

- **Cazul variabilei continue** $X = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ cu $x \in [a,b]$:

$$\mu_k(X) = M\left((X - M[X])^k\right) = \int_a^b (x-m)^k f(x)dx$$

Observaţie:

Variabila aleatoare $X - M[X]$ se numeşte **abaterea de la medie** a variabilei aleatoare X .

De multe ori la o variabilă aleatoare ne interesează cât de mult se abat valorile variabilei de la valoarea medie.

Exemplu:

Fie $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$, calculăm şi obţinem $M[X] = 0$. Observăm că valorile lui X nu diferă mult de medie (nu sunt „împrăştiate” faţă de valoarea medie).

Fie $Y=\begin{pmatrix} -1000 & -5 & 5 & 1000 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$, calculăm şi obţinem $M[X]=0$. Observăm că valorile lui Y diferă mult de medie (sunt foarte „împrăştiate” faţă de valoarea medie).

Concluzie: Trebuie să stabilim un indicator numeric al împrăştierii valorilor variabilei aleatoare în jurul valorii medii.

Valoarea medie a abaterii de la medie nu poate caracteriza această împrăştiere deoarece este NULĂ pentru orice variabilă aleatoare:

$$M\big[X-M[X]\big]=M[X]-M\big[M[X]\big]=M[X]-M[X]=0$$

Vom caracteriza împrăştierea valorilor variabilei aleatoare X prin valoarea medie a abaterilor absolute $\big|X-M[X]\big|$ pe care o numim **abatere medie**.

Dacă X are tabloul de repartiţie: $X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$, atunci repartiţia abaterii absolute este:

$\begin{pmatrix} |x_1-m| & |x_2-m| & \ldots & |x_n-m| \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$, unde $m=M[X]$,

iar abaterea medie este: $p_1|x_1-m|+p_2|x_2-m|+......+p_n|x_n-m|$.

Folosirea abaterii medii este foarte incomodă în calcule, motiv pentru care se foloseşte expresia: $M\left[(X-m)^2\right]$.

4.4. DISPERSIA variabilei aleatoare X este *momentul centrat de ordinul 2 al variabilei*:

$$\sigma^2=D^2[X]=M\left[(X-m)^2\right],\ \text{unde}\ m=M[X].$$

Formula de calcul a dispersiei: $\sigma^2=M\left[X^2\right]-\left(M[X]\right)^2$.

Dispersia este cea mai bună valoare care caracterizează împrăştierea valorilor $x_1,x_2,.....,x_n$ sau, altfel spus, media variabilei este punctul cel mai potrivit faţă de care trebuie să măsurăm devierile acestor valori.

Proprietăţi ale dispersiei:

a) dispersia unei constante este nulă:

$$D^2[c]=0$$

b) două variabile aleatoare care diferă printr-o constantă au dispersiile egale:
Considerăm variabilele aleatoare X şi $Y=a+X$.
Atunci: $M[Y]=M[a+X]=a+M[X]$ şi calculând dispersia lui Y obţinem: $D^2[Y]=D^2[X]$.

c) $D^2[aX]=a^2D^2[X]$, adică: $D^2\left[\sum_{i=1}^{k}a_iX_i\right]=\sum_{i=1}^{k}a^2D^2[X_i]$.
În particular, pentru două variabile aleatoare X şi Y putem deduce: $D^2[X-Y]=D^2[X]+D^2[Y]$

d) dispersia unei sume finite de variabile aleatoare independente (în totalitate sau două câte două) este egală cu suma dispersiilor:

$$D^2[X+Y+Z+...]=D^2[X]+D^2[Y]+D^2[Z]+........$$

4.5. În practică nu se foloseşte dispersia, ci **abaterea medie pătratică**: $\sigma=D[X]=\sqrt{D^2[X]}$, care are avantajul exprimării prin aceleaşi unităţi de măsură ca şi valorile variabilei aleatoare X.

Proprietăţi ale abaterii medii pătratice: (rezultă din proprietăţile dispersiei)

a) $D[c]=0$, unde $c\in\mathbb{R}$

b) $D[a+X]=D[X]$

c) $D[aX]=|a|\cdot D[X]$

4.6. COVARIANŢA variabilelor aleatoare X şi Y:

$$Cov[X,Y] = M\left[\left(X - M[X]\right)\left(Y - M[Y]\right)\right]$$

sau (formulă echivalentă): $$Cov[X,Y] = M[XY] - M[X]M[Y]$$

de unde se poate scrie:

$$D^2[X \pm Y] = D^2[X] + D^2[Y] \pm 2Cov[X,Y]$$

Observaţie:

Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare *independente*, atunci $Cov[X,Y] = 0$.

RECIPROC NU E ADEVĂRAT.

4.7. COEFICIENTUL DE CORELAŢIE al variabilelor aleatoare X şi Y (cu $\sigma_X \neq 0$ şi $\sigma_Y \neq 0$) este reprezentat de numărul:

$$\rho[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

Proprietăţi ale coeficientului de corelaţie:

1) Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare *independente*, atunci $\rho[X,Y] = 0$.

2) Pentru orice variabile aleatoare X şi Y avem: $-1 \leq \rho[X,Y] \leq 1$

3) Dacă pentru două constante reale a şi b, variabila aleatoare Y se poate scrie: $Y = aX + b$, atunci:

$$\rho[X,Y] = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$$

INEGALITATEA LUI CEBÂŞEV

Fie X o variabilă aleatoare care admite medie şi dispersie finite. Atunci, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, are loc inegalitatea:

$$P\left(\left\{|X - m| < \varepsilon\right\}\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \text{ unde } m = M[X]$$

Observaţii:

1. Această inegalitate dă o margine inferioară pentru probabilitatea ca abaterea absolută a unei variabile aleatoare cu dispersia cunoscută să fie mai mică decât un număr dat.
2. Prin explicitarea inegalităţii cu modul: $|X - m| < \varepsilon$:

   $$-\varepsilon < X - m < \varepsilon$$

   sau echivalent: $$m - \varepsilon < X < m + \varepsilon$$

   inegalitatea lui Cebâşev poate fi scrisă şi sub forma:

   $$P\left(\left\{m - \varepsilon < X < m + \varepsilon\right\}\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

3. Există şi o formă „complementară” pentru inegalitatea lui Cebâşev, şi anume:

   $$P\left(\left\{|X - m| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Exemplu:

Fie $X = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$. Să se estimeze probabilitatea $P\left(\left\{|X - m| < 0.2\right\}\right)$.

TEOREMA „3σ”

Cu o probabilitate cuprinsă între $\frac{8}{9}$ şi 1, orice variabilă aleatoare ia valori cuprinse între $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$.

(unde m este media valorilor variabilei şi σ este abaterea medie pătratică).

<u>*Dem:*</u>

În inegalitatea lui Cebâşev luăm $\varepsilon = k\sigma$ şi obţinem: $P\left(\left\{|X - m| < k\sigma\right\}\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2 \cdot \sigma^2}$, sau echivalent:

$$P\left(\left\{m-k\sigma < X < m+k\sigma\right\}\right) \geq 1-\frac{1}{k^2}.$$

Pentru $k=3$ obţinem: $P\left(\left\{m-3\sigma < X < m+3\sigma\right\}\right) \geq 1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}=0.88$.

Deci, cu o probabilitate cuprinsă între 0.88 şi 1, orice variabilă aleatoare ia valori cuprinse între $\left(m-3\sigma, m+3\sigma\right)$.

RELAŢIA DINTRE MOMENTELE INIŢIALE ŞI MOMENTELE CENTRATE pentru o variabilă aleatoare:

Fie X o variabilă aleatoare pentru care notăm cu:

m = media variabilei ($M\left[X\right]$)

m_k = momentul iniţial de ordin k (media variabilei X^k)

μ_k = momentul centrat de ordin k (media variabilei $\left(X-m\right)^k$)

Atunci orice moment centrat de ordinul k se poate calcula în funcţie de momentele iniţiale de ordin $\leq$ k după formula:

$$\boxed{\mu_k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \cdot C_k^j \cdot m^j \cdot m_{k-j}}$$

Exemplu:

Pentru $k=2$, calculăm formula dispersiei (momentul centrat de ordinul 2) cu ajutorul acestei formule:

$$\mu_2 = \sum_{j=0}^{2}(-1)^j \cdot C_2^j \cdot m^j \cdot m_{2-j} = C_2^0 m_2 - C_2^1 m^1 m_1 + C_2^2 m^2 m_0$$

Ştim că: $m_0 = M\left(X^0\right) = M\left[1\right]=1$ şi $m_1 = m = M\left[X\right]$

Înlocuind şi formulele corespunzătoare ale combinărilor, obţinem:

$$\mu_2 = m_2 - 2m_1^2 + m_1^2 = m_2 - m_1^2 = M\left[X^2\right] - \left(M\left[X\right]\right)^2 = D^2\left[X\right]$$

FUNCŢIA GENERATOARE DE MOMENTE a unei variabile aleatoare

Se introduce pentru simplificarea calculelor momentelor.

<u>Definiţie:</u> Se numeşte **funcţie generatoare de momente** a unei variabile aleatoare X, valoarea medie a variabilei $e^{t\cdot X}$, unde $t \in \mathbb{R}$.

Notăm funcţia generatoare de momente cu $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dată prin: $g\left(t\right) = M\left[e^{t\cdot X}\right]$.

- **Cazul discret:**

Fie $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & .... & x_n \\ p_1 & p_2 & .... & p_n \end{pmatrix}$ o variabilă aleatoare discretă, deci $e^{t\cdot X} = \begin{pmatrix} e^{tx_1} & e^{tx_2} & .... & e^{tx_n} \\ p_1 & p_2 & .... & p_n \end{pmatrix}$ iar funcţia generatoare de momente este $g\left(t\right) = M\left[e^{t\cdot X}\right] = \sum_{i=1}^{n} e^{t\cdot x_i} p_i$.

- **Cazul variabilei continue:**

Fie $X = \begin{pmatrix} x \\ f\left(x\right) \end{pmatrix}$ cu $x \in \left[a,b\right]$, deci $e^{tX} = \begin{pmatrix} e^{tx} \\ f\left(x\right) \end{pmatrix}$, iar funcţia generatoare de momente este $g\left(t\right) = M\left[e^{t\cdot X}\right] = \int_a^b e^{t\cdot x} f\left(x\right) dx$.

Proprietăţi ale funcţiei generatoare de momente:

1. $g\left(0\right)=1$

2. Dacă $X_1, X_2, ..., X_n$ sunt variabile aleatoare independente cu funcţiile generatoare de momente $g_1\left(t\right), g_2\left(t\right), ..., g_n\left(t\right)$, atunci funcţia generatoare de momente a variabilei aleatoare $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ este $g\left(t\right) = g_1\left(t\right)\cdot g_2\left(t\right)\cdot ....\cdot g_n\left(t\right)$.

3. Dacă variabila aleatoare X admite momente finite de orice ordin, atunci $g(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\cdot m_k$.

4. (Formula generării momentelor iniţiale):

Funcţia generatoare de momente este de n ori derivabilă în raport cu t şi $g^{(k)}(0)=m_k$ (sau $g^{(k)}(t)\big|_{t=0}=m_k$).

- **Cazul discret:**

Forma derivatei de ordin k a funcţiei $g(t)=\sum_{i=1}^{n}e^{t\cdot x_i}p_i$ este: $\boxed{g^{(k)}(t)=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,k}\cdot e^{t\cdot x_i}p_i}$, deci înlocuind pe t cu 0 obţinem: $\boxed{g^{(k)}(0)=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,k}p_i=m_k}$

- **Cazul variabilelor continue:**

Forma derivatei de ordin k a funcţiei $g(t)=\int_a^b e^{t\cdot x}f(x)dx$ este: $\boxed{g^{(k)}(t)=\int_a^b x^k\cdot e^{t\cdot x}f(x)dx}$, deci înlocuind pe t cu 0 obţinem: $\boxed{g^{(k)}(0)=\int_a^b x^k f(x)dx=m_k}$

FUNCŢIA CARACTERISTICĂ a unei variabile aleatoare

Se foloseşte tot pentru calculul momentelor.

<u>*Definiţie:*</u> Se numeşte **funcţie caracteristică** a unei variabile aleatoare X , valoarea medie a variabilei $e^{i\cdot t\cdot X}$, unde $t\in\mathbb{R}$ şi $i=\sqrt{-1}$.

Notăm funcţia caracteristică cu $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, dată prin: $\varphi(t)=M\left[e^{i\cdot t\cdot X}\right]$.

- **Cazul discret:**

Fie $X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & .... & x_n \\ p_1 & p_2 & .... & p_n\end{pmatrix}$ o variabilă aleatoare discretă, deci $e^{i\cdot t\cdot X}=\begin{pmatrix} e^{itx_1} & e^{itx_2} & .... & e^{itx_n} \\ p_1 & p_2 & .... & p_n\end{pmatrix}$ iar funcţia caracteristică este $\varphi(t)=M\left[e^{i\cdot t\cdot X}\right]=\sum_{j=1}^{n}e^{i\cdot t\cdot x_j}p_j$.

- **Cazul variabilelor continue:**

Fie $X=\begin{pmatrix} x \\ f(x)\end{pmatrix}$ cu $x\in[a,b]$, deci $e^{itX}=\begin{pmatrix} e^{itx} \\ f(x)\end{pmatrix}$, iar funcţia caracteristică este $\varphi(t)=M\left[e^{i\cdot t\cdot X}\right]=\int_a^b e^{i\cdot t\cdot x}f(x)dx$.

Important:

Pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$ putem scrie: $e^{i\cdot\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ şi respectiv: $e^{-i\cdot\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha$.

Puterile lui „i”: $i^{4k}=1$

$i^{4k+1}=i$

$i^{4k+2}=-1$

$i^{4k+3}=-i$

Exemplu:

Găsiţi funcţia caracteristică pentru variabila aleatoare discretă: $X=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$.

<u>*Rezolvare:*</u>

Pentru variabila aleatoare X , avem: $e^{itX}=\begin{pmatrix} e^{-it} & e^{it} \\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$, deci putem scrie funcţia caracteristică:

$$\varphi(t)=M\left[e^{i\cdot t\cdot X}\right]=e^{-it}\cdot 0.5+e^{it}\cdot 0.5=0.5\left(e^{-it}+e^{it}\right)=0.5(\cos t-i\sin t+\cos t+i\sin t)=0.5\cdot 2\cos t=\cos t$$

Deci funcţia caracteristică este: $\varphi(t)=\cos t$.

Proprietăţi ale funcţiei caracteristice:

a) funcţia caracteristică este o funcţie uniform continuă pe $\mathbb{R}$.

b) $\varphi(0)=1$

c) Dacă $X_1, X_2, ..., X_n$ sunt variabile aleatoare independente cu funcţiile caracteristice $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$, atunci funcţia caracteristică a variabilei aleatoare $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ este $\varphi(t) = \varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)\cdot....\cdot\varphi_n(t)$.

Consecinţe:

c.1) Dacă $Y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot X_k$, cu $\lambda_k \in \mathbb{R}$, unde $X_1, X_2, ..., X_n$ sunt variabile aleatoare independente cu funcţiile caracteristice $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$, atunci $\varphi_Y(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(\lambda_k t)$.

c.2) Un produs de funcţii caracteristice este tot o funcţie caracteristică. În particular, dacă $\varphi(t)$ este funcţia caracteristică a variabilei aleatoare X, atunci $\left[\varphi(t)\right]^n$ este tot o funcţie caracteristică.

d) Fie $\varphi_X(t)$ funcţia caracteristică a variabilei aleatoare X şi fie $Y = \alpha X$. Atunci $\varphi_Y(t) = \varphi_X(\alpha t)$.

e) Fie variabila aleatoare X şi $\varphi_X(t)$ funcţia ei caracteristică. Fie $Y = aX + b$. Atunci $\varphi_Y(t) = \varphi_X(at)e^{ibt}$.

f) Dacă variabila aleatoare X admite momente finite de orice ordin, atunci $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \cdot m_k$.

g) (Formula de legătură cu momentele iniţiale):

Funcţia caracteristică este de n ori derivabilă în raport cu t şi $\frac{1}{i^k}\varphi^{(k)}(0) = m_k$ (sau $\frac{1}{i^k}\varphi^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = m_k$).

- **Cazul discret:**

Forma derivatei de ordin k a funcţiei $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{i\cdot t\cdot x_i} p_i$ este: $\boxed{\varphi^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n} i^k \cdot {x_j}^k \cdot e^{i\cdot t\cdot x_j} p_j}$, deci înlocuind pe t cu 0 obţinem: $\boxed{\varphi^{(k)}(0) = i^k \sum_{j=1}^{n} {x_j}^k p_j = i^k \cdot m_k}$

- **Cazul variabilelor continue:**

Forma derivatei de ordin k a funcţiei $\varphi(t) = \int_a^b e^{i\cdot t\cdot x} f(x)dx$ este: $\boxed{\varphi^{(k)}(t) = \int_a^b i^k \cdot x^k \cdot e^{i\cdot t\cdot x} f(x)dx}$, deci înlocuind pe t cu 0 obţinem: $\boxed{\varphi^{(k)}(0) = i^k \int_a^b x^k \cdot e^{i\cdot t\cdot x} f(x)dx = i^k \cdot m_k}$

REPARTIŢII CLASICE

1. V.a. discrete (mulţime numărabilă de valori)

REPARTIŢIA POISSON (v.a. Poisson, legea evenimentelor rare)

O v.a. X are repartiţie Poisson dacă funcţia ei de probabilitate este de forma:

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \text{ cu } x \in \mathbb{N} \text{ şi } \lambda > 0$$

Fie $X = \begin{pmatrix} x \\ e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \end{pmatrix}$, cu $x \in \mathbb{N}$ şi $\lambda > 0$

a) $f(x)$ este funcţie de probabilitate deoarece:

- $e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \geq 0$ (evident)
- $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$

  (am folosit dezvoltarea în serie Taylor pentru e^x: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$)

b) Media şi dispersia variabilei X :

Media: $M[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} = 0 + e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda \cdot \lambda^{x-1}}{x(x-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$

Dispersia: $D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2$

Calculez $M[X^2] = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1+1) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x}{x!} + \underbrace{e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!}}_{M[X]} =$

$$= 0 + 0 + e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^2 \cdot \lambda^{x-2}}{x(x-1)(x-2)!} + M[X] = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + M[X] =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + M[X] = \lambda^2 + \lambda$$

Deci, $D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

REPARTIŢIA PASCAL (v.a. a „primului succes”, repartiţia geometrică)

O v.a. X are repartiţie Pascal dacă tabloul ei de repartiţie este de forma:

$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & .... & n & .... \\ p & p \cdot q & p \cdot q^2 & .... & p \cdot q^{n-1} & .... \end{pmatrix}$, cu $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ şi $p + q = 1$

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p \cdot q^{n-1}$ este funcţie de probabilitate deoarece:

- $\sum_{n=1}^{\infty} p \cdot q^{n-1} > 0$ (evident pentru $0 < p < 1$, $0 < q < 1$)
- Seria puterilor $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ are suma $\frac{x}{1-x}$ şi este convergentă pentru $0 < x < 1$ (deci se aplică şi pentru $x = q$)

b) Media şi dispersia variabilei X :

Media: $M[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p \cdot q^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1} = p \left(\sum_{n=1}^{\infty} q^n \right)' = p \left(\frac{q}{1-q} \right)' = p \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

Dispersia: $D^2[X]=M[X^2]-(M[X])^2$

Calculez $M[X^2]=\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot p\cdot q^{n-1} = p\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot n\cdot q^{n-1} = p\left(\sum_{n=1}^{\infty} nq^n\right)' = p\left(\sum_{n=1}^{\infty} q\cdot n\cdot q^{n-1}\right)' = p\left[\left(q\sum_{n=1}^{\infty} q^n\right)'\right]' =$

$$= p\left[q\left(\frac{q}{1-q}\right)'\right]' = p\left(q\frac{1-q+q}{(1-q)^2}\right)' = p\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right)' = p\frac{1-2q+q^2+2q-2q^2}{(1-q)^4}$$

$$= p\frac{1+q}{(1-q)^3} = p\frac{1+q}{p^3} = \frac{1+q}{p^2}$$

Deci, $D^2[X]=M[X^2]-(M[X])^2 = \frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}$

<u>2. V.a. continue</u>

O funcţie $f(x)$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este **densitate de probabilitate** dacă:

- $f(x)\geq 0$ pentru $\forall x\in\mathbb{R}$
- are un număr finit de discontinuităţi (de prima speţă)
- este mărginită
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$

(Practic, se verifică prima şi ultima condiţie).

REPARTIŢIA UNIFORM CONTINUĂ

O v.a. $X=\begin{pmatrix} x \\ f(x)\end{pmatrix}$ are repartiţie uniform continuă dacă funcţia ei de probabilitate este de forma:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}\text{, cu } b>a$$

a) $f(x)$ **este densitate de probabilitate deoarece:**

- $\frac{1}{b-a}>0$ (evident pentru $b>a$)
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{\infty}0dx = \frac{1}{b-a}x\Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a}=1$

b) Media şi dispersia variabilei X **:**

Media: $M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} x\cdot 0dx+\int_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{\infty} x\cdot 0dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$

Dispersia: $D^2[X]=M[X^2]-(M[X])^2$

Calculez:

$M[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} x^2\cdot 0dx+\int_{a}^{b} x^2\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{\infty} x^2\cdot 0dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$

Deci, $D^2[X]=M[X^2]-(M[X])^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{12}$.

REPARTIŢIA EXPONENŢIALĂ NEGATIVĂ

O v.a. X are repartiţie exponenţială negativă de parametru μ dacă funcţia ei de probabilitate (densitatea de probabilitate) este de forma: $f(x)=\mu e^{-\mu\cdot x}$, cu $x\geq 0$ şi $\mu>0$

Fie $X=\begin{pmatrix} x \\ \mu e^{-\mu\cdot x}\end{pmatrix}$, cu $x\geq 0$ şi $\mu>0$.

a) $f(x)$ **este densitate de probabilitate deoarece:**

- $\mu e^{-\mu\cdot x}>0$ (evident pentru $x\geq 0$ şi $\mu>0$)
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^{\infty}\mu\cdot e^{-\mu x}dx=-\int_0^{\infty}\left(e^{-\mu x}\right)'dx=-e^{-\mu x}\Big|_0^{+\infty}=0+1=1$

b) Media şi dispersia variabilei X **:**

Media: $M[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx=\mu\int_0^{\infty}x\cdot e^{-\mu x}dx$

Schimbare de variabilă: $\mu x=y$, deci $dx=\frac{1}{\mu}dy$

Schimbarea capetelor de integrare: $\begin{cases} x=0 & \Rightarrow y=0 \\ x=+\infty & \Rightarrow y=+\infty\end{cases}$ (deci se păstrează capetele de integrare)

Rezultă că: $M[X]=\int_0^{\infty}y\cdot e^{-y}\frac{1}{\mu}dy=\frac{1}{\mu}\Gamma(2)=\frac{1}{\mu}\cdot 1\cdot\Gamma(1)=\frac{1}{\mu}$

Dispersia: $D^2[X]=M\left[X^2\right]-\left(M[X]\right)^2$

Calculez: $M\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)dx=\mu\int_0^{\infty}x^2\cdot e^{-\mu x}dx=\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}x^2\cdot\mu^2\cdot e^{-\mu x}dx$

Schimbare de variabilă: $\mu x=y$, deci $dx=\frac{1}{\mu}dy$

Schimbarea capetelor de integrare: $\begin{cases} x=0 & \Rightarrow y=0 \\ x=+\infty & \Rightarrow y=+\infty\end{cases}$ (deci se păstrează capetele de integrare)

Rezultă că: $M\left[X^2\right]=\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}y^2\cdot e^{-y}\frac{1}{\mu}dy=\frac{1}{\mu^2}\Gamma(3)=\frac{1}{\mu^2}\cdot 2!=\frac{2}{\mu^2}$

Deci, $D^2[X]=M\left[X^2\right]-\left(M[X]\right)^2=\frac{2}{\mu^2}-\frac{1}{\mu^2}=\frac{1}{\mu^2}$.

REPARTIŢIA NORMALĂ (GAUSS)

O v.a. X are repartiţie normală (Gauss) dacă funcţia ei de probabilitate (densitatea de probabilitate) este de forma: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$, cu $m\in\mathbb{R}$ şi $\sigma>0$ (m și σ se numesc parametrii distribuției normale, și putem scrie: $X\in N(m,\sigma)$).

a) $f(x)$ **este densitate de probabilitate deoarece:**

- $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}>0$ (evident pentru $\sigma>0$)
- $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}dx$

Schimbare de variabilă: $\frac{x-m}{\sigma}=y$, deci $x=y\sigma+m$ şi $dx=\sigma dy$

Schimbarea capetelor de integrare: $\begin{cases} x=-\infty & \Rightarrow y=-\infty \\ x=+\infty & \Rightarrow y=+\infty\end{cases}$ (deci se păstrează capetele de integrare)

Rezultă că: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\cdot\sigma dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1$

(am folosit rezultatul integralei Euler-Poisson: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt{2\pi}$)

b) Media şi dispersia variabilei X **:**

Media: $M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}dx$

Schimbare de variabilă: $\frac{x-m}{\sigma} = y$, deci $x = y\sigma + m$ şi $dx = \sigma dy$

Schimbarea capetelor de integrare: $\begin{cases} x=-\infty & \Rightarrow y=-\infty \\ x=+\infty & \Rightarrow y=+\infty \end{cases}$ (deci se păstrează capetele de integrare)

Rezultă că: $M[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma y+m)e^{-\frac{1}{2}y^2}\cdot\sigma dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma\cdot y\cdot e^{-\frac{1}{2}y^2}dy + \frac{m}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy}_{=\sqrt{2\pi}} =$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-\frac{1}{2}y^2}\right)' dy + \frac{m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + m = 0 + m = m$$

Dispersia: $D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2$

Calculez: $M[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot e^{-\left(\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}dx$

Schimbare de variabilă: $\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma} = y$, deci $x = y\sqrt{2}\sigma + m$ şi $dx = \sqrt{2}\sigma dy$

Schimbarea capetelor de integrare: $\begin{cases} x=-\infty & \Rightarrow y=-\infty \\ x=+\infty & \Rightarrow y=+\infty \end{cases}$ (deci se păstrează capetele de integrare)

Rezultă că: $M[X^2] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{2}\sigma y+m\right)^2 e^{-y^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sigma dy =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} 2\sigma^2 y^2 e^{-y^2}dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} 2\sqrt{2}\sigma\cdot m\cdot y\cdot e^{-y^2}dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} m^2 e^{-y^2}dy =$$

$$= \underbrace{-\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y\left(-2ye^{-y^2}\right)dy}_{not.\mathrm{A}} - \frac{\sqrt{2}\sigma m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-y^2}\right)' dy + \frac{m^2}{\sqrt{\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy}_{=\sqrt{\pi}} =$$

$$= A - \underbrace{\frac{\sqrt{2}\sigma m}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{m^2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = A + m^2$$

Rezolvăm integrala $A = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y\left(-2ye^{-y^2}\right)dy$ prin părţi: $f = y \Rightarrow f' = 1$ şi $g' = -2y\cdot e^{-y^2} \Rightarrow g = e^{-y^2}$

Obţinem: $A = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(\underbrace{ye^{-y^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy}_{=\sqrt{\pi}}\right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = \sigma^2$.

Deci: $M[X^2] = \sigma^2 + m^2$ şi $D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = \sigma^2 + m^2 - m^2 = \sigma^2$

c) Funcția Gauss-Laplace (funcția erorilor) $\Phi(x)$:

Este *funcția de repartiție a unei variabile aleatoare cu distribuția normală standard* ($X \in N(0,1)$):

- densitatea de probabilitate a lui $X \in N(0,1)$ este: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$
- funcția de repartiție a lui $X \in N(0,1)$ este: $\boxed{\Phi(x) = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$ și se numește funcția Gauss-Laplace (sau funcția erorilor).

Proprietăți:

- $\Phi(-\infty) = 0$
- $\Phi(+\infty) = 1$
- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$

- Se poate folosi pentru calcularea $P(a \le \varphi \le b)$, unde $\varphi \in N(m,\sigma)$:

$$\boxed{P(a \le \varphi \le b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)}$$

(cu schimbarea de variabilă $x - m = \sigma t$)

- Funcția Gauss-Laplace se folosește și în exprimarea Teoremei Limită Centrală.

Valorile funcției Gauss-Laplace sunt tabelate.

INTEGRALELE BETA ŞI GAMMA (proprietăţi)

1. Funcţia $\Gamma:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin: $\boxed{\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx}$ se numeşte funcţia Gamma (sau funcţia lui Euler de speţa a doua) şi are următoarele proprietăţi:

1) $\Gamma(1)=1$

2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

3) $\Gamma(p+1)=p\cdot\Gamma(p)$

4) $\Gamma(n+1)=n!$ pentru $n\in\mathbb{N}$

5) $\Gamma(p)=2\int_0^\infty e^{-t^2}\cdot t^{2p-1}dt$

6) $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$, cu $p\in(0,1)$ (formula complementelor)

2. Funcţia $B:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin: $\boxed{B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}$ se numeşte funcţia Beta (sau funcţia lui Euler de speţa întâi) şi are următoarele proprietăţi:

1) $B(p,q)=\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$

2) $B(p,q)=\int_0^1 \frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$

3) $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ (formula lui Dirichlet)

4) $B(p,q)=B(q,p)$ (proprietatea de simetrie)

5) $B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$ pentru $p>1, q>0$ şi

$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$ pentru $p>0, q>1$

Tabel integrale

nr.crt.	Integrala funcţiei simple	Integrala funcţiei compuse
1.	$\int \alpha dx = \alpha x + \zeta$	$\int \varphi' dx = \varphi + \zeta$
2.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \zeta \qquad n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\int \varphi^n \cdot \varphi' dx = \frac{\varphi^{n+1}}{n+1} + \zeta \qquad n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
3.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + \zeta$	$\int \frac{1}{\varphi} \cdot \varphi' dx = \ln\lvert\varphi\rvert + \zeta$
4.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \zeta$	$\int a^\varphi \varphi' dx = \frac{a^\varphi}{\ln a} + \zeta$
5.	$\int e^x dx = e^x + \zeta$	$\int e^\varphi \varphi' dx = e^\varphi + \zeta$
6.	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + \zeta$	$\int \frac{1}{\varphi^2 - a^2} \varphi' dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{\varphi-a}{\varphi+a}\right\rvert + \zeta$
7.	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + \zeta$	$\int \frac{1}{\varphi^2 + a^2} \varphi' dx = \frac{1}{a} arctg \frac{\varphi}{a} + \zeta$
8.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + \zeta$	$\int \frac{1}{\sqrt{\varphi^2 - a^2}} \varphi' dx = \ln\left\lvert \varphi + \sqrt{\varphi^2 - a^2}\right\rvert + \zeta$
9.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + \zeta$	$\int \frac{1}{\sqrt{\varphi^2 + a^2}} \varphi' dx = \ln\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + a^2}\right) + \zeta$
10.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \zeta$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - \varphi^2}} \varphi' dx = \arcsin \frac{\varphi}{a} + \zeta$
11.	$\int \sin x dx = -\cos x + \zeta$	$\int \sin \varphi \cdot \varphi' dx = -\cos \varphi + \zeta$
12.	$\int \cos x dx = \sin x + \zeta$	$\int \cos \varphi \cdot \varphi' dx = \sin \varphi + \zeta$
13.	$\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + \zeta$	
14.	$\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} + \zeta$	
15.	$\int tgx dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + \zeta$	$\int tg\varphi \cdot \varphi' dx = -\ln\lvert\cos\varphi\rvert + \zeta$
16.	$\int ctgx dx = \ln\lvert\sin x\rvert + \zeta$	$\int ctg\varphi \cdot \varphi' dx = \ln\lvert\sin\varphi\rvert + \zeta$
17.	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + \zeta$	$\int \frac{1}{\sin^2 \varphi} \varphi' dx = -ctg\varphi + \zeta$
18.	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + \zeta$	$\int \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \varphi' dx = tg\varphi + \zeta$
19.	$\int shx dx = chx + \zeta$	$\int sh\varphi \cdot \varphi' dx = ch\varphi + \zeta$
20.	$\int chx dx = shx + \zeta$	$\int ch\varphi \cdot \varphi' dx = sh\varphi + \zeta$

Obs: Funcţiile "hiperbolice" sunt:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "sinus hiperbolic" : $f(x) = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "cosinus hiperbolic": $f(x) = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$