SEMINAR 1 ŞI 2

Conținut:
Metode de numărare - elemente de combinatorică (recapitulare, aplicații).
Câmp de probabilitate finit – evenimente, operații cu evenimente, probabilitate.
Scheme clasice de probabilitate. Aplicații diverse.

METODE DE NUMĂRARE

Numeroase probleme practice din variate domenii de activitate, ca: ingineria electrică, radio, transmisia de date, calculatoare, teoria informației, fiabilitatea sistemelor şi altele, conduc la studiul unor *fenomene şi procese aleatoare*. Evaluarea şanselor lor de producere constituie obiectul disciplinei „teoria probabilităților”.

Calculul probabilităților conduce adesea la numărarea diferitelor cazuri posibile. Capitolul din algebră referitor la permutări, aranjamente şi combinări este foarte util în această situație.

Principiul multiplicării. Presupunem că avem două situații A şi B, situația A se poate realiza în *m* moduri, iar situația B în *k* moduri. Numărul de moduri în care se poate realiza A şi B este $m\times k$.

Mai general, presupunem că avem $r\geq 2$ situații. În prima situație putem face *m*1 alegeri, în a doua *m*2,......, în a *r*-a situație m_r alegeri, deci în total $m_1\times m_2\times......\times m_r$.

Exemplu: Care este numărul situațiilor care apar aruncând două zaruri?
Pentru primul zar sunt 6 situații, pentru al doilea 6 situații, în total 6×6 situații.

În continuare vom face distincție între o mulțime cu o ordine determinată de dispunere a elementelor sale, numită *mulțime ordonată* şi o mulțime în care nu ne interesează ordinea elementelor.

Permutări: Fie o mulțime A cu n elemente. Fiecare mulțime ordonată care se formează cu cele n elemente ale mulțimii A se numeşte *permutare* a elementelor acelei mulțimi. Numărul permutărilor cu n elemente se notează P_n şi este: $P_n = n!$

De reținut: se „lucrează” cu <u>toate</u> elementele mulțimii, ordinea lor contează.

Aranjamente: Fie o mulțime A cu n elemente. Submulțimile *ordonate* ale lui A, având fiecare câte k elemente, $0\leq k\leq n$, se numesc *aranjamente de n luate câte k*.

Numărul aranjamentelor de n luate câte k se notează: A_n^k şi este:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)....(n-k+1)$$

De reținut: contează şi numărul submulțimilor, şi <u>ordinea</u> elementelor din fiecare subgrupă.

Combinări: Fie o mulțime A cu n elemente. Submulțimile lui A având fiecare câte k elemente, $0\leq k\leq n$, se numesc *combinări de n luate câte k*.

Numărul combinărilor de n luate câte k se notează: C_n^k şi este:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{A_n^k}{P_k}$$

De reținut: contează <u>doar</u> numărul submulțimilor, nu şi <u>ordinea</u> elementelor din fiecare subgrupă.

Alte formule utile:

- Formula combinărilor complementare: $C_n^k = C_n^{n-k}$
- Suma combinărilor: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n = 2^n$
- Formula de recurență: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
- Binomul lui Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k}\cdot b^k$

Aplicație combinări: Determinarea mulțimii părților unei mulțimi finite (calcularea acesteia).

Aplicații (în cadrul seminarului):

1. Câte numere naturale nenule diferite se pot forma cu cifrele $\{0,1,2,3,4\}$ dacă în fiecare astfel de număr, fiecare cifră intră cel mult odată?

2. Să se găsească numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi.

3. În câte moduri poate fi ordonată mulțimea $\{1,2,3,.....,2n\}$ astfel încât fiecare număr par să aibă rang impar?

CÂMP DE PROBABILITATE FINIT

Noțiuni primare: evenimentul şi probabilitatea

- **Experiență aleatoare:** o experiență al cărei rezultat nu poate fi anticipat cu certitudine, el depinzând de o serie de factori întâmplători (aleatori).

Exemple: aruncarea unui zar, tragerile la țintă, durata de funcționare a unei maşini, etc.

- **Probă (cazuri posibile, cazuri totale):** fiecare repetare a unei experiențe, în condiții similare.

- **Spațiu de selecție:** mulțimea rezultatelor (cazurilor) posibile ale unei experiențe aleatoare. Spațiul de selecție poate fi reprezentat printr-o *mulțime finită sau infinită*. Notație: E.

În continuare vom considera spațiul de selecție FINIT.

- **Eveniment:** un element (submulțime) a spațiului de selecție. Orice element al lui E, notat e, este un rezultat posibil al experienței.

Mulțimea tuturor evenimentelor legate de o experiență cu un *număr finit de cazuri posibile* se identifică cu familia $P(E)$ a tuturor submulțimilor mulțimii E (mulțimea părților lui E).

- **Cazuri favorabile:** mulțimea de cazuri care realizează un anumit eveniment.

- **Eveniment elementar:** evenimentul care are un singur caz favorabil.

Exemplu: La aruncarea unui zar, evenimentul „apariția numărului 1”.

- **Eveniment sigur:** evenimentul care se realizează la orice probă (toate cazurile posibile ale experienței sunt cazuri favorabile ale acestui eveniment)

Exemplu: La aruncarea unui zar, evenimentul „apariția unui număr natural nenul, ≤ 6”.

- **Eveniment imposibil:** evenimentul care nu se poate realiza în nici o efectuare a experienței (evenimentul care nu are nici un caz favorabil). Se mai poate defini ca eveniment cu mulțimea cazurilor favorabile vidă.

Exemplu: La aruncarea unui zar, evenimentul „apariția unui număr natural $\geq$ 7”.

- **Eveniment implicat de un alt eveniment:** Fie A şi B două evenimente ale spațiului de selecție E. Spunem că *evenimentul A implică evenimentul B* dacă orice caz care realizează A, realizează B (mulțimea cazurilor favorabile lui A este inclusă în mulțimea cazurilor favorabile lui B).

Exemplu: La aruncarea unui zar, evenimentul A:”apariția numerelor $\{2,4\}$” implică evenimentul B: „apariția unui număr par” .

!!! Evenimentul imposibil implică orice eveniment ($\emptyset \subset A$, pentru orice eveniment A).

Operații cu evenimente:

Considerăm două evenimente A şi B ale spațiului de selecție E.

- „A sau B” ($A \cup B$) este evenimentul a cărui realizare înseamnă realizarea *a cel puțin unuia* dintre evenimentele considerate.

Definiția se poate extinde şi la un număr mai mare de evenimente.

- „A şi B” ($A \cap B$) este evenimentul a cărui realizare înseamnă realizarea *ambelor* evenimente considerate.

Definiția se poate extinde şi la un număr mai mare de evenimente.

- „non A” ($\overline{A}$ sau CA) este evenimentul a cărui realizare constă în nerealizarea evenimentului A (mulțimea cazurilor favorabile lui „non A” este formată din toate cazurile nefavorabile lui A).

- „$A \setminus B$” este evenimentul care se realizează prin probe ale lui A şi ale lui $\overline{B}$ (cazurile favorabile lui A care nu sunt cazuri favorabile şi lui B)

- **Evenimente incompatibile:** evenimente care nu se pot realiza împreună în nici o efectuare a experienței (realizarea unuia dintre evenimente atrage după sine nerealizarea celuilalt sau altfel spus cele două evenimente *nu au nici un caz favorabil comun*).

Scriere formală: „A implică non B şi B implică non A” ($A \subset \overline{B}$ şi $B \subset \overline{A}$) sau $A \cap B = \emptyset$.

- **Evenimente compatibile:** evenimentele care au cel puțin un caz favorabil comun ($A \cap B \neq \emptyset$)

Aplicație (în cadrul seminarului):
O urnă conține bile albe şi bile negre. Se extrag succesiv din urnă două bile. Cu ajutorul evenimentelor:
A: „prima bilă extrasă este albă”
B: „a doua bilă extrasă este albă”
să se scrie evenimentele:
C: „prima bilă este neagră”
D: „cel puțin o bilă este albă”
F: „ambele bile sunt negre”
G: „o bilă şi numai una este albă”

- **Câmp finit de evenimente:** Perechea $\{E, K\}$, $K \neq \emptyset$, $K \subset \mathrm{P}(E)$ se numeşte câmp finit de evenimente dacă:
  1. $\forall A \in K \Rightarrow \overline{A} \in K$
  2. $\forall A, B \in K \Rightarrow A \cup B \in K$

- **Sistem complet de evenimente:** Fie $\{E, K\}$ un câmp finit de evenimente şi $A_1, A_2, ..., A_n \in K$.

Spunem că familia de evenimente $A_1, A_2, ..., A_n$ formează un *sistem complet de evenimente* dacă:
  1. $\forall A_i \neq \emptyset$, $i = \overline{1,n}$
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru $\forall i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$
  3. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$

Observație: Mulțimea tuturor evenimentelor elementare ataşate unei experiențe formează un sistem complet de evenimente.

Definirea probabilității peste un câmp finit de evenimente se poate face în mod clasic şi axiomatic.

Definitția clasică a probabilității se poate folosi în cazul în care experiența aleatoare are un număr finit de cazuri posibile şi toate egal probabile (echiprobabile), adică la un număr mare de efectuări ale experienței, fiecare caz are aceeaşi şansă de a se realiza.

Definiția clasică a probabilității: Fie o experiență şi evenimentele legate de aceasta astfel încât toate evenimentele să fie egal posibile. Fie evenimentul A legat de această experiență. Numim probabilitatea evenimentului A numărul:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

dat de raportul dintre numărul m al cazurilor favorabile realizării evenimentului A şi numărul n al cazurilor egal posibile (totale).

Definiția axiomatică a probabilității: Se numeşte probabilitate (măsură de probabilitate) o funcție definită pe un câmp finit de evenimente $\{E,K\}$ cu valori reale care satisface următoarele axiome:

1. $P(A)\geq 0$, pentru $\forall A\in K$

2. $P(E)=1$

3. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, pentru $\forall A,B\in K$ cu $A\cap B=\varnothing$

Proprietăți ale probabilității:

1. $\forall A\in K\Rightarrow 0\leq P(A)\leq 1$

2. $P(E)=1$

3. $P(\varnothing)=0$

4. pentru $\forall A,B\in K$ cu $A\cap B=\varnothing$ avem: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

dacă $A\cap B\neq\varnothing$ avem: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

5. pentru $\forall A,B\in K$ cu $B\subset A$ avem: $P(A\setminus B)=P(A)-P(B)$

Mai general, pentru $\forall A,B\in K$ avem: $P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$

6. $\forall A\in K\Rightarrow P(A)+P(\overline{A})=1$

7. pentru $\forall A,B\in K$ cu $B\subset A$ avem: $P(B)\leq P(A)$

Principiul includerii şi excluderii (Formula lui H. Poincare)

Extinderea şi generalizarea proprietății 4. *pentru trei sau mai multe evenimente compatibile (cu intersecția nevidă):*

Fie $A_1,A_2,....,A_n$ evenimente compatibile ($A_i\cap A_j\neq\varnothing$, pentru $\forall i,\ j=\overline{1,n}$). Atunci:

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$

şi pentru n evenimente:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i,j=1,i<j}^{n}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i,j,k=1,i<j<k}^{n}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-....+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)$$

- **Câmp finit de probabilitate:** Un sistem finit de evenimente $\{E,K\}$ asociat unei experiențe aleatoare cu un număr finit de cazuri egal posibile împreună cu probabilitățile acestor evenimente formează un *câmp finit de probabilitate* notat $\{E,K,P\}$

Odată introdusă noțiunea de probabilitate, putem defini două noțiuni importante în teoria probabilităților şi anume noțiunea de **probabilitate condiționată** şi de **independență în probabilitate** a evenimentelor.

Uneori trebuie să calculăm probabilitatea unui eveniment *A* legat de un eveniment *B*, *în ipoteza că evenimentul B s-a realizat*. Pentru aceasta restrângem mulțimea evenimentelor care realizează evenimentul *A* la cele care realizează şi evenimentul *B*, deci restrângem *E* la *B*. Pentru ca această restricție să aibă sens este necesar ca evenimentul *B* să fie de probabilitate nenulă.

Fie $\{E,K,P\}$ un câmp finit de probabilitate şi $A,B\in K$ cu $P(B)\neq 0$ (respectiv $P(A)\neq 0$)

- Numim **probabilitatea evenimentului** A **condiționată de evenimentul** B (notată $P_B(A)$ sau $P(A|B)$) probabilitatea de realizare a evenimentului A în ipoteza că evenimentul B s-a realizat, probabilitate definită prin:

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observație: Din definiția de mai sus putem deduce formula simetrică a **probabilitatea evenimentului** B **condiționată de evenimentul** A (notată $P_A(B)$ sau $P(B|A)$) probabilitatea de realizare a evenimentului B în ipoteza că evenimentul A s-a realizat:

$$P(B|A) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Astfel, putem defini **intersecția a două evenimente condiționate** ca fiind:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

(sau echivalent $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$)

Generalizare: intersecția a n evenimente condiționate succesiv:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot .... \cdot P_{A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exemplu (se rezolvă la seminar):
O urnă conține 6 bile albe şi 5 negre. Se extrag succesiv 3 bile (fără întoarcerea bilei extrase). Care este probabilitatea ca prima bilă să fie albă, a doua neagră şi a treia neagră?

Formula probabilității totale

Fie $\{E, K, P\}$ un câmp finit de evenimente, $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, $A_i \in K$, $i = \overline{1,n}$, un sistem complet de evenimente şi B un eveniment oarecare. Atunci:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)$$

($P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + ... + P(A_n) \cdot P_{A_n}(B)$)

Exemplu (se rezolvă la seminar):
Se consideră două urne identice. Una conține 3 bile albe şi 4 bile negre iar cealaltă 4 bile albe şi 5 bile negre. Din una din aceste urne, aleasă la întâmplare, se extrage o bilă. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă?

Formula lui Bayes

Fie $\{E, K, P\}$ un câmp finit de evenimente, $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, $A_i \in K$, $i = \overline{1,n}$, un sistem complet de evenimente şi B un eveniment oarecare. Atunci:

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P_{A_j}(B)} = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)}$$

Exemplu (se rezolvă la seminar):
Fie 3 urne care conțin bile albe şi roşii astfel: U_1 : 2 bile roşii şi 4 bile albe, U_2 : 1 bilă roşie şi 2 bile albe, U_3 : 5 bile roşii şi 4 bile albe. Fie A_i evenimentul de a extrage o bilă oarecare din urna U_i, cu $i = \overline{1,3}$.

Presupunem că probabilitatea de a extrage o bilă din urna U_1 este $P(A_1) = \frac{1}{3}$, din urna U_2 este $P(A_2) = \frac{1}{6}$ şi din urna U_3 este $P(A_3) = \frac{1}{2}$. Se face o singură extragere (nu se specifică urna). Se cere:

a) probabilitatea de a extrage o bilă roşie.
b) Dacă se extrage o bilă roşie, care este probabilitatea să fie din urna U_1? Dar din U_2? Dar din U_3?

Fie $\{E, K, P\}$ un câmp finit de probabilitate şi $A, B \in K$

- **Evenimentele A şi B sunt independente (în probabilitate)** dacă probabilitatea ca unul să se realizeze nu depinde de faptul că celălalt s-a realizat sau nu, adică:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Definiție echivalentă: Evenimentele A şi B cu $P(A) \cdot P(B) \neq 0$ sunt **independente** dacă şi numai dacă are loc una din relațiile:

- $P(B|A) = P(B)$
- $P(A|B) = P(A)$
- $P(B|\overline{A}) = P(B)$
- $P(A|\overline{B}) = P(A)$

Exemplu (se rezolvă la seminar):
Două persoane trag fiecare câte un foc asupra unei ținte. Prima persoană nimereşte ținta cu probabilitatea $\frac{7}{9}$ iar a doua persoană cu probabilitatea $\frac{9}{11}$. Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă?

Generalizare:
Spunem că evenimentele $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt **independente** dacă probabilitatea oricărei intersecții finite de evenimente este egală cu produsul probabilităților evenimentelor intersectate, adică:

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ...... \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdot P\left(A_{i_2}\right) \cdot .... \cdot P\left(A_{i_k}\right)$$

oricare ar fi $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq .... \leq i_k \leq n$.

ATENȚIE!!! Dacă mai multe evenimente sunt independente două câte două, nu rezultă că sunt independente în totalitatea lor.

Exemplul lui S.N.Bernstein :
Considerăm un tetraedru omogen cu fețele colorate astfel: una în alb, una în negru, una în roşu şi a patra în toate cele trei culori. Aruncând tetraedrul pe o masă el se asează pe una din fețe; ne interesează probabilitatea apariței fiecărei culori şi independența evenimentelor corespunzătoare.

Rezolvare : Notăm cu A_1 evenimentul care constă în apariția culorii albe, A_2 evenimentul apariției culorii negre şi cu A_3 evenimentul apariției culorii roşii. Avem: $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$,
deoarece pentru fiecare culoare sunt 4 cazuri posibile şi două favorabile (fața cu culoarea respectivă şi fața cu trei culori). Probabilitățile intersecțiilor a câte 2 dintre evenimente sunt :

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$ dar $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}$

Inegalitatea lui Boole:

- dă o <u>margine inferioară</u> pentru *probabilitatea intersecției a două evenimente* A şi B care NU sunt independente:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

sau, notând $p_1 = P(A)$, $p_2 = P(B)$ şi $p_{12} = P(A \cap B)$, atunci: $p_{12} \geq p_1 + p_2 - 1$

Inegalitatea se poate **generaliza** pentru n evenimente care nu sunt independente:

$$p_{12...n} \geq p_1 + p_2 + ... + p_n - (n-1),$$

unde $p_i = P(A_i)$, $i = \overline{1,n}$ şi $p_{1,2,...n} = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Exemplu (se rezolvă la seminar):
Într-o grupă de studenți, 75% cunosc limba franceză, 90% cunosc limba engleză şi 82% cunosc limba germană. Care este probabilitatea ca un student ales la întamplare să cunoască toate limbile ?

SCHEME CLASICE DE PROBABILITATE

1. Schema lui Poisson. (schema binomială generalizată)

Schema lui Poisson permite rezolvarea problemelor în care se cere probabilitatea realizării de k ori a unor evenimente $A_1, A_2, ..., A_n$ presupuse *independente,* atunci când se repetă de n ori aceste experienţe, şi cunoaştem $P(A_i) = p_i$, $i = \overline{1,n}$. (*evenimentele au probabilităţi diferite de realizare*)

Modelul matematic:

Se dau n urne $U_1, U_2, ...U_n$ care conţin bile albe şi bile negre în proporţii date, cunoscute (urnele nu sunt identice ca număr de bile albe şi negre), deci cunoaştem probabilităţile p_i, $i = \overline{1,n}$, cu care este extrasă o bilă albă din urna U_i. Se cere probabilitatea de a extrage k bile albe şi $n-k$ bile negre, atunci când *din fiecare urnă se extrage câte o bilă*. (nu se reintroduc bilele în urnă).

Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt evenimente independente, atunci probabilitatea să se realizeze k din cele n evenimente (şi să nu se realizeze $n-k$) este egală cu coeficientul lui x^k din polinomul:

$$P(x) = (p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2).....(p_n x + q_n)$$

unde probabilitatea $P(A_i) = p_i$, $q_i = 1 - p_i$, cu $i = \overline{1,n}$

Exemplu: (se rezolvă la seminar)

Se dau 3 urne: prima conţine 2 bile albe şi 3 negre, a doua conţine 4 bile albe şi 1 bilă neagră şi a treia urnă conţine 3 bile albe şi 2 bile negre. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Care este probabilitatea ca 2 bile să fie albe şi una neagră?

2. Schema lui Poisson „cu 3 culori”

Modelul matematic:

Se dau n urne $U_1, U_2, ...U_n$ care conţin bile colorate în culorile $c1$, $c2$ şi $c3$ în proporţii date, cunoscute (urnele nu sunt identice ca număr de bile colorate), deci cunoaştem:

- probabilităţile p_i, $i = \overline{1,n}$, cu care este extrasă o bilă de culoarea $c1$ din urna U_i,
- probabilităţile q_i, $i = \overline{1,n}$, cu care este extrasă o bilă de culoarea $c2$ din urna U_i,
- probabilităţile r_i, $i = \overline{1,n}$, cu care este extrasă o bilă de culoarea $c3$ din urna U_i.

Se cere probabilitatea de a extrage k bile culoarea $c1$, j bile culoarea $c2$ şi m bile culoarea $c3$, $k + j + m = n$, atunci când *din fiecare urnă se extrage câte o bilă*. (nu se reintroduc bilele în urnă).

În condiţiile modelului matematic, probabilitatea de a extrage k bile culoarea $c1$, j bile culoarea $c2$ şi m bile culoarea $c3$, atunci când *din fiecare urnă se extrage câte o bilă* este egală cu coeficientul lui $x^k y^j z^m$ din polinomul:

$$P(x) = (p_1 x + q_1 y + r_1 z)(p_2 x + q_2 y + r_2 z)....(p_n x + q_n y + r_n z)$$

Exemplu: (se rezolvă la seminar)

În două urne se găsesc bile diferit colorate, astfel: U_1 : 5 albe, 11 negre, 8 roşii; U_2 : 10 albe, 8 negre, 6 roşii. Din fiecare urnă se extrage la întâmplare câte o bilă. Care este probabilitatea ca ambele bile să fie de aceeaşi culoare?

3. Schema lui Bernoulli. (schema binomială, *schema bilei revenite sau “întoarse”*)

Schema lui Bernoulli permite rezolvarea problemelor în care se cere probabilitatea realizării de k ori a unor evenimente $A_1, A_2, ..., A_n$ presupuse *independente şi care au aceeaşi probabilitate de realizare,* atunci când se repetă de n ori aceste experienţe, şi cunoaştem $P(A_i) = p_i = p$, $i = \overline{1,n}$. (*evenimentele sunt echiprobabile*)

Modelul matematic:
Se dau n urne identice $U_1, U_2, ...U_n$ care conţin bile albe şi bile negre (acelaşi număr de bile albe în toate urnele şi respectiv acelaşi număr de bile negre). Deci putem considera că toate extragerile se fac dintr-o singură urnă, bila extrasă punându-se înapoi în urnă după fiecare extragere. Astfel se cere probabilitatea de a extrage k bile albe din n extrageri dintr-o urnă, punându-se de fiecare dată bila înapoi în urnă.

Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt evenimente independente cu aceeaşi probabilitate de realizare $P(A_i) = p_i = p$, (şi respectiv $q = 1 - p$, cu $i = \overline{1, n}$) atunci probabilitatea să se realizeze k din cele n evenimente (şi să nu se realizeze $n - k$) este egală cu coeficientul lui x^k din polinomul:

$$P(x) = (px + q)^n,$$

adică este egală cu $C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.
Obs: p este probabilitatea obținerii unei bile albe dintr-o singură extragere şi $q = 1 - p$.

Exemplu: (se rezolvă la seminar)
Se aruncă două zaruri de 10 ori. Care este probabilitatea să apară de 4 ori suma 7?

4. Schema lui Bernoulli cu mai multe stări (n urne identice cu bile de mai multe culori).
Această schemă rezolvă problemele în care se cere probabilitatea ca în n efectuări ale experienței, evenimentul A_i să se realizeze de n_i ori, $A_1, A_2, ..., A_m$ fiind un *sistem complet de evenimente* şi $P(A_i) = p_i$ şi $\sum p_i = 1$, cu $i = \overline{1, m}$

Modelul matematic:
În loc de n urne identice $U_1, U_2, ...U_n$ din care se fac n extrageri, putem considera o singură urnă din care se fac n extrageri, *cu revenire* (repunerea în urnă a bilei).
Fie o urnă care conține bile de m culori, $c_1, c_2, ..., c_m$ iar p_i probabilitatea ca la o extragere să obținem o bilă de culoarea c_i. Se cere probabilitatea ca în n extrageri să obținem n_1 bile de culoarea c_1, n_2 bile de culoarea c_2, ..., n_m bile de culoarea c_m (unde $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_m = n$).

Fie o urnă care conține bile de m culori, $c_1, c_2, ..., c_m$ iar p_i probabilitatea ca la o extragere să obținem o bilă de culoarea c_i. Probabilitatea ca în n extrageri să obținem n_1 bile de culoarea c_1, n_2 bile de culoarea c_2, ..., n_m bile de culoarea c_m (unde $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_m = n$) este:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ..... \cdot n_m!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot .... \cdot p_m^{n_m}$$

Obs. Extragerile se fac *cu revenire* (repunerea în urnă a bilei).

Exemplu: (se rezolvă la seminar)
Se aruncă un zar de 5 ori. Care este probabilitatea ca exact de două ori să apară fața cu un punct şi exact de două ori să apară fața cu două puncte?

5. Schema hipergeometrică.

Modelul matematic:
O urnă conține a bile albe şi b bile negre. Din această urnă se extrag n bile ($n \le a + b$) pe rând, *fără a se pune bila extrasă înapoi în urnă* (ceea ce este echivalent cu a extrage n bile deodată). Se cere probabilitatea ca din cele n bile extrase, k să fie albe ($k \le a$) şi $n - k$ negre ($n - k \le b$).

Dintr-o urnă ce conține a bile albe şi b bile negre se extrag n bile ($n \le a + b$) pe rând, fără a se pune bila extrasă înapoi în urnă (ceea ce este echivalent cu a extrage n bile deodată). Probabilitatea ca din cele n bile extrase, k să fie albe ($k \le a$) şi $n - k$ negre ($n - k \le b$) este:

$$P = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

Exemplu: (se rezolvă la seminar)
La o tombolă sunt 400 de bilete din care 4 câştigătoare. O persoană cumpără 10 bilete. Care este probabilitatea să nu aibă nici un bilet câştigător?

6. Schema hipergeometrică generalizată.

Dintr-o urnă ce conține a_i bile de culoarea c_i, $i=\overline{1,m}$ probabilitatea de a obține n_1 bile de culoarea c_1, n_2 bile de culoarea c_2, ..., n_m bile de culoarea c_m când facem n extrageri ($n_1+n_2+n_3+.....+n_m=n$) pe rând, fără a se pune bila extrasă înapoi în urnă, este:

$$P=\frac{C_{a_1}^{n_1}\cdot C_{a_2}^{n_2}\cdot....\cdot C_{a_m}^{n_m}}{C_{a_1+a_2+....+a_m}^{n}}$$

Exemplu: (se rezolvă la seminar)
O urnă conține 7 bile albe, 7 bile negre şi 6 verzi. Se extrag 9 bile.
Care este probabilitatea să obținem câte 3 bile din fiecare culoare?