TRANSFORMATA LAPLACE

- **Funcția original** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, definită pentru $\forall t\geq 0$, cu proprietățile:
  - f integrabilă pe orice compact și $f(t)=0$ pentru $t<0$;
  - există ct. $M>0$ și $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $\left|f(t)\right|\leq M\cdot e^{kt}$, pentru $\forall t\geq 0$ (se numește ”restricția de creștere”)

Asumpții generale pentru f *:* continuă sau continuă pe porțiuni (număr finit de discontinuități de prima speță) pentru $t\geq 0$.

- **Transformata Laplace (sau funcția imagine)** a unei funcții original f este, prin definiție, funcția complexă:

$$F(s)=L\left(f(t)\right)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^{T}e^{-st}f(t)dt$$

OBS: 1) s se numește domeniul de frecvență iar $k(s,t)=e^{-st}$ se numește nucleul transformării.

2) $f(t)$ se numește transformarea inversă a lui $F(s)$: $f(t)=L^{-1}(F)$

3) Se dem. că funcția imagine este olomorfă (analitică) în semiplanul $\operatorname{Re}s>k$.

T. de existență și unicitate a T.L

Dacă $f(t)$ continuă pe porțiuni pentru $\forall t\geq 0$ și există ct. $M>0$ și $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $\left|f(t)\right|\leq M\cdot e^{kt}$, pentru $\forall t\geq 0$, atunci transformata Laplace $L\left(f(t)\right)$ există și este unică pentru orice $s>k$.

PROPRIETĂȚI:

1. *(liniaritatea)* Dacă α, $\beta\in\mathbb{R}$ și f,g sunt două funcții original, atunci:

$$L\left(\alpha f+\beta g\right)=\alpha L(f)+\beta L(g)$$

2. *(schimbarea de scală)* Dacă $a>0$ și $f(t)$ are transformata Laplace $F(s)$, atunci:

$$L\left(f(at)\right)=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

3. ***(translație în*** t***)***

Considerăm funcția ”unitate” Heaviside:

$$u(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t>a\end{cases}$$ ($t=a$ poate fi lăsat caz nedefinit)

și o funcție original $f(t)$. Atunci funcția $f(t-a)\cdot u(t-a)$ cu $a>0$ este $f(t)$ *translatată către dreapta cu ”a” unități*.

Dacă $f(t)$ are transformata Laplace $F(s)$, atunci funcția translatată $\tilde{f}(t)=f(t-a)\cdot u(t-a)=\begin{cases} 0 & ,t<a \\ f(t-a) & ,t>a \end{cases}$ are transformata Laplace: $e^{-as}F(s)$.

Se reține:

Dacă $L\left(f(t)\right)=F(s)$, atunci $L\left(f(t-a)\cdot u(t-a)\right)=e^{-as}F(s)$
sau forma inversă: $f(t-a)\cdot u(t-a)=L^{-1}\left(e^{-as}F(s)\right)$
În practică, se poate folosi (pentru ușurința calculelor): $L\left(f(t)\cdot u(t-a)\right)=e^{-as}L\left(f(t+a)\right)$

4. ***(deplasare în s)*** Dacă $f(t)$ are transformata Laplace $F(s)$, cu $s>k$, atunci funcția $e^{at}f(t)$ are transformata Laplace $F(s-a)$, cu $s-a>k$:

$$L\left(e^{at}f(t)\right)=F(s-a)$$

sau forma inversă: $e^{at}f(t)=L^{-1}\left(F(s-a)\right)$.

5. *(derivarea imaginii)* Dacă $f(t)$ are transformata Laplace $F(s)$ și $n\in\mathbb{N}^*$, atunci:

$$L\left(t^n f(t)\right)=(-1)^n\frac{d^nF}{ds^n}$$

6. ***(derivarea originalului)*** Dacă sunt îndeplinite condițiile:

(1) Dacă $f(t)$ continuă pentru $\forall t\geq 0$, satisface restricția de creștere și $f'(t)$ continuă pe porțiuni pentru $\forall t\geq 0$;

(2) Dacă $f(t)$ și $f'(t)$ sunt continue pentru $\forall t\geq 0$, satisfac restricția de creștere și $f''(t)$ continuă pe porțiuni pentru $\forall t\geq 0$

Atunci:

$$L\left(f'\right)=s\cdot L(f)-f(0) \text{ și}$$

$$L\left(f''\right)=s^2\cdot L(f)-s\cdot f(0)-f'(0)$$

Forma generală: Dacă sunt îndeplinite condițiile: $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n-1)}$ sunt continue pentru $\forall t\geq 0$, satisfac restricția de creștere și $f^{(n)}(t)$ continuă pe porțiuni pentru $\forall t\geq 0$, atunci:

$$L\left(f^{(n)}\right)=s^n\cdot L(f)-s^{n-1}\cdot f(0)-s^{n-2}f'(0)-....-f^{(n-1)}(0)$$

7. *(integrarea originalului)* Fie $f(t)$ continuă pe porțiuni pentru $\forall t \geq 0$, care satisface restricția de creștere și are transformata Laplace $F(s)$. Atunci, pentru $s > 0$, $s > k$ și $t > 0$ avem:

$$L\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{s}F(s)$$

sau forma inversă: $\int_0^t f(\tau)d\tau = L^{-1}\left(\frac{1}{s}F(s)\right)$.

8. *(integrarea imaginii)* dacă $\frac{f(t)}{t}$ este funcția original, cu transformata Laplace F, atunci:

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(v)dv$$

REZOLVAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ORDINARE

Forma generală: $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = r(t)$, cu $y(0) = K_0$ și $y'(0) = K_1$,

unde: a, b sunt constante, $r(t)$ este input-ul pentru un sistem mecanic sau electric și $y(t)$ este output-ul (răspunsul la input).

PAS 1: Atașăm ecuația algebrică (folosind proprietatea **6.**) pentru transformata $Y = L(y)$:

$$\left(s^2Y - s \cdot y(0) - y'(0)\right) + a\left(sY - y(0)\right) + bY = R(s) \text{, unde } R(s) = L(r)$$

Grupăm după Y și obținem: $\left(s^2 + as + b\right)Y = \left(s + a\right)y(0) + y'(0) + R(s)$ (1)

PAS 2: Înmulțim ec.(1) cu FUNCȚIA DE TRANSFER $Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{\left(s + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{1}{4}a^2}$ și obținem

soluția ecuației (1): $Y(s) = \left[\left(s + a\right)y(0) + y'(0)\right]Q(s) + R(s) \cdot Q(s)$.

PAS 3: Inversarea funcției Y pentru a obține $y = L^{-1}(Y)$.

OBS. Funcția de transfer Q nu depinde de $r(t)$ sau de condițiile inițiale, ci doar de coeficienții a și b.