PUNCTE SINGULARE. POLI. TEOREMA REZIDUURILOR

PUNCT SINGULAR:

Fie $f(z)$ o funcție analitică și z_0 un punct în care $f(z)$ NU e analitică (sau chiar nu este definită), dar orice vecinătate a lui z_0 conține puncte în care $f(z)$ este analitică. Atunci z_0 se numește ***punct singular*** al lui $f(z)$.

ZERO:

Fie $f(z)$ o funcție analitică. Atunci soluția ecuației $f(z)=0$ (notată z_0) se numește ***zero al funcției***.

z_0 este ***zero de ordin "n"*** dacă este soluție pentru $f(z)$ și pentru primele "n-1" derivate ale lui $f(z)$, și **nu** este soluție pentru $f^{(n)}(z)=0$.

POL:

z_0 - singularitatea lui $f(z)$ pentru care $|f(z)| \to \infty$ când $z \to z_0$ se numește **pol al funcției**.

REZIDUURI.

Fie C curbă simplă închisă, sens trigonometric, $z_0 \in C$ punct singular/pol de orice ordin pentru funcția $f(z)$, astfel încât NU mai există alt punct singular pe C sau în interiorul lui C. Atunci:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

- pentru z_0 ***pol simplu***: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f(z)$

OBS: dacă $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ cu $p(z_0)\neq 0$ și $q(z)$ are un zero simplu în z_0, atunci: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

- pentru z_0 ***pol de ordin "m"***: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m\cdot f(z)\right]\right\}$

TEOREMA REZIDUURILOR:

Reprezintă extinderea integrării cu reziduuri de la un singur punct de singularitate (în C) la mai multe puncte de singularitate pe C sau în interiorul lui C:

Fie $f(z)$ analitică pe C și în interiorul lui C (C curbă simplă închisă), *cu excepția unui număr finit de puncte singulare* z_1, z_2, ..., z_k (din C). Atunci, pentru integrarea în sens trigonometric, avem:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

APLICAȚII ALE TEOREMEI REZIDUURILOR ÎN CALCULUL INTEGRALELOR REALE

1. **Integrale raționale în $\sin\theta$ și $\cos\theta$, de forma:** $J=\int_0^{2\pi} F\left(\cos\theta,\sin\theta\right)d\theta$.

- Se rezolvă printr-o schimbare de variabilă ”consacrată”: $\boxed{z=e^{i\theta}}$
- Deoarece $\theta\in\left[0,2\pi\right]$, variabila $z=e^{i\theta}$ va avea ca domeniu *cercul unitate* (curba de ecuație $|z|=1$)
- Formule de transformare a funcției inițiale $F\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$ în $f(z)$:

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$\cos 2\theta=\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)$$

- diferențierea notației $z=e^{i\theta}$ conduce la: $\frac{dz}{d\theta}=ie^{i\theta}$, adică $\boxed{d\theta=\frac{1}{iz}dz}$

Integrala inițială devine: $J=\int_0^{2\pi} F\left(\cos\theta,\sin\theta\right)d\theta=\oint\limits_{|z|=1} f\left(z\right)\frac{1}{iz}dz$, care se rezolvă cu metodele corespunzătoare integralelor complexe.

__Exemplu:__ Calculați $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}d\theta$

$\theta\in\left[0,2\pi\right]$, notez $z=e^{i\theta}$, curba de integrare este $C:|z|=1$ (cercul unitate)

În continuare avem: $d\theta=\frac{1}{iz}dz$ și $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$. Integrala devine:

$I=\oint\limits_C\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{1}{iz}dz=-\frac{2}{i}\oint\limits_C\frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}dz$. Polii funcției $f(z)=\frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}$ sunt:

$z_1=\sqrt{2}+1\notin C$ și $z_2=\sqrt{2}-1\in C$. Pentru a calcula reziduul funcției $f(z)$ în polul z_2, scriem:

$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ cu $p(z)=1$ și $q(z)=z^2-2\sqrt{2}z+1$, $q'(z)=2z-2\sqrt{2}$ și obținem:

$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z)=\left.\frac{p(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_2}=\left.\frac{1}{2z-2\sqrt{2}}\right|_{z=\sqrt{2}-1}=-\frac{1}{2}$. Deci, cf. T Reziduurilor, $I=2\pi i\left(-\frac{2}{i}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=2\pi$.

2. Integrale improprii, de forma: $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) dx$.

- Funcția $f(x)$ este o funcție *reală, rațională, cu numitorul* $\neq 0$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ *(nu are poli pe axa reală*) și are *gradul numitorului mai mare decât gradul numărătorului cu cel puțin 2 unități*.
- Avem: $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} f\left(x\right) dx + \lim\limits_{b\to\infty} \int_{0}^{b} f\left(x\right) dx$.

  Dacă ambele limite există (eventual finite), putem scrie: $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f\left(x\right) dx$.

  Limita $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f\left(x\right) dx$ se numește **VALOAREA PRINCIPALĂ CAUCHY** și există, chiar dacă limitele de mai sus nu sunt finite.
- Fie $\oint\limits_{C} f\left(z\right) dz$ integrala corespunzătoare valorii principale Cauchy. Deoarece $f(x)$ este rațională, $f\left(z\right)$ are un număr finit de poli în jumătatea superioară a planului complex, și dacă alegem R suficient de mare, curba de integrare C va conține toți acești poli. Astfel vom avea (aplicând teorema reziduurilor):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f\left(x\right) dx = \oint\limits_{C} f\left(z\right) dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

- Se calculează cu metodele corespunzătoare reziduurile funcției $f\left(z\right)$.

<u>*Exemplu:*</u> Calculați $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$.

Funcția $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ este funcție pară ($f(x) = f(-x)$), deci putem scrie $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$, și vom calcula $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$

Funcția $f(x)$ respectă condițiile (este funcție reală, rațională, $1+x^4 \neq 0$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ și $gr\left(1+x^4\right) = 4$, $gr\left(1\right) = 0$). Determinăm polii funcției complexe asociate $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ rezolvând ecuația binomă $z^4 = -1$.

Obținem: $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $z_3 = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ și $z_4 = e^{-\frac{i\pi}{4}}$. Polii z_1 și z_2 aparțin părții superioare a planului complex, deci pentru acești doi poli vom calcula reziduurile.

Scriem $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ cu $p(z) = 1$ și $q(z) = 1+z^4$, $q'(z) = 4z^3$ și obținem:

$\operatorname*{Res}\limits_{z=z_1} f(z) = \left.\frac{p(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{3i\pi}{4}} = -\frac{1}{4} e^{\frac{i\pi}{4}}$, respectiv

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \left.\frac{p(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_2} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{9i\pi}{4}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{i\pi}{4}}.$$ În final, obținem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) = -\frac{2\pi i}{4}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right) = -\frac{2\pi i}{4}\cdot 2i\cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Deci: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

3. **Integrale tip Fourier, de forma:** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \cos ax\,dx$ **sau** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \sin ax\,dx$ **, cu** $a\in\mathbb{R}$ **.**

- Funcția $f(x)$ este o funcție *reală, rațională, cu numitorul* $\neq 0$ pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ *(nu are poli pe axa reală)* și are *gradul numitorului mai mare decât gradul numărătorului cu cel puțin 2 unități*.
- Se pornește de la integrala asociată: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{iax}\,dx$ și de la coresp: $\oint_C f(z)\cdot e^{iaz}dz$;
- Avem: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{iax}\,dx = 2\pi i\sum \operatorname{Res}\left[f(z)e^{iaz}\right]$, unde reziduurile funcției $f(z)e^{iaz}$ corespund polilor din jumătatea superioară a planului complex.
- După calcularea reziduurilor avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \cos ax\,dx = -2\pi\sum \operatorname{Im}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \sin ax\,dx = 2\pi\sum \operatorname{Re}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}\right)$$

__Exemplu:__ Arătați că $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{k^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{k}e^{-3k}$ și $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{k^2+x^2}\,dx = 0$, unde $k>0$.

Considerăm funcția complexă asociată $g(z) = f(z)\cdot e^{3iz} = \frac{e^{3iz}}{k^2+z^2}$ și determinăm polii acestei funcții rezolvând ecuația $z^2 = -k^2$. Obținem: $z_1 = -ik$ și $z_2 = ik$, cu z_2 care aparține părții superioare a planului complex, deci pentru acest pol vom calcula reziduul.

Scriem $g(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ cu $p(z) = e^{3iz}$ și $q(z) = k^2+z^2$, $q'(z) = 2z$ și obținem:

$\operatorname*{Res}_{z=z_2} g(z) = \left.\frac{p(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_2} = \left.\frac{e^{3iz}}{2z}\right|_{z=ik} = \frac{e^{-3k}}{2ik} = -\frac{e^{-3k}}{2k}\cdot i$, deci $\operatorname{Re}\left(\operatorname{Res} g(z)\right) = 0$ și $\operatorname{Im}\left(\operatorname{Res} g(z)\right) = -\frac{e^{-3k}}{2k}$.

Astfel obținem: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{k^2+x^2}\,dx = -2\pi\sum \operatorname{Im}\operatorname{Res}\left(g(z)\right) = -2\pi\left(-\frac{e^{-3k}}{2k}\right) = \frac{\pi}{k}e^{-3k}$

și $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{k^2+x^2}\,dx = 2\pi\sum \operatorname{Re}\operatorname{Res}\left(g(z)\right) = 0$