INTEGRARE COMPLEXĂ

Integrala complexă se notează: $\int_C f(z)dz$, unde

- $f(z)$ este funcție complexă
- C este curbă (arc) în planul complex (se mai numește ”cale de integrare”).

Reprezentarea parametrică a curbei: $C: \ z(t) = x(t) + i\,y(t)$, cu $a \le t \le b$

- *sens pozitiv* pentru C - sensul de creștere al argumentului t (C este *curbă orientată*);
- C este *netedă* - are derivata continuă și nenulă în orice punct: $\dot{z}(t) = \dfrac{dz}{dt} = \dot{x}(t) + i\,\dot{y}(t)$
- dacă C este *închisă* (punctul terminal coincide cu cel inițial), atunci integrala complexă se notează cu: $\oint_C f(z)dz$.

Asumpții generale:

- Toate curbele de integrare C sunt netede pe porțiuni (sunt formate dintr-un număr finit de curbe netede ”alipite”)
- funcția $f(z)$ este continuă

Proprietăți:

1. ***Liniaritate***: $\int_C [k_1 f_1(z) \pm k_2 f_2(z)]\,dz = k_1 \int_C f_1(z)dz \pm k_2 \int_C f_2(z)dz$, cu k_1 , k_2 constante.
2. ***Schimbarea sensului*** (pentru o aceeași curbă C, cu z_0 punct inițial și z_1 punct terminal):

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = -\int_{z_1}^{z_0} f(z)dz$$

3. ***Partiționarea curbei***: $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$ (curbele C_1 și C_2 formează curba C)

METODE DE EVALUARE

METODA 1

Pentru funcții analitice și domeniu D simplu conex (curbă închisă simplă, fără auto-intersecții):

Fie D domeniu simplu conex, z_0 și z_1 puncte din D și $f(z)$ analitică pe D. Atunci pentru orice cale C din D care leagă punctele z_0 și z_1 avem:

$$\int_C f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_2), \text{ unde } F'(z) = f(z).$$

Altfel spus*, în condițiile de mai sus*, integrarea lui $f(z)$ este ***independentă de cale***.

METODA 2

Mai generală, pentru orice funcție complexă continuă.

Fie C o curbă netedă pe porțiuni reprezentată prin $z = z(t)$, cu $a \le t \le b$ și $f(z)$ o funcție continuă pe C. Atunci:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\left(z(t)\right) \cdot \dot{z}(t)\, dt \ , \quad \text{unde } \dot{z} = \frac{dz}{dt}.$$

OBS: Dacă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, putem scrie (pentru parametrizarea curbei C: $z = z(t)$, cu $a \le t \le b$):

$$\int_a^b f\left(z(t)\right) \cdot \dot{z}(t)\, dt = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (udy + vdx)$$

ETAPE pentru aplicarea evaluării prin METODA 2:

1. Parametrizarea (reprezentarea) curbei C în forma $z(t)$, cu $a \le t \le b$;
2. Calcularea derivatei $\dot{z}(t) = \dfrac{dz}{dt}$;
3. Substituirea fiecărui z din $f(z)$ cu $z(t)$;
4. Integrarea funcției $f\left(z(t)\right) \cdot \dot{z}(t)$ în t, de la a la b.

TEOREMA INTEGRALĂ CAUCHY (T.I.C)

Dacă $f(z)$ este **analitică** pe D (domeniu simplu conex), atunci pentru orice curbă simplă închisă (contur) C din D avem:

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

OBS: Condiția ca $f(z)$ analitică este SUFICIENTĂ, nu și NECESARĂ pentru ca $\oint_C f(z)dz = 0$. Practic, T.I.C. se poate aplica în următoarele situații:

1. Funcții fără singularități (analitice pentru orice z)

exemple: $\oint_C e^z dz = 0$, $\oint_C \cos z\, dz = 0$, $\oint_C z^n dz = 0$ (funcții analitice ”elementare”)

2. Funcții cu singularități ÎN AFARA lui C

exemple pentru curba C = cercul unitate (curba de ecuație $|z| = 1$):

- $\oint_C \dfrac{1}{\cos z} dz = 0$

funcția $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$ nu este analitică în punctele pentru care $\cos z=0$, adică pentru $z=\pm\dfrac{\pi}{2},\pm\dfrac{3\pi}{2},\dots,$

dar aceste puncte sunt ÎN AFARA curbei C.

- $\oint\limits_C \dfrac{1}{z^2+4}dz=0$

funcția $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$ nu este analitică în punctele pentru care $\cos z=0$, adică pentru $z=\pm\dfrac{\pi}{2},\pm\dfrac{3\pi}{2},\dots,$

dar aceste puncte sunt ÎN AFARA curbei C.

OBS: Există situații în care integrarea unor funcții care au singularități ÎN INTERIORUL curbei C va da zero (dar acest lucru se realizează prin calcul direct, nu prin aplicarea teoremei).

FORMULA INTEGRALĂ CAUCHY

Dacă $f(z)$ este **analitică** pe D (domeniu simplu conex), atunci pentru orice $z_0\in D$ și orice curbă închisă (contur) $C\in D$ (cu $z_0\subset C$) avem:

$$\oint\limits_C f(z)\frac{1}{z-z_0}dz=2\pi i\cdot f(z_0)$$

CONSECINȚE:

1. Dacă $f(z)$ este analitică pe D, atunci are derivate de orice ordin pe D, care sunt la rândul lor tot funcții analitice pe D.
2. Pentru $f(z)$ analitică și C curbă simplă închisă în D, care conține z_0, avem:

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(z)\frac{1}{(z-z_0)^2}dz$$

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\oint\limits_C f(z)\frac{1}{(z-z_0)^3}dz$$

....

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C f(z)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

3. Formula de calcul utilă:

$$\oint\limits_C f(z)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0),\ \text{pentru } n=1,2,\dots.$$