Tema 3

Exercițiul 1. *Fie R_1 și R_2 relații pe mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ reprezentate prin matricile*

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } \mathbf{M}_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Verificați dacă relațiile R_1 și R_2 sunt reflexive / simetrice / antisimetrice / tranzitive;*

2. *Aflați relațiile $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \circ R_2$, $R_2 \circ R_1$, R_1^c, R_1^{op}.*

Exercițiul 2. *Fie A o mulțime și R_1, R_2 relații pe mulțimea A. Atunci:*

1. *Dacă R_1 și R_2 sunt reflexive / simetrice/ tranzitive, ce puteți spune despre $R_1 \cup R_2$?*

2. *Dar dacă R_1 și R_2 sunt relații de echivalență / relații de ordine?*

Exercițiul 3. *Câte relații reflexive / simetrice / antisimetrice există pe o mulțime cu n elemente? ($n \in \mathbb{N}$)*

Exercițiul 4. *Fie M o mulțime. Pe $\mathcal{P}(M)$ considerăm relația de ordine dată de incluziune. Determinați elementele minimale și maximale. Aflați $\sup\{X, Y\}$ și $\inf\{X, Y\}$ în $\mathcal{P}(M)$, pentru $X, Y \subseteq M$.*

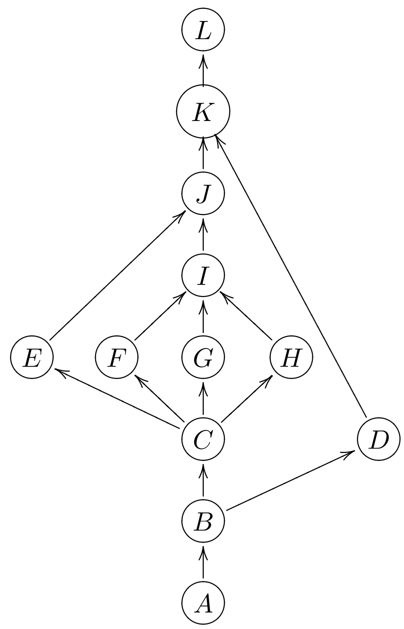
Exercițiul 5. *Fie $A = \{a, b, c, d\}$ și relația $R = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$. Determinați închiderea tranzitivă a relației R.*

Exercițiul 6. *Fie relația $R = \{(n, n + 1) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Calculați $R \circ R$, apoi determinați $\underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n}$ pentru $n \geq 2$; utilizați acest rezultat pentru a obține închiderea tranzitivă a relației R.*

Exercițiul 7. *Scrieți un algoritm de determinare a închiderii tranzitive a unei relații pe o mulțime finită cu n elemente utilizând matricea asociată relației.*

Exercițiul 8. *Un proiect software conține următoarele activități: (A) Culegerea specificațiilor. (B) Analiza cerințelor funcționale. (C) Elaborarea cerințelor sistemului. (D) Elaborarea testelor de verificare. (E) Scrierea documentației.*

(F) Realizarea modulului 1*. (G) Realizarea modulului* 2*. (H) Realizarea modulului* 3*. (I) Integrarea celor trei module. (J) Testare* α*. (K) Testare* β*. (L) Finalizare. Ordinea de realizare a acestora apare în graful de mai jos:*



Realizaţi o planificare a activităţilor astfel încât toate activităţile să aibă loc şi ordinea iniţială să fie păstrată. (Indicaţie: utilizaţi algoritmul de sortare topologică)

Exerciţiul 9. *Utilizaţi algoritmul de sortare topologică pentru a obţine o relaţie de ordine totală pe* $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$*, pornind de la relaţia de incluziune.*

Exerciţiul 10. *Determinaţi cea mai mică relaţie de echivalenţă pe mulţimea* $\{a, b, c, d, e\}$ *ce conţine relaţia* $\{(a, b), (a, c), (d, e)\}$*.*

Exerciţiul 11. *Pe mulţimea numerelor naturale nenule considerăm relaţia:* $mRn \iff \frac{m}{n} = 2^k$ *pentru* $k \in \mathbb{Z}$*.*

1. *Arătaţi că* R *este o relaţie de echivalenţă.*

2. *Descrieţi mulţimea factor* A/R*.*

Exerciţiul 12. *Determinaţi o formulă de recurenţă pentru calculul numărului de partiţii în* k *submulţimi ale unei mulţimi cu* n *elemente* $(1 \leq k \leq n)$*.*