Lista 4

Exerciţiul 1. *Pe mulţimea* $V = \mathbb{R}^2$ *considerăm operaţiile*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

şi

$$\alpha \cdot (x, y) = \begin{cases} (0,0) & \text{dacă } \alpha = 0 \\ (\alpha x, \frac{y}{\alpha}) & \text{dacă } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

pentru (x, y), $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Este* V *un spaţiu vectorial peste* $\mathbb{R}$ *în raport cu aceste operaţii? Justificaţi răspunsul.*

Exerciţiul 2. *Să se arate că nu există o operaţie externă (în afară de cea identic nulă)* $\odot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *în raport cu care grupul* $(\mathbb{Z}, +)$ *devine spaţiu vectorial peste* $\mathbb{Q}$ *(atenţie!* $\odot$ *nu este neapărat operaţia uzuală de înmulţire).*

Exerciţiul 3. *Fie* $\mathbb{k}$ *un corp comutativ şi* $V = \{(x, y) \in \mathbb{k}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$. *Pe* V *considerăm operaţiile uzuale de adunare şi multiplicare cu scalari pe componente, adică*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ şi } \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

pentru (x, y), $(x', y') \in \mathbb{k}^2$, $\alpha \in \mathbb{k}$. *Verificaţi dacă* V *un spaţiu vectorial peste* $\mathbb{k}$, *pentru:*

(i) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *(ii)* $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ *(iii)* $\mathbb{k} = \mathbb{Z}_2$ *(iv)* $\mathbb{k} = \mathbb{Z}_5$

Exerciţiul 4. *Care dintre următoarele submulţimi este subspaţiu vectorial în* $\mathbb{R}[X]$*?*

(i) $\{a + bX + cX^2 + dX^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b + c + d = 0\}$

(ii) $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid grad(P) > 2\}$

(iii) $\left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid X^2 + X + 1 \mid P\right\}$

(iv) $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X) = P(-X)\}$

Exerciţiul 5. *Vectorul* $(3, -1, 0, 1)$ *apartine spaţiului generat de vectorii* $(2, -1, 3, 2)$, $(-1, 1, 1, -3)$ *şi* $(1, 1, 9, -5)$*? în* $\mathbb{R}^4$*?*

Exercițiul 6. *Fie V spațiul vectorial al elementelor de forma $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$, care satisfac sistemul*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Determinați o familie finită de vectori care generează pe V.

Exercițiul 7. *Fie V un spațiu vectorial, $X \subseteq V$ o submulțime și $x, y \in V$. Să se arate că dacă $y \in Sp\,(X \cup \{x\})$ și $y \notin Sp(X)$, atunci $x \in Sp(X \cup \{y\})$.*

Exercițiul 8. *Fie $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f\, continuă\}$. Pe V introducem operațiile:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

și

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f, g \in V, \alpha \in \mathbb{R}$. *Atunci:*

(i) *V este un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$;*

(ii) *Funcțiile $f_1, \ldots, f_n \in V$, $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$, $\ldots$, $f_n(x) = e^{nx}$ sunt liniar independente în V, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;*

(iii) $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}} V = \infty$.

Exercițiul 9. *Determinați o bază și dimensiunea următoarelor spații vectoriale:*

(i) $U_1 = Sp\{(2, -1, 0, 1), (1, -1, 3, 7), (0, -1, 6, 13)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(ii) $U_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y - z - t = 0 \\ x - 3z - 2t = 0 \end{cases} \}$

Exercițiul 10. *Arătați că polinoamele $1, X - 1, \frac{(X-1)^2}{2!}, \ldots, \frac{(X-1)^n}{n!}$ formează o bază a spațiului vectorial al polinoamelor de grad cel mult n peste $\mathbb{R}$. (Indicație: utilizați eventual seriile Taylor).*

Exercițiul 11. *Fie W_1, W_2 subspații vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$, astfel că $\dim W_1 < \dim W_2$. Arătați că dacă $W_1 \cap W_2 \neq 0$, atunci $W_1 \subseteq W_2$.*

Exercițiul 12. *Determinați o bază și dimensiunea pentru fiecare dintre spațiile vectoriale $V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$, unde*

(i) $V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P''(0) + 2P'(0) + P(0) = 0,\ P(1) = P(-1)\}$,
$V_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P''(0) - 2P'(0) + P(0) = 0,\ P(1) = -P(-1)\}$

(ii) $V_1 = Sp\{(2,-1,0,1),(1,-1,3,7),(0,-1,6,13)\}$

$$V_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x-2y+z & =0 \\ x-y-z-t & =0 \\ x-3z-2t & =0 \end{cases} \}$$

Exercițiul 13. *Care dintre următoarele funcții $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ sunt morfisme de spații vectoriale? (argumentați răspunsul)*

(i) $f(P(X)) = P^2(X)$

(ii) $f(P(X)) = P(X^2)$

Exercițiul 14. *Fie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ morfismul a cărei matrice în bazele canonice este* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculați $f((1,2,3))$.*

Exercițiul 15. *Fie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+3y-z, y-z, x+2z)$.*

(i) *Scrieți matricea asociată lui f în baza canonică din $\mathbb{R}^3$.*

(ii) *Determinați $\ker(f)$ și $\mathsf{Im}(f)$ (o bază și dimensiunea pentru fiecare).*

(iii) *Scrieți matricea asociată lui f în baza $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$.*

Exercițiul 16. *Fie V un spațiu vectorial de dimensiune $n < \infty$ peste un corp comutativ $\mathbb{k}$ și $f : V \longrightarrow V$ un endomorfism neinjectiv. Atunci există o bază în V astfel matricea asociată lui f în această bază să conțină pe prima coloană numai zero.*

Exercițiul 17. *Să se determine un morfism de spații vectoriale $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, astfel încât $\ker(f) = Im(f) = Sp\{1+X^2, X^2+X^3\}$ și să se scrie matricea lui f într-o bază care conține polinoamele $1+X^2$ și X^2+X^3.*