curs 11

Produs scalar; ortogonalizare

În continuare, vom lucra cu corpul numerelor reale $K = \mathbb{R}$.

Definiție

Fie V un SV. Se numește produs scalar pe V o funcție $\langle\, , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

(PS1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $(\forall)\, x, y \in V$

(PS2) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$, $(\forall)\, x_1, x_2, y \in V$

(PS3) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, $(\forall)\, \alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$

(PS4) $\begin{cases} \langle x, x\rangle \geq 0, (\forall)\, x \in V \\ \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0. \end{cases}$

Consecință

1) $\langle x, \alpha y\rangle = \langle \alpha y, x\rangle = \alpha\langle y, x\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

2) funcția $\|.\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ este o normă pe V, iar funcția $d(\,,) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $d(x,y) = \|x - y\|$ o distanță.

Un spațiu vectorial V finit dimensional împreună cu un produs scalar $\langle,\rangle$ formează un spațiu euclidian $(V, \langle,\rangle)$

3) unghi, Cauchy-Buniakowski-Schwartz: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
$\Rightarrow \cos(\widehat{x, y}) = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|}$; proiecție

Exemple

1) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

2) $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$

3) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$

Definiție

Fie $(V, \langle,\rangle)$ un spațiu euclidian. Spunem că doi vectori nenuli $x, y \in V$ sunt ortogonali dacă $\langle x, y\rangle = 0$

O bază $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ se numește ortogonală (ortonormată) dacă $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pentru orice $i \neq j$ (respectiv dacă $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$)

Exemplu. În $V = \mathbb{R}^n$, cu produsul scalar din exemplul precedent $\langle (x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$, baza canonică $\{(1, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$ este ortonormată.

Observație 1) Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu euclidian și $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$. Dacă vectorii $x_1, \dots, x_n$ sunt ortogonali doi câte doi, atunci sunt liniar independenți.

2) Într-un spațiu euclidian există cel puțin o bază ortonormată: algoritmul de ortogonalizare Gram-Schmidt:

Mai întâi, pentru $x, y \in V \setminus \{0\}$, notăm $pr_y x = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot y$.

($pr_y x$ se numește proiecția lui x pe y, vezi observația următoare). Fie acum $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază în V. Vom construi o bază ortogonală $B' = \{u_1, \dots, u_n\}$, apoi o bază ortonormală $B'' = \{v_1, \dots, v_n\}$ prin formulele:

$$\begin{cases} u_1 = e_1 & v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ u_2 = e_2 - pr_{u_1} e_2 & v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} \\ u_3 = e_3 - pr_{u_1} e_3 - pr_{u_2} e_3 & v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ u_n = e_n - pr_{u_1} e_n - \dots - pr_{u_{n-1}} e_n & v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|} \end{cases}$$

Exemplu. Fie $V = \mathbb{R}^3$ cu produsul scalar $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Să se ortonormeze baza $B = \{\overset{e_1}{(1,0,1)}, \overset{e_2}{(1,0,0)}, \overset{e_3}{(2,1,0)}\}$.

Calculăm:

$u_1 = e_1 = (1,0,1)$ $\qquad v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$u_2 = e_2 - pr_{u_1} e_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} \cdot u_1 = (1,0,0) - \frac{1}{2}(1,0,1) =$

$= \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ $\qquad v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{u_2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$u_3 = e_3 - pr_{u_1} e_3 - pr_{u_2} e_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle e_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 =$

$= (2,1,0) - \frac{2}{2}(1,0,1) - \frac{1}{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) = (0,1,0)$

$v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{u_3}{1} = (0,1,0)$

Am obținut baza $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,1,0)$ formată din vectori unitari și perpendiculari doi câte doi.

<u>Observație</u> 1) Fie $(V, \langle,\rangle)$ spațiu euclidian; dacă $x, y \in V \setminus \{0\}$, atunci $pr_y x \in V$ este acel vector coliniar cu y ce minimizează distanța de la x la subspațiul generat de y, adică $\{d(x, \alpha y) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

Avem $d(x, \alpha y) = \|x - \alpha y\| = \sqrt{\langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle} =$

$= \sqrt{\langle x, x\rangle - 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2 \langle y, y\rangle}$ prin derivare rezultă că este minimă pentru

$\alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$; obținem deci $\alpha y = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y = pr_y x$.

2) Dacă $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ este o bază ortonormată, atunci pentru orice $x \in V$ avem

$$x = \underbrace{\langle x, e_1\rangle e_1}_{pr_{e_1} x} + \underbrace{\langle x, e_2\rangle e_2}_{pr_{e_2} x} + \dots + \underbrace{\langle x, e_n\rangle e_n}_{pr_{e_n} x}.$$

Coord. for free!

Definiție

Fie $A \in M_n(R)$ o matrice. A se numește <u>ortogonală</u> dacă A este inversabilă și $A^{-1} = A^t$.

<u>Propoziție</u> O matrice A este ortogonală <=> coloanele matricei formează o bază ortonormată în R^n.

<u>Exemple</u> 1) $A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ este o matrice ortogonală, $(\forall)\, t \in R$

(matricea unei rotații de unghi t în jurul originii)

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ este ortogonală

(matricea care permută axele de coordonate Ox, Oy, Oz în Oz, Oy, Ox - simetria față de dreapta $x = z, y = 0$)

<u>Observație</u>

Înmulțirea vectorilor din R^3 cu o matrice ortogonală păstrează distanțele și unghiurile.

<u>Propoziție</u> (diagonalizarea unei matrici simetrice)

Fie $A \in M_n(R)$ simetrică, $A = A^t$. Atunci:

a) toate valorile proprii ale lui A sunt reale;

b) A se diagonalizează și există o bază <u>ortonormată</u> formată cu vectori proprii; deci $A = T \cdot D \cdot T^t$, unde T este matricea ortogonală ale cărei coloane sunt vectorii proprii care formează baza ortonormată.