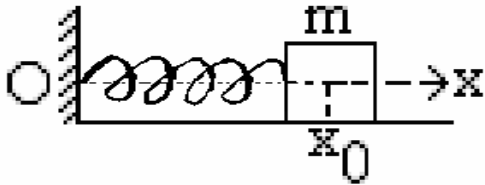


II. OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE

1. Oscilatorul liniar armonic

Mișcarea unui corp este o mișcare oscilatorie dacă se repetă periodic în timp. Mișcarea oscilatorie are loc în jurul unei poziții de echilibru. O deplasare a corpului din poziția de echilibru presupune existența unei forțe care să readucă corpul în poziția de echilibru. În poziția de echilibru această forță este zero (din definiția echilibrului).



Considerăm un corp de masă m legat de un resort care oscilează fără frecare în lungul axei Ox . Studiem mișcarea centrului de masă al corpului.

Particularizând formula de definiție a forței

de tip conservativ

$$\vec{F} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

la oscilatorul liniar considerat rezultă:

$$F = - \frac{\partial U}{\partial x}$$

unde U este energia potențială.

Din condiția de echilibru a corpului ($F = 0$) rezultă:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=x_0} = 0 \quad (1.1)$$

unde x_0 este coordonata poziției de echilibru (x_0 este soluția ecuației $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$).

Pentru deplasări $x - x_0$ mici putem dezvolta energia potențială U în serie Taylor în jurul lui x_0 :

$$U(x) = U(x_0) + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{x=x_0} (x - x_0)^2 \quad (1.2)$$

în care am neglijat termenii de ordin superior. Al doilea termen din (1.2) este zero datorită condiției de echilibru (1.1).

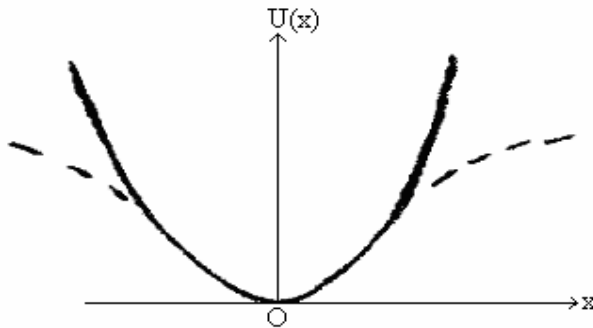
Mărimea $k = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{x=x_0}$ se numește constantă elastică.

Deci:

$$U(x) = U(x_0) + \frac{k(x - x_0)^2}{2} \quad (1.3)$$

Putem alege $x_0 = 0$ (translatăm originea axei Ox în centrul de masă al corpului) și $U(x_0) = 0$ (energia potențială de referință este nulă). Astfel energia potențială a oscilatorului liniar devine:

$$U = \frac{kx^2}{2} \quad (1.4)$$



care reprezintă grafic o parabolă. Pentru deplasări mici în jurul poziției de echilibru energia potențială reală (curba punctată) poate fi aproximată prin relația (1.4).

Forța

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} \stackrel{(1.4)}{=} -kx \quad (1.5)$$

va readuce corpul în poziția de echilibru dacă se opune deplasării. Astfel condiția de echilibru stabil în punctul $x_0 = 0$ este:

$$k > 0 \quad (1.6)$$

Deoarece pentru valori ale lui x pozitive sau negative dar suficient de mici (pentru a fi valabilă relația (1.4)) funcția $U(x)$ este crescătoare, rezultă că în poziția de echilibru stabil ($x_0 = 0$) energia potențială $U(x)$ are un minim.

Funcția lui Hamilton pentru oscilatorul liniar are expresia:

$$H = T + U = \frac{mv^2}{2} + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \quad (1.7)$$

Ecuțiile lui Hamilton sunt:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (1.8)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

Eliminând p din cele două relații:

$$p = m \dot{x} \quad \dot{p} = m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow \quad m \ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\dot{p} = -kx \quad \dot{p} = -kx$$

rezultă ecuația:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.9)$$

unde:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.10)$$

este pulsatia proprie (naturală) a oscilatorului.

Ecuția (1.9) este o ecuație diferențială de ordinul doi, fără termenul cu derivata de ordinul întâi și omogenă (fără termenul liber) cu coeficienți constanți.

Soluția generală a ecuației (1.9) ce descrie o mișcare oscilatorie armonică (amplitudinea și pulsația rămân constante) este:

$$x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (1.11)$$

sau una din formulele echivalente:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.12)$$

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.12')$$

$$x = a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t \quad (1.13)$$

$$x = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)} = A [\cos(\omega_0 t + \varphi) + i \sin(\omega_0 t + \varphi)] \quad (1.14)$$

Se poate arăta ușor că relațiile (1.11) – (1.14) verifică ecuația (1.9). Forma (1.14) este foarte comodă în aplicații, deoarece calculele cu exponenți sunt mai ușor de efectuat. Partea reală a expresiei (1.14) coincide cu (1.12). Astfel se poate utiliza reprezentarea oscilațiilor prin numere complexe (1.14), iar în rezultatul final se reține partea reală. În (1.12), A este amplitudinea oscilației, ω_0 este pulsația oscilației, φ este faza inițială, iar $\omega_0 t + \varphi$ este faza momentană (integrală) a oscilației. Elongatia x (t) fiind o funcție periodică de timp ia aceeași valoare când timpul t crește cu o perioadă T, $x(t) = x(t + T)$,

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos[\omega_0(t + T) + \varphi] = A \cos(\omega_0 t + \varphi + 2\pi) \quad (1.15)$$

unde am folosit faptul că perioada cosinusului este 2π . Din (1.15) rezultă:

$$\omega_0 T = 2\pi \Rightarrow T_0 = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.16)$$

unde ν_0 este frecvența (numărul de oscilații efectuate în unitatea de timp).

Din (1.12) rezultă viteza

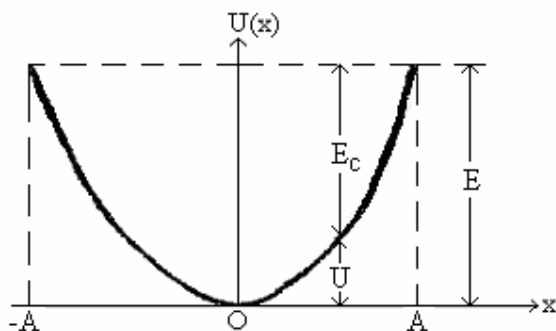
$$v = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Energia totală a oscilatorului este:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \quad (1.17)$$

Din (1.17) rezultă:

$$E = E_{c \max} = U_{\max}$$



Pentru $x = A$ rezultă $U = U_{\max}$, iar pentru $x = 0$ rezultă $U = 0$. Graficul energiei potențiale este de forma din figura alăturată.

În cazul oscilatorului liniar armonic valoarea medie temporală a energiei cinetice este egală cu valoarea medie temporală a energiei potențiale

$$\overline{E_c} = \overline{U} \quad (1.18)$$

unde

$$\overline{E_c} = \frac{1}{T} \int_0^T E_c dt = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \frac{\int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt}{T} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} \quad (1.19)$$

$$\overline{U} = \frac{1}{T} \int_0^T U dt = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} \quad (1.20)$$

În cazul în care intervine frecarea, cele două valori medii sunt diferite.

2. Oscilații amortizate

Un corp aflat în mișcare de oscilație întâmpină o rezistență din cauza forței de frecare. Dacă frecvența de vibrație a corpului este mică, atunci forța de frecare depinde numai de viteză. Pentru viteze mici putem dezvolta forța de frecare în serie Taylor după puterile vitezei. Termenul de ordinul zero al seriei este nul, deoarece nici o forță de frecare nu acționează asupra unui corp imobil. Primul termen care nu se anulează este proporțional cu viteza:

$$F_f = -r \dot{x}, \quad r > 0 \quad (2.1)$$

unde r este coeficientul de frecare a corpului cu mediul în care oscilează. Semnul minus arată că forța acționează în sens opus vitezei. Deoarece asupra corpului acționează și forța elastică

$$F = -kx, \quad k > 0 \quad (2.2)$$

rezultă ecuația diferențială a oscilațiilor amortizate:

$$m \ddot{x} = -kx - r\dot{x} \quad (2.3)$$

sau

$$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.4)$$

unde

$$\frac{r}{m} = 2\delta, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad (2.5)$$

δ este coeficientul de amortizare temporală, iar ω_0 este pulsația proprie (în absența frecărilor).

Ecuația (2.4) este o ecuație omogenă cu coeficienți constanți, având soluția de forma:

$$x(t) = C e^{\lambda t} \quad (2.6)$$

unde C și λ sunt constante. Înlocuind (2.6) în (2.4) se obține ecuația caracteristică:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2.7)$$

cu soluțiile:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (2.8)$$

a) Cazul frecărilor intense ($\delta > \omega_0$)

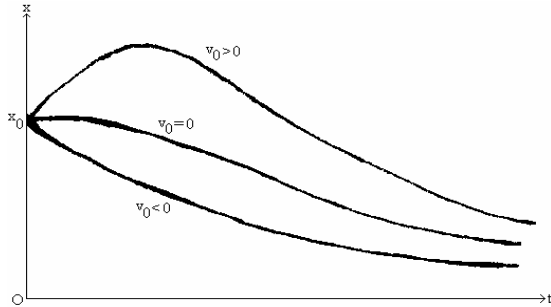
În acest caz rădăcinile ecuației caracteristice (2.8) sînt reale și negative:

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (2.9)$$

Soluția cea mai generală a ecuației (2.4) este o suprapunere a două soluții liniar independente cu două constante arbitrare C_1 și C_2 :

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-|\lambda_1| t} + C_2 e^{-|\lambda_2| t} \quad (2.10)$$

Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale (elongația și viteza la momentul $t = 0$). Aceasta este o mișcare aperiodică (neperiodică) amortizată. Forma graficului elongației în funcție de timp depinde de valoarea vitezei inițiale.



b) Cazul critic ($\delta = \omega_0$)

În acest caz rădăcinile ecuației caracteristice (2.8) sunt egale $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$. Soluția $x = C e^{-\delta t}$ obținută din (2.6) nu este completă, deoarece din punct de vedere matematic soluția unei ecuații diferențiale de ordinul doi trebuie să aibă două constante arbitrare.

Din punct de vedere fizic, cele două constante ar permite specificarea condițiilor inițiale (poziția și viteza). De aceea folosim metoda variației parametrilor, luând o soluție de forma:

$$x = u(t) e^{-\delta t} \quad (2.11)$$

Impunând ca soluția (2.11) să verifice ecuația (2.4) obținem:

$$\dot{x} = \dot{u} e^{-\delta t} - \delta u e^{-\delta t},$$

$$\ddot{x} = \ddot{u} e^{-\delta t} - \delta \dot{u} e^{-\delta t} - \delta \dot{u} e^{-\delta t} + \delta^2 u e^{-\delta t}$$

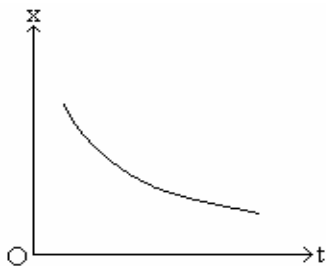
$$\ddot{u} e^{-\delta t} - 2\delta \dot{u} e^{-\delta t} + \delta^2 u e^{-\delta t} + 2\delta \dot{u} e^{-\delta t} - 2\delta^2 u e^{-\delta t} + \omega_0^2 u e^{-\delta t} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{u} - \delta^2 u + \omega_0^2 u = 0$$

$$\text{Dar } \delta = \omega_0 \Rightarrow \ddot{u} - \omega_0^2 u + \omega_0^2 u = 0 \Rightarrow \ddot{u} = 0 \Rightarrow u = a + bt$$

Astfel soluția generală a ecuației (2.4) este:

$$x = (a + bt) e^{-\delta t} \quad (2.12)$$



Aceasta este o mișcare aperiodică critică. Corpul se deplasează spre poziția de echilibru într-un timp minim, fără a oscila în jurul acesteia.

c) Cazul frecărilor slabe ($\delta < \omega_0$)

În acest caz rădăcinile ecuației caracteristice (2.8) sunt complexe.

Soluția generală a ecuației (2.4) este:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{\left(-\delta + i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\delta - i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\right)t}$$

$$x = e^{-\delta t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \quad (2.13)$$

unde:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (2.14)$$

este pseudopulsatia.

Utilizând relațiile lui Euler obținem:

$$\begin{aligned} x &= e^{-\delta t} [C_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t)] \\ x &= e^{-\delta t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

unde:

$$a = C_1 + C_2, \quad b = i(C_1 - C_2)$$

Pentru $t = 0$ rezultă $x_0 = a$, iar pentru $t = \frac{\pi}{2\omega}$ rezultă $x = e^{-\delta \frac{\pi}{2\omega}} b$. Deoarece x_0 , $x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)$, δ și ω sunt reale, rezultă că a și b sunt reale. Soluția (2.15) poate fi scrisă și sub forma:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.16)$$

Identificând (2.15) cu (2.16) rezultă:

$$A_0 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$A_0 \cos \varphi = a, \quad -A_0 \sin \varphi = b$$

$$A_0 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{b}{a} \quad (2.17)$$

Din (2.16) se constată că δ caracterizează scăderea în timp a amplitudinii:

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t} \quad (2.18)$$

Această mișcare este numită pseudoperiodică.

Pseudoperioada

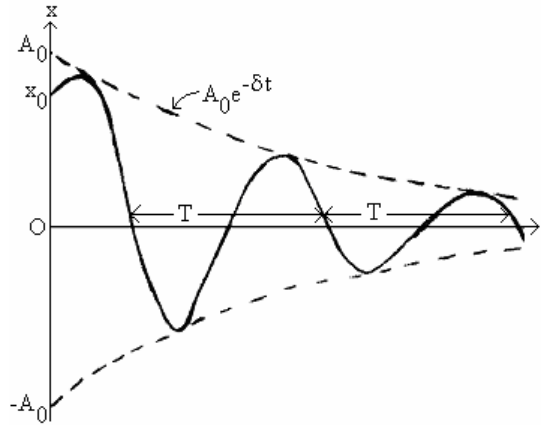
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \stackrel{(2.14)}{=} \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad (2.19)$$

este mai mare decât perioada mișcării neamortizate $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. (Pentru $\delta > \omega_0$ pseudoperioada

este imaginară, iar pentru $\delta = \omega_0$ rezultă $T = \infty$, astfel că în aceste cazuri mișcarea nu poate fi periodică.

În cazul mișcării slab amortizate ($\delta < \omega_0$) graficul elongației x în funcție de timp are forma din figură.

Decrementul logaritmic Λ este definit ca logaritmul natural al raportului a două valori succesive ale amplitudinii, separate printr-un timp de o pseudoperioadă:



$$\Lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \ln e^{\delta T} = \delta T \quad (2.20)$$

Prin măsurarea decrementului se poate determina gradul de amortizare specific unui material.

Amplitudinea mișcării scade în timp datorită pierderilor de energie cauzate de forța de frecare.

Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este:

$$L_f = \int_{x(0)}^{x(t)} F_f dx = \int_0^t F_f \dot{x} dt = - \int_0^t r \dot{x}^2 dt < 0 \quad (2.21)$$

Din relația (2.16) rezultă viteza:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -A_0 \delta e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - A_0 \omega e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) = \\ &= -\omega A_0 e^{-\delta t} \left[\frac{\delta}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + \sin(\omega t + \varphi) \right] \end{aligned}$$

În cazul unei amortizări foarte mici, $\frac{\delta}{\omega} \ll 1$, putem neglija primul termen din paranteza pătrată, obținând:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \\ E_c &= \frac{m \dot{x}^2}{2} = \frac{m \omega^2 A_0^2}{2} e^{-2\delta t} \sin^2(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Energia potențială este:

$$U = \frac{k x^2}{2} = \frac{m \omega_0^2 x^2}{2} = \frac{m \omega_0^2 A_0^2}{2} e^{-2\delta t} \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (2.23)$$

Energia totală devine:

$$E = \frac{m A_0^2}{2} e^{-2\delta t} \left[\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \right] \quad (2.24)$$

Pentru $\frac{\delta}{\omega} \ll 1$, din relația (2.14) obținem:

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \delta^2 = \omega^2 \left[1 + \left(\frac{\delta}{\omega} \right)^2 \right] \cong \omega^2$$

Înlocuind ω^2 cu ω_0^2 în (2.24) obținem o expresie simplificată pentru energia totală:

$$E = \frac{m \omega_0^2 A_0^2}{2} e^{-2 \delta t} \quad (2.25)$$

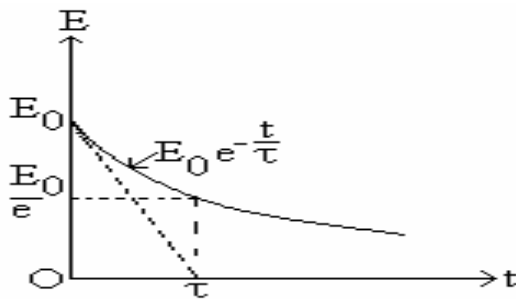
La $t = 0$ avem:

$$E_0 = \frac{m \omega_0^2 A_0^2}{2} \quad (2.26)$$

Astfel:

$$E = E_0 e^{-2 \delta t} \quad (2.27)$$

Se constată că energia totală scade exponențial cu timpul.



Scăderea energiei totale în timp este caracterizată de constanta de timp τ , care reprezintă timpul după care energia scade de e ori față de energia inițială:

$$\frac{E(\tau)}{E_0} = \frac{E_0 e^{-2 \delta \tau}}{E_0} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$2 \delta \tau = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{1}{2 \delta} = \frac{m}{r} \quad (2.28)$$

Dacă $\delta \rightarrow 0$ atunci $\tau \rightarrow \infty$, iar $E \rightarrow E_0$ (energia oscilatorului neamortizat). Se definește timpul de relaxare τ' ca fiind timpul după care amplitudinea $A(t)$ scade de e ori:

$$\frac{A(t)}{A(t + \tau')} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t + \tau')}} = e^{\delta \tau'} = e \quad \Rightarrow \quad \delta \tau' = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\tau' = \frac{1}{\delta} = \frac{2m}{r} \quad (2.29)$$

Constantele de timp ale armonicelor generate de sursele sonore ne dau indicații privind calitatea sunetului.

Energia disipată într-un interval de timp scurt Δt este o mărime pozitivă:

$$\Delta E = \left| \frac{dE}{dt} \right| \Delta t \quad \underline{\underline{(2.27)}} \quad 2 \delta E \Delta t \quad (2.30)$$

Unei pseudoperioade $T = \frac{2\pi}{\omega}$ îi corespund 2π radiani și deci unui radian îi corespunde un interval de timp egal cu $\frac{1}{\omega}$.

Gradul de atenuare a unui oscilator poate fi caracterizat prin factorul de calitate Q , definit ca raportul între energia totală a oscilatorului și energia disipată într-un interval de timp egal cu $1/\omega$.

Pentru $\Delta t = \frac{1}{\omega}$ energia disipată este $\Delta E = \frac{2\delta E}{\omega}$. Astfel factorul de calitate este:

$$Q = \frac{E}{\frac{2\delta E}{\omega}} = \frac{\omega}{2\delta} \approx \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (2.31)$$

Un oscilator slab amortizat are $Q \gg 1$. Astfel o cavitate de microunde supraconductoare are $Q > 10^7$. Pentru un oscilator neamortizat ($\delta = 0$), factorul de calitate este infinit.

Din relația (2.14) rezultă:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \quad (2.32)$$

Pentru $Q \rightarrow \infty \Rightarrow \omega \rightarrow \omega_0$.

3. Oscilatorul forțat neamortizat (fără frecare)

Considerăm un oscilator liniar asupra căruia acționează, pe lângă forța elastică, o forță exterioară periodică:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad (3.1)$$

Ecuția de mișcare a oscilatorului forțat fără frecare este:

$$m \ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (3.2)$$

sau

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (3.3)$$

unde $f_0 = F_0/m$ este densitatea masică a amplitudinii forței armonice, iar $\omega_0^2 = k/m$ este pulsația proprie.

Soluția generală a ecuației neomogene (3.3) este egală cu suma dintre soluția generală a ecuației omogene $x_{\text{omog.}} = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$ și o soluție particulară a ecuației neomogene, care se ia de forma membrului din dreapta $x_{\text{neomog.}} = A \cos \omega t$.

În cazul soluției particulare neomogene nu am luat și un defazaj, deoarece în ecuația de mișcare nu intervine termenul în \dot{x} datorat forței de frecare. Deci:

$$x = C \cos(\omega_0 t + \varphi) + A \cos \omega t \quad (3.4)$$

Pentru timpi mult mai mari decât timpul de relaxare τ' , amplitudinile primului termen sunt practic nule $|x_{\text{omog.}}(t \gg \tau')| \ll A_0$ și deci în regim staționar, când oscilațiile tranzitorii s-au stins:

$$x = A \cos \omega t \quad (3.5)$$

Impunând ca soluția (3.5) să verifice ecuația (3.3), obținem:

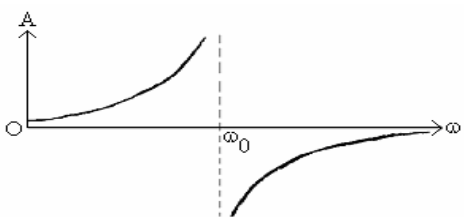
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega A \sin \omega t, \quad \ddot{x} = -\omega^2 A \cos \omega t, \\ -\omega^2 A \cos \omega t + \omega_0^2 A \cos \omega t &= f_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.6)$$

Astfel soluția devine:

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (3.7)$$

Soluția (3.7) nu este completă, deoarece nu conține nici o constantă arbitrară, astfel că nu putem specifica poziția și viteza inițială a oscilatorului.



Rezultă că, după un timp în care putem neglija contribuția soluției generale a ecuației omogene, efectul condițiilor inițiale se pierde.

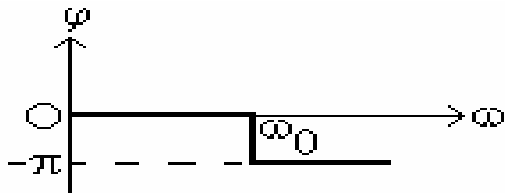
Variația amplitudinii A din relația (3.6) cu pulsația ω este reprezentată în figură.

Graficul reprezintă o curbă de dispersie și de aceea amplitudinea este numită amplitudine dispersivă.

La $\omega = 0$ amplitudinea are valoarea f_0/ω_0^2 , iar pentru $\omega \rightarrow \infty$ rezultă $A \rightarrow 0$.

În cazul în care pulsația forței armonice exterioare este egală cu pulsația naturală a oscilatorului ($\omega = \omega_0$), avem un fenomen de rezonanță, deoarece amplitudinea oscilațiilor crește fără limită ($A \rightarrow \infty$). Amplitudinea sistemelor fizice reale este întotdeauna finită, întrucât intervine frecarea.

Pentru $\omega < \omega_0$, A este pozitiv, iar pentru $\omega > \omega_0$, A este negativ. Amplitudinea negativă arată că dacă forța variază ca $F_0 \cos \omega t$, deplasarea variază ca $-|A| \cos \omega t$. Deoarece $-\cos \omega t = \cos(\omega t \pm \pi)$ rezultă că semnul minus este echivalent cu un defazaj egal cu $\pm \pi$ radiani ($\pm 180^\circ$) între forță și deplasare. Defazajul real este $-\pi$, datorită întârzierii răspunsului corpului oscilant la excitație.



Pentru $\omega < \omega_0$ deplasarea este în fază cu forța. Rezultă că faza se schimbă cu $-\pi$ radiani la rezonanță.

4. Oscilatorul forțat amortizat (cu frecare)

Considerăm un oscilator linear asupra căruia acționează, pe lângă forța de frecare $-r \dot{x}$, forța elastică $-k x$ și o forță exterioară periodică $F_0 \cos \omega t$. Ecuația de mișcare este:

$$m \ddot{x} + k x + r \dot{x} = F_0 \cos \omega t \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + 2 \delta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (4.1)$$

unde:

$$\frac{r}{m} = 2 \delta, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad f_0 = \frac{F_0}{m} \quad (4.2)$$

Deoarece $2 \delta \dot{x}$ introduce un termen în $\sin \omega t$, vom alege o soluție particulară a ecuației neomogene de forma:

$$x = B \cos \omega t + C \sin \omega t = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.3)$$

Pentru timpi mult mai mari decât timpul de relaxare, soluția generală a ecuației omogene este neglijabilă și deci soluția ecuației (4.1) în regim staționar este:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.4)$$

Oscilația este forțată deoarece pulsația din (4.4) este egală cu pulsația forței exterioare. S-a luat $-\varphi$ datorită întârzierii răspunsului corpului oscilant la excitație.

Impunem ca soluția (4.4) să verifice ecuația (4.1) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega A \sin(\omega t - \varphi), \quad \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \varphi) \quad \Rightarrow \\ -\omega^2 A \cos(\omega t - \varphi) - 2 \delta \omega A \sin(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \varphi) &= f_0 \cos \omega t \quad (4.5) \end{aligned}$$

Această egalitate trebuie să fie valabilă la orice moment, deci în particular și pentru t_1 și t_2 definiți prin:

$$\begin{aligned} \omega t_1 - \varphi = 2\pi, \quad \omega t_2 - \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \\ -\omega^2 A + \omega_0^2 A = f_0 \cos(2\pi + \varphi) \quad A(\omega_0^2 - \omega^2) = f_0 \cos \varphi \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad -2 \delta \omega A = f_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \quad 2 \delta \omega A = f_0 \sin \varphi \quad (4.7)$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}} \quad (4.8)$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) = f_0 \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = f_0 \sqrt{1 - \frac{4 \delta^2 \omega^2 A^2}{f_0^2}}$$

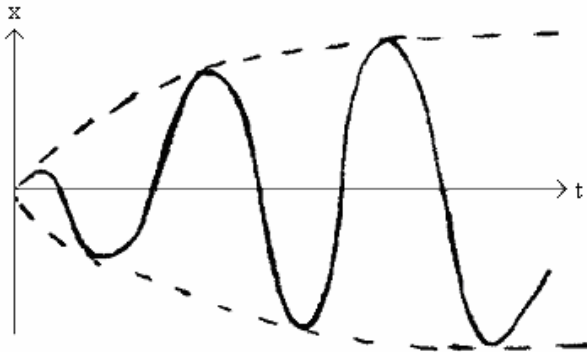
$$A^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 = f_0^2 - 4 \delta^2 \omega^2 A^2 \quad \Rightarrow$$

$$A^2 \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2 \right] = f_0^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}}} \quad (4.9)$$

Astfel în regim staționar soluția ecuației (4.1) este:

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (4.10)$$



Dacă inițial corpul a fost în stare de repaus, iar asupra sa a început să acționeze forța periodică exterioară, corpul începe să efectueze oscilații forțate a căror amplitudine crește până când atinge valoarea maximă dată de relația (4.9).

4.1. Rezonanța de amplitudine

Pentru a deduce pulsația ω a forței armonice exterioare pentru care amplitudinea oscilației forțate este maximă, egalăm cu zero derivata lui A din (4.9) în raport cu ω .

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\omega} &= -\frac{1}{2} f_0 \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \left[2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\delta^2 \omega \right] = \\ &= \frac{2\omega f_0 (\omega_0^2 - \omega^2 - 2\delta^2)}{\sqrt{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 \right]^3}} = 0 \end{aligned}$$

Deoarece $\omega \neq 0$, rezultă:

$$\boxed{\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} \quad (4.11)$$

sau:

$$\omega_A = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}} \Rightarrow \omega_A = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (4.12)$$

unde

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (4.13)$$

este factorul de calitate.

Introducând (4.11) în (4.8) și (4.9) obținem:

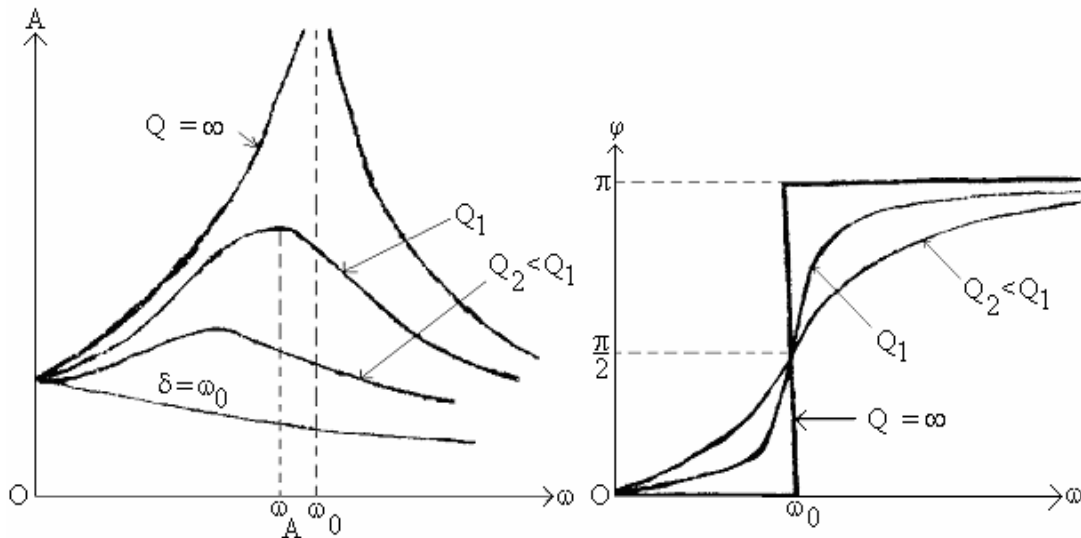
$$\text{tg } \varphi_A = \frac{2\delta \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2} \Rightarrow \boxed{\text{tg } \varphi_A = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{\delta} = \frac{\omega_A}{\delta}} \quad (4.14)$$

$$A_A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2)^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2)}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\delta^2\omega^2 - 4\delta^4}} \Rightarrow$$

$$\boxed{A_A = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}} \quad (4.15)$$

Când $\omega = \omega_A$, amplitudinea mișcării oscilatorii devine foarte mare, caracterizând fenomenul de rezonanță de amplitudine. Pentru $\omega_0^2 < 2\delta^2$, ω_A devine complex și deci nu avem rezonanță, amplitudinea descrescând continuu.

Dependența amplitudinii A și a fazei φ de ω este influențată foarte mult de mărimea factorului de calitate Q .



Pentru $\delta = 0$ ($Q = \infty$) rezultă $\omega_A = \omega_0$, adică pulsația forței exterioare este egală cu pulsația proprie. În acest caz din (4.15) rezultă că amplitudinea este infinită. Această situație nu se realizează practic, deoarece întotdeauna intervine rezistența mediului. Totuși, arborii mașinilor rapide tind să se rupă la rezonanță. La arbori forța exterioară perturbatoare este cauzată de imposibilitatea centrării riguroase pe axa de rotație a rotoarelor și a pieselor montate pe ei. Pe baza fenomenului de rezonanță se pot construi rezonatorii acustici.

În vecinătatea pulsației proprii ω_0 , faza φ se schimbă cu atât mai mult, cu cât δ se apropie de zero ($Q \rightarrow \infty$). Trebuie să ținem seama că în expresia elongației am luat defazajul $-\varphi$ în loc de φ . Pentru $\omega \ll \omega_0$ elongația este practic în fază cu forța excitatoare, iar pe măsură ce ω se apropie de ω_0 răspunsul sistemului este întârziat ca fază față de forța excitatoare.

4.2. Rezonanța energiei potențiale medii

Energia potențială are expresia:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega t - \varphi) \quad (4.16)$$

Valoarea medie temporală a energiei potențiale este:

$$\bar{U} = \frac{m \omega_0^2 A^2}{4} \quad (4.17)$$

Din condiția de maxim a acestei energii medii obținem:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\omega} = 0 &\Rightarrow \frac{dA^2}{d\omega} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{-2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\delta^2 \omega}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2\right]^2} = 0 \\ &\Rightarrow \omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad \text{tg } \varphi_A = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{\delta}, \\ &A_A = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Se constată că rezonanța energiei potențiale medii are caracteristici asemănătoare cu rezonanța de amplitudine (ω_A și $\text{tg } \varphi_A$ sunt aceleași). Valoarea maximă a energiei potențiale medii este:

$$\bar{U}_{\max} = \frac{m \omega_0^2 A_A^2}{4} = \frac{m \omega_0^2 f_0^2}{16\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2)} \quad (4.19)$$

Valorile lui ω pentru care $\bar{U} = \frac{\bar{U}_{\max}}{2}$ se obțin astfel:

$$\begin{aligned} \frac{m \omega_0^2}{4} \cdot \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} &= \frac{m \omega_0^2 f_0^2}{32\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2)} \Rightarrow \\ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 &= 8\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2) \Rightarrow \\ \omega^4 - 2\omega^2(\omega_0^2 - 2\delta^2) + \omega_0^4 - 8\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2) &= 0 \Rightarrow \\ \omega^2 &= \omega_0^2 - 2\delta^2 \pm \sqrt{4\delta^2 \omega_0^2 - 4\delta^4} \\ \omega^2 &= \omega_0^2 - 2\delta^2 \pm 2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \end{aligned}$$

Deoarece $\omega > 0$ rezultă:

$$\omega_- = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2 - 2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}, \quad \omega_+ = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2 + 2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad (4.20)$$

4.3. Rezonanța cinetică a vitezei

Din relația (4.4) putem determina viteza:

$$\dot{x} = -\omega A \sin(\omega t - \varphi) \quad (4.21)$$

Întrucât pentru sistemele oscilante interesează în primul rând defazajul $\varphi_{\dot{x}}$ dintre răspunsul cinetic $\dot{x}(t)$ și excitația $F(t)$, folosind relația (4.21) obținem:

$$\dot{x} = \omega A \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \omega A \cos(\omega t - \varphi_{\dot{x}}) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi_{\dot{x}} = \varphi - \frac{\pi}{2}} \quad (4.22)$$

Din relațiile (4.21) și (4.9) putem determina amplitudinea vitezei:

$$A_v = -\omega A = -\frac{\omega f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} = -\frac{f_0}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\delta^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_v = -\frac{f_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + 4\delta^2}}} \quad (4.23)$$

Pentru a obține pulsația ω a forței armonice exterioare pentru care amplitudinea vitezei este maximă, egalăm cu zero derivata lui A_v în raport cu ω :

$$\frac{d A_v}{d \omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d \omega} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + 4\delta^2}} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)\left(-\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)}{\left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + 4\delta^2\right]^{3/2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \omega_0} \quad (4.24)$$

Relația (4.24) exprimă condiția de realizare a rezonanței cinetice. Pentru $\delta = 0$, ω_A din (4.11) devine egal cu ω_0 .

Înlocuind $\omega = \omega_0$ în (4.8) și (4.23) obținem:

$$\operatorname{tg} \varphi_v = \frac{2\delta\omega_0}{\omega_0^2 - \omega_0^2} = \infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_v = \frac{\pi}{2}} \quad (4.25)$$

$$A_{v \max} = -\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + 4\delta^2}} \Rightarrow \boxed{A_{v \max} = -\frac{f_0}{2\delta}} \quad (4.26)$$

Din (4.22) rezultă:

$$\boxed{\varphi_{\dot{x}_v} = 0} \quad (4.27)$$

adică la rezonanță răspunsul cinetic \dot{x} este în fază cu excitația $F(t)$.

Din (4.9) rezultă $A = \frac{f_0}{2\delta\omega}$ care coincide cu (4.15) pentru $\delta = 0$.

4.4. Rezonanța puterii disipate medii și a energiei cinetice medii

Puterea disipată de forța de frecare este:

$$P_d = F_f \cdot \dot{x} = -r \dot{x} \cdot \dot{x} = -r \dot{x}^2 \quad (4.21) \quad -r\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - \varphi) \quad (4.28)$$

Media temporală a puterii disipate se determină astfel:

$$\bar{P}_d = \frac{1}{T} \int_0^T P_d dt = -\frac{r\omega^2 A^2}{2} = -\frac{r A_v^2}{2} \quad (4.23) \quad \frac{r f_0^2}{2 \left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right)^2 + 4\delta^2 \right]} \quad (4.29)$$

Din condiția de maxim a puterii disipate medii obținem:

$$\frac{d P_d}{d \omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d \omega} \left(\frac{1}{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right)^2 + 4\delta^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{- \left[2 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right) \left(-\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) \right]}{\left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right)^2 + 4\delta^2 \right]} = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_{\dot{x}} = 0 \quad (4.30)$$

Se constată că rezonanța puterii disipate medii are caracteristici asemănătoare cu rezonanța cinetică a vitezei.

Valoarea maximă a puterii disipate medii este:

$$\bar{P}_{d \max} \quad (4.29) \quad -\frac{r f_0^2}{8\delta^2} \quad (4.31)$$

Valorile lui ω pentru care $\bar{P}_d = \frac{\bar{P}_{d \max}}{2}$ se obțin astfel:

$$\frac{-r f_0^2}{2 \left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right)^2 + 4 \delta^2 \right]} = -\frac{r f_0^2}{16 \delta^2} \Rightarrow \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right)^2 + 4 \delta^2 = 8 \delta^2 \Rightarrow$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 = 4 \delta^2 \omega^2 \Rightarrow \quad (4.32)$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \pm 2 \delta \omega \Rightarrow \omega^2 \pm 2 \delta \omega - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\omega = \mp \delta \pm \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$$

Deoarece ω este pozitiv, iar $\delta < \omega_0$ rezultă:

$$\omega = \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2} \mp \delta \Rightarrow$$

$$\omega_- = \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2} - \delta, \quad \omega_+ = \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2} + \delta \quad (4.33)$$

$$\Delta \omega = \omega_+ - \omega_- \Rightarrow \Delta \omega = 2 \delta \quad (4.34)$$

Energia cinetică a oscilațiilor forțate este:

$$E_c = \frac{m \dot{x}^2}{2} = \frac{m \omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t - \varphi) \quad (4.35)$$

Media temporală a energiei cinetice este dată de relația:

$$\bar{E}_c = \frac{1}{T} \int_0^T E_c dt = \frac{m \omega^2 A^2}{4} = \frac{m A_v^2}{4} \quad (4.36)$$

Deoarece \bar{E}_c are aceeași dependență de ω ca și \bar{P}_d (determinată de A_v^2) rezultă că valoarea maximă a energiei cinetice medii corespunde tot lui

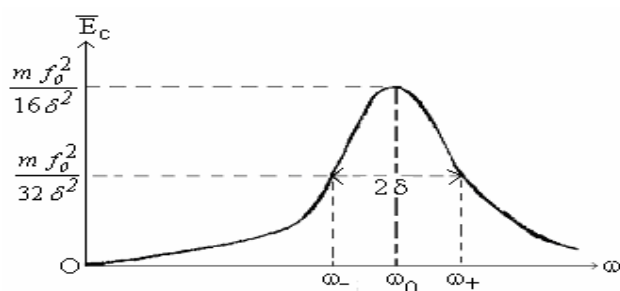
$$\omega = \omega_0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_{\dot{x}} = 0$$

$$\bar{E}_{c_{\max}} \stackrel{(4.26)}{=} \frac{m f_0^2}{16 \delta^2} \quad (4.37)$$

Notăm cu ω_- și ω_+ pulsațiile forței armonice exterioare pentru care energia cinetică a oscilației forțate este egală cu jumătate din valoarea maximă:

$$\bar{E}_c = \frac{\bar{E}_{c_{\max}}}{2} \Rightarrow \frac{m f_0^2}{4 \left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right)^2 + 4 \delta^2 \right]} = \frac{m f_0^2}{32 \delta^2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + 4\delta^2 = 8\delta^2 \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)^2 = 4\delta^2 \omega^2 \equiv (4.32)$$



Rezultă aceleași valori ω_- și ω_+ date în relația (4.33). $\Delta\omega = 2\delta$ este numită „lățimea benzii de trecere” în scara pulsațiilor.

Graficul energiei cinetice medii în funcție de ω este o curbă de rezonanță Lorentz.

4.5. Rezonanța puterii totale medii

Puterea totală furnizată de forța exterioară este:

$$\begin{aligned} P &= F \cdot \dot{x} = F_0 \cos \omega t \cdot (-\omega A) \sin(\omega t - \varphi) = -\omega A F_0 \cos \omega t \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= -\omega A F_0 \cos \omega t [\sin \omega t \cos \varphi - \sin \varphi \cos \omega t] = \\ &= -\frac{\omega A F_0}{2} \sin 2\omega t \cos \varphi + \omega A F_0 \sin \varphi \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

Puterea totală medie se obține ușor deoarece $\overline{\sin 2\omega t} = 0$, $\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}$

$$\bar{P} = \frac{\omega A F_0 \sin \varphi}{2} \quad (4.38)$$

Înlocuind $F_0 = m f_0$ și $\sin \varphi$ din relația (4.7)

$$\sin \varphi = \frac{2\delta \omega A}{f_0} \quad (4.39)$$

obținem:

$$\bar{P} = \frac{\omega A m f_0}{2} \cdot \frac{2\delta \omega A}{f_0} \Rightarrow \bar{P} = m \delta \omega^2 A^2 \quad (4.40)$$

sau

$$\bar{P} = m \delta A_v^2 \quad (4.41)$$

Deoarece \bar{P} are aceeași dependență de ω ca și \bar{P}_d și \bar{E}_c (determinată de A_v^2) rezultă că valoarea maximă a puterii totale medii corespunde la $\omega = \omega_0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_{\dot{x}} = 0$.

Puterea maximă se obține din relațiile (4.41) și (4.26):

$$\bar{P}_{\max} = m \delta \cdot \frac{f_0^2}{4\delta^2} \Rightarrow \bar{P}_{\max} = \frac{m f_0^2}{4\delta} \quad (4.42)$$

Pulsațiile ω_- și ω_+ pentru care puterea totală medie este egală cu jumătate din valoarea maximă se obțin astfel:

$$\bar{P} = \frac{\bar{P}_{\max}}{2} \Rightarrow \frac{m \delta f_0^2}{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + 4 \delta^2} = \frac{m f_0^2}{8 \delta} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + 4 \delta^2 = 8 \delta^2 \Rightarrow \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 = 4 \delta^2 \omega^2 \Rightarrow (4.43) \equiv (4.32)$$

$$\omega_- = \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2} - \delta, \quad \omega_+ = \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2} + \delta \quad (4.44)$$

$$\Delta \omega = \omega_+ - \omega_- = 2 \delta \quad (4.45)$$

$\Delta \omega$ se numește lățime totală a liniei de rezonanță.

Din relația (4.45) și din definiția factorului de calitate

$$Q = \frac{\omega_0}{2 \delta} \quad (4.46)$$

obținem:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} \quad (4.47)$$

Astfel factorul de calitate este egal cu raportul între pulsația de rezonanță și lățimea liniei de rezonanță. Cu cât Q crește (δ scade), cu atât curba de rezonanță Lorentz devine mai înaltă și mai îngustă. În acest caz se spune că selectivitatea oscilatorului crește.

Deoarece constanta de timp și timpul de relaxare au expresiile:

$$\tau = \frac{1}{2 \delta}, \quad \tau' = \frac{1}{\delta} \quad (4.48)$$

rezultă:

$$\Delta \omega \tau = 1 \quad (4.49)$$

$$\Delta \omega = \frac{2}{\tau'} \quad (4.50)$$

În urma unei perturbări accidentale a unui oscilator cu înaltă selectivitate ($\Delta \omega$ mic), oscilația va dura un timp îndelungat (τ mare). Relația (4.49) este asemănătoare relației de incertitudine din mecanica cuantică. Astfel lățimea curbei de rezonanță a oscilațiilor forțate este egală cu inversul constantei de timp a oscilațiilor libere. $\Delta \omega$ este invers proporțională cu timpul de relaxare τ' .

4.6. Amplitudinea absorbtivă și amplitudinea dispersivă (elastică)

Putem obține aceleași rezultate folosind reprezentarea complexă. În această reprezentare ecuația (4.1) devine:

$$\ddot{z} + 2 \delta \dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i \omega t} \quad (4.51)$$

unde z este o mărime complexă.

În regim staționar, soluția ecuației (4.51) este de forma:

$$z = z_0 e^{i \omega t} \quad (4.52)$$

Impunând soluției (4.52) să verifice ecuația (4.51) obținem:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i \omega z_0 e^{i \omega t}, \quad \ddot{z} = -\omega^2 z_0 e^{i \omega t}, \\ -\omega^2 z_0 e^{i \omega t} + 2 \delta i \omega z_0 e^{i \omega t} + \omega_0^2 z_0 e^{i \omega t} &= f_0 e^{i \omega t} \quad \Rightarrow \\ z_0 &= \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i 2 \delta \omega} \end{aligned} \quad (4.53)$$

unde $\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i 2 \delta \omega}$ este numită funcție de transfer.

Deci:

$$z = z_0 e^{i \omega t} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{f_0 e^{i \omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i 2 \delta \omega} \quad (4.54)$$

$$z = \frac{f_0 e^{i \omega t}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i 2 \delta \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}} = \frac{f_0 e^{i \omega t}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}} e^{-i \varphi}$$

$$\cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{2 \delta \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4.55) \equiv (4.8)$$

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) \quad \Rightarrow$$

$$x = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.56) \equiv (4.4)$$

unde:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}} \quad (4.57) \equiv (4.9)$$

$\operatorname{tg} \varphi$ și A puteau fi scrise direct din (4.53).

Relația (4.54) poate fi scrisă astfel:

$$z = \left[\frac{f_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2} - \frac{i f_0 2 \delta \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2} \right] e^{i \omega t}$$

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{f_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2} \cos \omega t + \frac{2 f_0 \delta \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2} \sin \omega t$$

$$x = A_d \cos \omega t + A_a \sin \omega t \quad (4.58)$$

unde:

$$A_d = \frac{f_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}, \quad A_a = \frac{2f_0 \delta \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2},$$

$$A = \sqrt{A_d^2 + A_a^2} \quad (4.59)$$

A_d este numită amplitudine dispersivă, iar A_a este amplitudinea absorbtivă.

Deci în loc să descriem oscilațiile printr-o amplitudine și o fază, le descriem în funcție de două amplitudini (A_d și A_a). Componenta $A_d \cos \omega t$ este în fază cu forța externă $F_0 \cos \omega t$, iar componenta $A_a \sin \omega t = A_a \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ este defazată cu 90° față de forța exterioară.

În vecinătatea rezonanței $|\omega_0^2 - \omega^2| \ll 2\delta\omega$, ω este apropiat de ω_0 , iar

$$A_d \approx 0, \quad A_a = \frac{2f_0 \delta \omega_0}{4\delta^2 \omega_0^2} = \frac{f_0}{2\delta \omega_0},$$

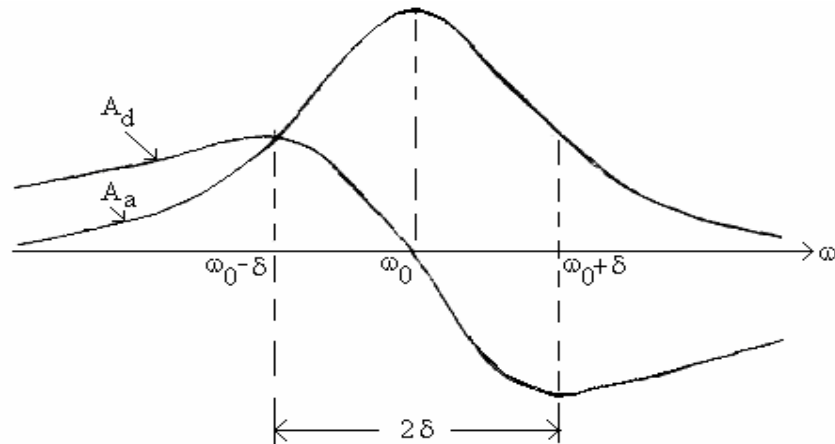
$$x = \frac{f_0}{2\delta \omega_0} \sin \omega t = \frac{f_0}{2\delta \omega_0} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.60)$$

Departe de rezonanță $|\omega_0^2 - \omega^2| \gg 2\delta\omega$ avem:

$$A_a \approx 0, \quad A_d = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (4.61)$$

Pentru $\omega \ll \omega_0$ rezultă $A_d \geq 0$, $A_a \geq 0$, iar pentru $\omega \gg \omega_0$ avem $A_d \leq 0$, $A_a \geq 0$.

Graficul amplitudinilor A_d și A_a în funcție de ω are forma următoare:



Din relația (4.58) obținem viteza:

$$\dot{x} = -\omega A_d \sin \omega t + \omega A_a \cos \omega t$$

Puterea instantanee absorbită în regim staționar este:

$$P = F \cdot \dot{x} = -\omega F_0 A_d \sin \omega t \cos \omega t + \omega F_0 A_a \cos^2 \omega t$$

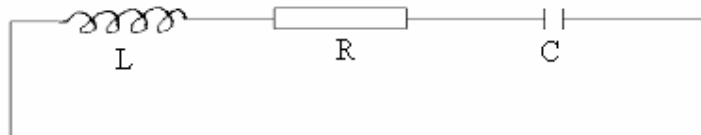
Puterea medie este:

$$\bar{P} = \frac{\omega F_0 A_a}{2} = m \delta A_v^2 \quad (4.62) \equiv (4.41)$$

Se constată că numai partea imaginară a soluției complexe contribuie la puterea absorbită mediată pe durata unei oscilații staționare. Termenul $A_d \cos \omega t$ contribuie numai la puterea absorbită instantanee.

5. Oscilații electromagnetice în circuite RLC

Pentru un circuit LRC serie



putem scrie relațiile:

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad U_L = -e = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2 Q}{dt^2}, \quad U_R = IR = R \frac{dQ}{dt}, \quad U_C = \frac{Q}{C}$$

Din legea a doua a lui Kirchhoff:

$$0 = U_L + U_R + U_C$$

obținem:

$$L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{1}{C} Q = 0 \quad | : L$$

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

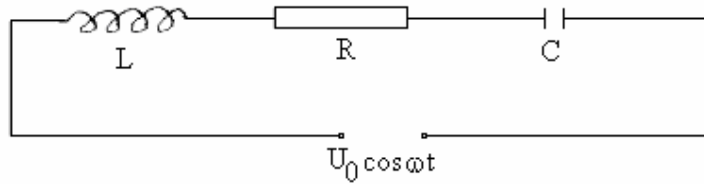
Ultima relație este de forma ecuației oscilațiilor amortizate:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Astfel oscilațiile electromagnetice pot fi studiate prin analogie cu oscilațiile mecanice. Există corespondența:

$$\begin{array}{ll} m \rightarrow L, & k \rightarrow \frac{1}{C} \\ x \rightarrow Q, & r \rightarrow R \\ 2\delta \rightarrow \frac{R}{L}, & v \rightarrow I \\ \omega_0^2 \rightarrow \frac{1}{LC}, & F \rightarrow U \end{array}$$

Pentru un circuit LRC serie alimentat de o sursă de tensiune :



avem ecuația diferențială:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = U_0 \cos \omega t \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = \frac{U_0}{L} \cos \omega t$$

care are aceeași formă cu ecuația oscilatorului forțat:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

În mod asemănător se tratează circuitul RLC paralel.

6. Compunerea oscilațiilor

6.1. Compunerea oscilațiilor armonice paralele de aceeași pulsație

Vom lucra în reprezentarea complexă a oscilațiilor:

$$z_1 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}, \quad x_1 = \text{Re } z_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (6.1)$$

$$z_2 = A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}, \quad x_2 = \text{Re } z_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (6.2)$$

Mișcarea rezultantă este tot o mișcare oscilatorie armonică de aceeași pulsație:

$$z = z_1 + z_2 = e^{i\omega t} \left(A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} \right) = A e^{i(\omega t + \varphi)},$$

$$x = \text{Re } z = x_1 + x_2 \quad (6.3)$$

Complex conjugata acestei relații este:

$$z^* = e^{-i\omega t} \left(A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2} \right) = A e^{-i(\omega t + \varphi)} \quad (6.4)$$

Făcând produsul ultimelor relații obținem:

$$z z^* = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \left[e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right] \quad (6.5)$$

Folosind formula lui Euler:

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos \varphi$$

obținem:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

sau, deoarece $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (6.6)$$

Relația (6.3) poate fi scrisă astfel:

$$z = e^{i\omega t} [A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + i(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)] = e^{i\omega t} A (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Prin identificarea părților reale și a celor imaginare obținem:

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 \quad (6.7)$$

$$A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 \quad (6.8)$$

De aici rezultă:

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}} \quad (6.9)$$

Relația (6.6) poate fi obținută și din (6.7) și (6.8) prin ridicare la pătrat și adunare membru cu membru.

Dacă $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) atunci $A = A_1 + A_2$, iar oscilațiile sunt în fază.

Dacă $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) atunci $A = A_1 - A_2$, iar oscilațiile sunt în opозиție de fază.

În particular, dacă $A_1 = A_2$ rezultă $A = 0$, adică punctul material rămâne în repaus.

Dacă $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) atunci $A^2 = A_1^2 + A_2^2$, iar oscilațiile sunt în cuadratură.

6.2. Compunerea oscilațiilor armonice paralele de pulsații puțin diferite (fenomenul de bătăi)

În reprezentarea complexă, oscilațiile care se compun sunt descrise de relațiile:

$$z_1 = A_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)}, \quad z_2 = A_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)} \quad (6.10)$$

Notând:

$$\varepsilon = \omega_2 - \omega_1, \quad \omega_1 + \omega_2 = 2\omega \quad (6.11)$$

obținem:

$$\omega_2 = \omega + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega_1 = \omega - \frac{\varepsilon}{2} \quad (6.12)$$

$$z_1 = A_1 e^{i\left[\left(\omega - \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \varphi_1\right]}, \quad z_2 = A_2 e^{i\left[\left(\omega + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \varphi_2\right]} \quad (6.13)$$

Compunând oscilațiile obținem:

$$\begin{aligned}
 z = z_1 + z_2 &= A_1 e^{i\left[\left(\omega - \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \varphi_1\right]} + A_2 e^{i\left[\left(\omega + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \varphi_2\right]} = \\
 &= a(t) e^{i[\omega t + \varphi(t)]}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}
 z^* &= A_1 e^{-i\left[\left(\omega - \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \varphi_1\right]} + A_2 e^{-i\left[\left(\omega + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \varphi_2\right]} = \\
 &= a^*(t) e^{-i[\omega t + \varphi(t)]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z z^* = a a^* = a^2 &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \left\{ e^{i\left[\left(\omega - \frac{\varepsilon}{2} - \omega - \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \varphi_1 - \varphi_2\right]} + \right. \\
 &\quad \left. + e^{-i\left[\left(\omega - \frac{\varepsilon}{2} - \omega - \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \varphi_1 - \varphi_2\right]} \right\}
 \end{aligned}$$

$$a^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \left[e^{i(\varphi_1 - \varphi_2 - \varepsilon t)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2 - \varepsilon t)} \right]$$

$$a^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \varepsilon t)$$

$$\boxed{a^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varepsilon t + \varphi_2 - \varphi_1)} \tag{6.15}$$

Relația (6.14) poate fi pusă sub forma:

$$\begin{aligned}
 z &= e^{i\omega t} \left\{ A_1 \cos\left(\varphi_1 - \frac{\varepsilon}{2}t\right) + A_2 \cos\left(\varphi_2 + \frac{\varepsilon}{2}t\right) + \right. \\
 &\quad \left. + i \left[A_1 \sin\left(\varphi_1 - \frac{\varepsilon}{2}t\right) + A_2 \sin\left(\varphi_2 + \frac{\varepsilon}{2}t\right) \right] \right\} = \\
 &= a(t) e^{i\omega t} [\cos \varphi(t) + i \sin \varphi(t)]
 \end{aligned}$$

Identificând părțile reale pe de o parte și părțile imaginare pe de altă parte, obținem:

$$a(t) \cos \varphi(t) = A_1 \cos\left(\varphi_1 - \frac{\varepsilon}{2}t\right) + A_2 \cos\left(\varphi_2 + \frac{\varepsilon}{2}t\right)$$

$$a(t) \sin \varphi(t) = A_1 \sin\left(\varphi_1 - \frac{\varepsilon}{2}t\right) + A_2 \sin\left(\varphi_2 + \frac{\varepsilon}{2}t\right)$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A_1 \sin\left(\varphi_1 - \frac{\varepsilon}{2} t\right) + A_2 \sin\left(\varphi_2 + \frac{\varepsilon}{2} t\right)}{A_1 \cos\left(\varphi_1 - \frac{\varepsilon}{2} t\right) + A_2 \cos\left(\varphi_2 + \frac{\varepsilon}{2} t\right)}} \quad (6.16)$$

Din relațiile (6.15) și (6.16) rezultă că amplitudinea și faza inițială variază în timp, adică oscilația rezultantă nu mai este armonică. Amplitudinea mișcării rezultante este o funcție periodică ce variază între un maxim egal cu $A_1 + A_2$ pentru $\varepsilon t + \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ și un minim egal cu $A_1 - A_2$ atunci când $\cos(\varepsilon t + \varphi_2 - \varphi_1) = -1$, adică pentru $\varepsilon t + \varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$.

Dacă diferența $|\omega_2 - \omega_1|$ este foarte mică în raport cu media pulsațiilor $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, atunci $a(t)$ și $\varphi(t)$ variază foarte lent în comparație cu funcțiile $\cos \omega t$ și $\sin \omega t$, adică mișcarea rezultantă este o oscilație modulată atât în amplitudine, cât și în fază.

Maximele de amplitudine corespund unor amplificări periodice ale mișcării oscilatorii numite „bătăi”, care sunt evidențiate prin alternanța lor cu amplitudinile minime. Prin frecvența bătăilor se înțelege numărul de bătăi pe unitatea de timp, iar prin perioada bătăilor se înțelege timpul scurs între două bătăi consecutive, adică între două momente de amplitudine maximă.

Notând cu τ_b perioada bătăilor, putem scrie următoarele relații care corespund la două maxime consecutive:

$$\begin{aligned} \varepsilon t + \varphi_2 - \varphi_1 &= 2k\pi \\ \varepsilon(t + \tau_b) + \varphi_2 - \varphi_1 &= 2(k+1)\pi \end{aligned}$$

Scăzând termen cu termen prima ecuație din a doua, obținem:

$$\varepsilon \tau_b = 2\pi$$

de unde rezultă perioada bătăilor

$$\tau_b = \frac{2\pi}{\varepsilon} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \quad (6.17)$$

Frecvența bătăilor este:

$$\nu_b = \frac{1}{\tau_b} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \frac{2\pi(\nu_2 - \nu_1)}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1 \quad (6.18)$$

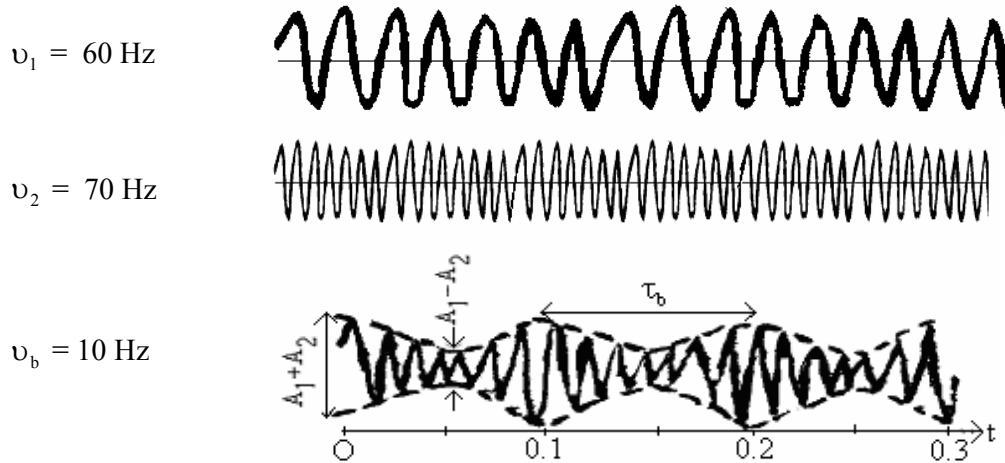
Rezultă că frecvența cu care se succed maximele, deci frecvența bătăilor, este egală cu diferența celor două frecvențe componente.

Din relația (6.17) rezultă că maximele (bătăile) sunt cu atât mai rare cu cât frecvențele oscilațiilor componente sunt mai apropiate. Dacă diferența dintre ν_1 și ν_2 este mare, frecvența bătăilor este ridicată, iar amplitudinea $a(t)$ variază foarte repede în timp, astfel încât fenomenul de bătăi nu mai poate fi pus în evidență experimental.

Ilustrăm fenomenul de bătăi pentru $\nu_1 = 60$ Hz și $\nu_2 = 70$ Hz, pentru care $\nu_b = 10$ Hz.

În cazul particular în care $A_1 = A_2 = A_0$, $\varphi_1 = \varphi_2$ din relația (6.15) obținem:

$$a(t) = \sqrt{2A_0^2 + 2A_0^2 \cos \varepsilon t} = \sqrt{2A_0^2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\varepsilon t}{2}} = 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \quad (6.19)$$



În acest caz din (6.14) rezultă:

$$x = \text{Re } z = a(t) \cos[\omega t + \varphi(t)] = 2 A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi(t) \right] \quad (6.20)$$

Relația (6.20) evidențiază modularea amplitudinii $2 A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$. Fenomenul de bătăi se poate pune în evidență cu ajutorul a două diapazoane de frecvențe puțin diferite. Sunetele provenind de la vibrațiile celor două diapazoane se compun și dau naștere la fenomenul de bătăi: se aude un sunet a cărui intensitate crește și scade periodic. Fenomenul de bătăi are aplicații numeroase în acustică și în electronică. În electronică se construiesc receptoare heterodină în care oscilațiile electrice primite de la circuitul antenei ($\nu = 10^6 \text{ Hz}$) se suprapun cu oscilațiile unui oscilator local cu frecvența apropiată ($\nu = 9,9 \cdot 10^5 \text{ Hz}$) și dau în circuitul unui telefon bătăi de frecvență $(10^6 - 9,9 \cdot 10^5) \text{ Hz} = 10^4 \text{ Hz}$, cu care vibrează membrana telefonului. Vibrațiile membranei cu această frecvență sunt percepute de ureche.

6.3. Compunerea oscilațiilor armonice perpendiculare de aceeași pulsație

Considerăm o particulă care se mișcă în planul xy sub acțiunea a două oscilații armonice perpendiculare de aceeași pulsație.

$$x = A \cos \omega t \quad (6.21)$$

$$y = B \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.22)$$

Pentru a obține traiectoria, eliminăm timpul din cele două relații:

$$\frac{x}{A} = \cos \omega t \quad (6.23)$$

$$\frac{y}{B} = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi = \frac{x}{A} \cos \varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi \Rightarrow \quad (6.24)$$

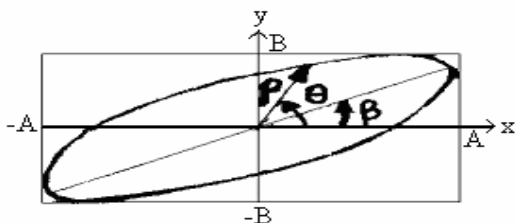
$$\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \varphi = - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi \quad (6.25)$$

Ridicând la pătrat relația (6.25) obținem:

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi + \frac{x^2}{A^2} \cos^2 \varphi = \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) \sin^2 \varphi \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (6.26)$$

Aceasta este ecuația unei elipse înscrise într-un dreptunghi de laturi $2A$ și $2B$. Oscilația descrisă de ecuația (6.26) este o oscilație polarizată eliptică.



Pentru a obține unghiul β format de axa mare a elipsei cu axa Ox , exprimăm x și y în coordonate polare (ρ, θ) :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned} \quad (6.27)$$

Înlocuind (6.27) în (6.26) obținem:

$$A^2 \rho^2 \sin^2 \theta + B^2 \rho^2 \cos^2 \theta - 2AB \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi = A^2 B^2 \sin^2 \varphi \quad \Rightarrow$$

$$\rho^2 = \frac{A^2 B^2 \sin^2 \varphi}{A^2 \sin^2 \theta + B^2 \cos^2 \theta - AB \sin 2\theta \cos \varphi} \quad (6.28)$$

Deoarece în lungul axei mari ρ are valoarea maximă, rezultă că unghiul β corespunde anulării derivatei numitorului din relația (6.28).

$$\frac{d\rho^2}{d\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2A^2 \sin \theta \cos \theta - 2B^2 \cos \theta \sin \theta - 2AB \cos 2\theta \cos \varphi = 0$$

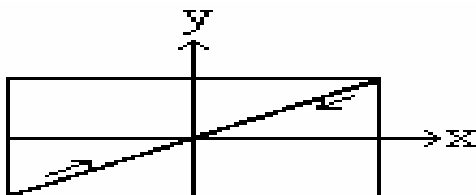
$$\Rightarrow \quad (A^2 - B^2) \sin 2\beta = 2AB \cos 2\beta \cos \varphi \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2AB \cos \varphi}{A^2 - B^2} \quad (6.29)$$

Analizăm câteva cazuri particulare.

a) Dacă $\varphi = 2k\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), atunci oscilațiile sunt în concordanță de fază, iar relația (6.26) se reduce la forma:

$$\frac{x}{A} - \frac{y}{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{B}{A} x \quad (6.30)$$

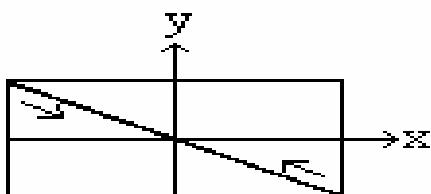


care este ecuația unei drepte ce trece prin origine și este situată în cadranele I și III. Oscilația este polarizată liniar. Se poate arăta că orice mișcare armonică liniară se poate descompune în două mișcări oscilatorii armonice în concordanță de fază, pe direcții perpendiculare.

b) Dacă $\varphi = (2k + 1)\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), atunci oscilațiile sunt în opозиție de fază, iar relația (6.26) devine:

$$y = -\frac{B}{A} x \quad (6.31)$$

care reprezintă cealaltă diagonală a dreptunghiului. Oscilația este polarizată liniar.



Se poate arăta că o mișcare oscilatorie armonică liniară se poate descompune în două mișcări oscilatorii armonice în opoziție de fază, pe direcții perpendiculare.

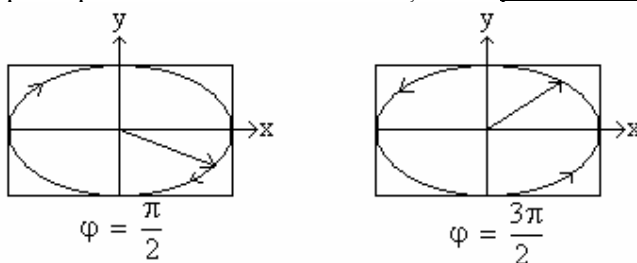
c) Dacă $\varphi = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, ($k = 0, 1, 2, \dots$),

atunci oscilațiile sunt în cuadratură de fază, iar

relația (6.26) devine:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (6.32)$$

care reprezintă o elipsă raportată la axele sale. Oscilația este polarizată eliptic.



Pentru $k = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oscilațiile componente sunt descrise de relațiile:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -B \sin \omega t \quad (6.33)$$

iar punctul material se mișcă pe traiectorie în sensul acelor de ceasornic.

Pentru $k = 1$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ oscilațiile componente sunt descrise de relațiile:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = B \sin \omega t \quad (6.34)$$

iar punctul material se mișcă pe traiectorie în sens antiorar.

În general, pentru k par oscilația rezultantă este polarizată eliptic drept, iar pentru k impar oscilația este polarizată eliptic stâng.

În particular, dacă $A = B$, elipsa devine un cerc:

$$x^2 + y^2 = A^2 \quad (6.35)$$

6.4. Compunerea a două oscilații circulare de aceeași pulsație și amplitudine, polarizate în sensuri contrare

Prin compunerea unei oscilații polarizate drept

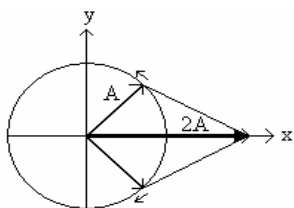
$$x_1 = A \cos \omega t, \quad y_1 = -A \sin \omega t \quad (6.36)$$

cu o oscilație polarizată stâng

$$x_2 = A \cos \omega t, \quad y_2 = A \sin \omega t \quad (6.37)$$

se obține o oscilație liniară cu pulsația egală cu pulsația oscilațiilor componente și cu amplitudinea dublă.

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos \omega t, \quad y = y_1 + y_2 = 0 \quad (6.38)$$



Rezultă că o oscilație polarizată liniar este echivalentă cu două oscilații circulare, polarizate în sensuri contrare.

Acest rezultat este util în studiul rezonanței magnetice nucleare.

6.5. Compunerea oscilațiilor armonice perpendiculare de pulsații diferite

Considerăm două oscilații armonice perpendiculare de pulsații diferite:

$$x = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (6.39)$$

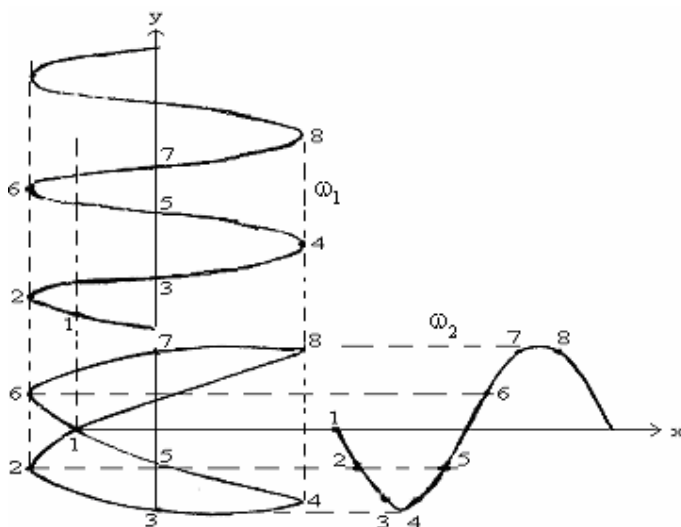
$$y = B \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Prin compunerea lor se obține o mișcare a cărei traiectorie este cuprinsă în dreptunghiul $-A \leq x \leq A$, $-B \leq y \leq B$.

Dacă pulsațiile sunt proporționale cu numere întregi, astfel ca raportul lor să fie un număr rațional (raport de numere întregi)

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = n \in \mathbb{Q} \quad (6.40)$$

atunci există o perioadă T_0 , cel mai mic multiplu comun al perioadelor fiecărei mișcări componente, așa încât mișcarea rezultantă este periodică, iar traiectoria particulei este o curbă închisă, numită curbă Lissajous. Relația (6.40) se obține astfel:



$$A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = A \cos[\omega_1 (t + T_0) + \varphi_1] = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + 2n_1 \pi)$$

$$\omega_1 T_0 = 2n_1 \pi$$

$$B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = B \cos[\omega_2 (t + T_0) + \varphi_2] = B \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + 2n_2 \pi)$$

$$\omega_2 T_0 = 2n_2 \pi$$

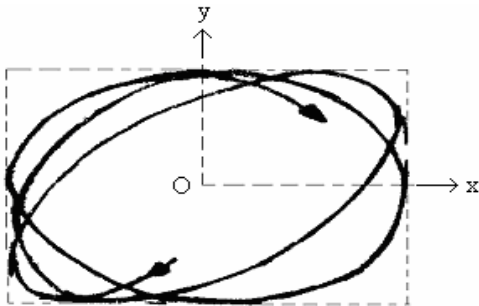
$$\Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Traectoria mișcării depinde de raportul pulsațiilor și de defazajul φ dintre oscilațiile componente. Ca exemplu considerăm traectoria corespunzătoare cazului $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Figurile lui Lissajous sunt utilizate în electronică pentru determinarea frecvențelor cu ajutorul osciloscopului. Un semnal contribuie la deflexia orizontală, iar celălalt la deflexia verticală. Raportul pulsațiilor se determină ca raportul dintre numărul punctelor de intersecție a traectoriei cu o dreaptă verticală și una orizontală.

Cazul în care pulsațiile vibrațiilor componente diferă foarte puțin între ele poate fi redus la compunerea a două vibrații cu aceeași pulsație, dar cu defazajul φ dintre ele variind lent în timp. Astfel, pentru $\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon$ obținem:

$$x = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad y = B \cos(\omega_1 t + \varepsilon t + \varphi_2), \quad \varphi = \varepsilon t + \varphi_2 - \varphi_1$$



Dacă pulsațiile nu sunt proporționale cu numere întregi, atunci mișcarea nu mai poate fi periodică, iar traectoria este o curbă deschisă care acoperă întreg dreptunghiul

$$-A \leq x \leq A, \quad -B \leq y \leq B.$$

În mod asemănător pot fi compuse trei oscilații armonice perpendiculare de pulsații diferite.

7. Descompunerea oscilațiilor complexe

7.1. Descompunerea oscilațiilor periodice (analiza armonică)

O oscilație periodică complexă (nearmonică) poate fi reprezentată printr-o suprapunere de oscilații armonice. Astfel, mărimea fizică periodică

$$x(t) = x(t + T)$$

se poate exprima sub forma unei serii Fourier

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega_1 t + b_n \sin n \omega_1 t) \quad (7.1)$$

unde:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \quad (7.2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n \omega_1 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n \omega_1 t dt \quad (7.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n \omega_1 t \, dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n \omega_1 t \, dt \quad (7.4)$$

iar $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ este perioada funcției $x(t)$. S-a ales $\frac{a_0}{2}$ și nu a_0 pentru ca a_0 să aibă aceeași formă ca și a_n .

Constanta $\frac{a_0}{2}$ este termenul de ordinul zero ($n = 0$), $a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t$ este termenul de ordinul întâi, care are frecvența cea mai mică ν_1 numită frecvența fundamentală, $a_2 \cos 2 \omega_1 t + b_2 \sin 2 \omega_1 t$ este termenul de ordinul doi și corespunde frecvenței $\nu_2 = 2 \nu_1$ și așa mai departe, termenul de ordinul n corespunzând frecvenței $\nu_n = n \nu_1$. Termenul de ordinul întâi reprezintă oscilația sau armonica fundamentală, iar termenii de ordinul doi, trei, patru etc. reprezintă armonicile de ordin superior.

Operația de descompunere a unei funcții periodice oarecare în armonice se numește analiză armonică și este folosită ca mijloc de cercetare în acustică și electronică. Evidențierea fizică a armonicilor superioare în cazul semnalelor electrice, acustice, vibratorii arată că dezvoltarea Fourier are o fundamentare materială.

Coeficientul a_0 se obține prin integrarea relației (7.1) de la 0 la T sau de la $-\frac{T}{2}$ la $\frac{T}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t) \, dt &= \frac{a_0}{2} \int_0^T dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \int_0^T \cos n \omega_1 t \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \int_0^T \sin n \omega_1 t \, dt = \\ &= \frac{a_0}{2} T + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n \omega_1} \left[\sin n \frac{2\pi}{T} \cdot T - \sin n \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right] - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{n \omega_1} \left[\cos n \frac{2\pi}{T} \cdot T - \cos n \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right] = \frac{a_0}{2} T \quad \Rightarrow \\ a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \, dt \end{aligned}$$

Astfel, într-o perioadă T , pentru $n \neq 0$, $\sin n \omega_1 t$ și $\cos n \omega_1 t$ iau un număr egal de valori negative și pozitive, integralele din acestea fiind nule.

Coeficientul a_n se obține înmulțind relația (7.1) cu $\cos m \omega_1 t$ și integrând de la 0 la T :

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t) \cos m \omega_1 t \, dt &= \frac{a_0}{2} \int_0^T \cos m \omega_1 t \, dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos m \omega_1 t \cos n \omega_1 t \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \cos m \omega_1 t \sin n \omega_1 t \, dt \\ \int_0^T x(t) \cos m \omega_1 t \, dt &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \frac{\cos(m+n)\omega_1 t + \cos(m-n)\omega_1 t}{2} \, dt + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \frac{\sin(n+m)\omega_1 t + \sin(n-m)\omega_1 t}{2} dt$$

Pentru $m \neq n$ integralele din membrul drept sunt nule (se reduc la cazul anterior cu $n' = m - n \neq 0$, $n'' = m + n \neq 0$).

Pentru $m = n$ rezultă:

$$\int_0^T x(t) \cos n \omega_1 t dt = a_n \int_0^T \frac{dt}{2} = \frac{T}{2} a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n \omega_1 t dt$$

Coeficientul b_n se obține înmulțind relația (7.1) cu $\sin m \omega_1 t$ și integrând de la 0 la T :

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t) \sin m \omega_1 t dt &= \frac{a_0}{2} \int_0^T \sin m \omega_1 t dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \sin m \omega_1 t \cos n \omega_1 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \sin m \omega_1 t \sin n \omega_1 t dt \\ \int_0^T x(t) \sin m \omega_1 t dt &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \frac{\sin(m+n)\omega_1 t + \sin(m-n)\omega_1 t}{2} dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \frac{\cos(m-n)\omega_1 t - \cos(m+n)\omega_1 t}{2} dt \end{aligned}$$

Pentru $m \neq n$ integralele din membrul drept sunt nule, iar pentru $m = n$ rezultă:

$$\int_0^T x(t) \sin n \omega_1 t dt = b_n \int_0^T \frac{dt}{2} = \frac{T}{2} b_n \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n \omega_1 t dt$$

Astfel oscilația periodică nearmonică $x(t)$ se poate exprima cu ajutorul funcțiilor sistemului ortogonal trigonometric.

$$\left(\int_0^T \sin m \omega_1 t \cos n \omega_1 t dt = 0 \text{ pentru orice } n \text{ sau } m \right).$$

Seria Fourier este convergentă, deoarece pentru $n \rightarrow \infty$ coeficienții a_n și b_n devin din ce în ce mai mici. În cazul în care seria Fourier este rapid convergentă, este suficient să ne limităm la primii trei, patru termeni ai seriei.

De multe ori se utilizează forma complexă a seriei Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i n \omega_1 t} \quad (7.5)$$

unde:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i n \omega_1 t} dt \quad (7.6)$$

Arătăm că relația (7.5) este identică cu relația (7.1).

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) (\cos n \omega_1 t - i \sin n \omega_1 t) dt \quad \underline{(7.3), (7.4)} \quad \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \quad (7.7)$$

$$C_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) (\cos n \omega_1 t + i \sin n \omega_1 t) dt = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) \quad (7.8)$$

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \frac{a_0}{2} \quad (7.9)$$

Astfel relația (7.5) devine:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i n \omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-i n \omega_1 t} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - i b_n)(\cos n \omega_1 t + i \sin n \omega_1 t) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + i b_n)(\cos n \omega_1 t - i \sin n \omega_1 t) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n \cos n \omega_1 t + i a_n \sin n \omega_1 t - i b_n \cos n \omega_1 t + b_n \sin n \omega_1 t + \\ &+ a_n \cos n \omega_1 t - i a_n \sin n \omega_1 t + i b_n \cos n \omega_1 t + b_n \sin n \omega_1 t) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega_1 t + b_n \sin n \omega_1 t) \quad \equiv (7.1) \end{aligned}$$

7.2. Descompunerea semnalelor neperiodice

O funcție neperiodică poate fi privită ca un caz limită al unei funcții periodice cu perioada infinită. Pentru $T \rightarrow \infty$, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ devine infinitesimal, $\omega_1 \rightarrow d\omega$, iar $n \omega_1 = \omega$ devine o variabilă continuă, astfel că suma din relația (7.5) se transformă în integrală.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \right) e^{i2\pi\nu t} d\nu \end{aligned}$$

Dacă notăm:

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad (7.10)$$

atunci:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \quad (7.11)$$

$X(\nu)$ din (7.10) și $x(t)$ din (7.11) se numesc integrale Fourier. Ele formează o pereche de transformate Fourier (una este transformata Fourier a celeilalte).

$X(\nu)$ descrie un fenomen fizic în domeniul amplitudine-frecvență (reprezentare în domeniul frecvenței), iar $x(t)$ descrie același fenomen în domeniul amplitudine-timp (reprezentare temporală).

Putem scrie relația (7.11) astfel:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \right) e^{i2\pi\nu t} d\nu = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi\nu t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi\nu t) dt \right) \cdot (\cos 2\pi\nu t + i \sin 2\pi\nu t) d\nu \\ \Rightarrow X(t) = \operatorname{Re} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi\nu t) dt \right) \cos(2\pi\nu t) d\nu + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi\nu t) dt \right) \sin(2\pi\nu t) d\nu = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt \right) \cos \omega t d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \right) \sin \omega t d\omega \end{aligned}$$

Deoarece în raport cu ω integranții $\cos^2 \omega t$ și $\sin^2 \omega t$ sunt funcții pare, putem scrie:

$$X(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt \right) \cos \omega t d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \right) \sin \omega t d\omega$$

Notând:

$$\boxed{A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt} \quad , \quad \boxed{B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt} \quad (7.12)$$

rezultă:

$$X(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (7.13)$$

care are aceeași formă ca relația (7.1).

Din relația (7.11) obținem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \right] dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i2\pi\nu t} dt \right] d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) X^*(\nu) d\nu \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu \quad (7.14)$$

(7.14) este formula lui Parseval pentru semnale neperiodice.

Această formulă are semnificația că energia unui semnal în domeniul temporal este egală cu energia semnalului în domeniul frecvenței. În practică intervin numai frecvențe pozitive și deci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = 2 \int_0^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu \quad (7.15)$$

deoarece $|X(\nu)|^2$ este o funcție pară de ν .

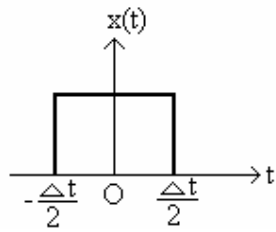
O condiție suficientă pentru ca transformata Fourier a lui $x(t)$ să existe este ca integrala $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$ să fie finită, adică $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$.

7.3. Puls dreptunghiular în timp

Un puls dreptunghiular în timp este descris de funcția:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A_0}{\Delta t}, & t \in \left[-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2} \right] \\ 0, & \text{rest} \end{cases} \quad (7.16)$$

care are următoarea reprezentare grafică:



Din relația (7.10) rezultă:

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt =$$

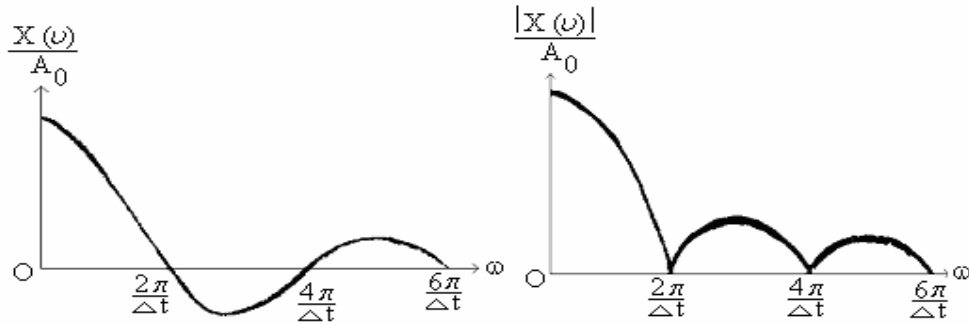
$$= \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \frac{A_0}{\Delta t} e^{-i2\pi\nu t} dt =$$

$$= \frac{A_0}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} e^{-i\omega t} dt = \frac{A_0}{-i\omega \Delta t} (\cos \omega t - i \sin \omega t) \Big|_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} =$$

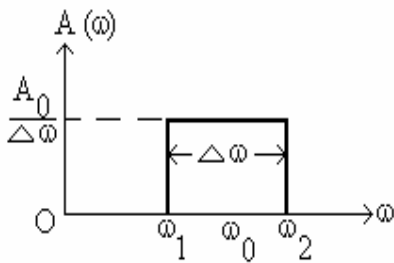
$$= \frac{A_0}{-i\omega \Delta t} \left[\cos \omega \frac{\Delta t}{2} - i \sin \omega \frac{\Delta t}{2} - \cos \left(-\omega \frac{\Delta t}{2} \right) + i \sin \left(-\omega \frac{\Delta t}{2} \right) \right] = \frac{iA_0}{\omega \Delta t} \left(-2i \sin \omega \frac{\Delta t}{2} \right) \Rightarrow$$

$$X(\nu) = A_0 \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}}$$

$X(\omega)$ are o reprezentare grafică de forma:



7.4. Puls dreptunghiular în domeniul pulsației



Presupunem că în relația (7.12) $B(\omega)$ este zero pentru orice ω , iar $A(\omega)$ este de forma:

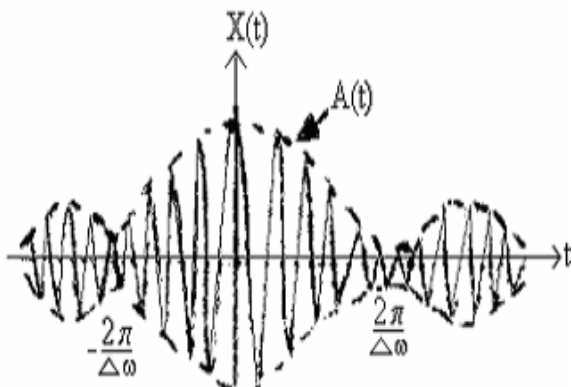
$$A(\omega) = \begin{cases} \frac{A_0}{\Delta \omega}, & \omega \in [\omega_1, \omega_2] \\ 0, & \text{rest} \end{cases}$$

$$\text{Notăm } \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$$

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta \omega}{2}, \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta \omega}{2}$$

Din relația (7.13) obținem:

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{A_0}{\Delta \omega} \cos \omega t \, d\omega = \\ &= \frac{A_0}{\Delta \omega \cdot t} \left[\sin \left(\omega_0 + \frac{\Delta \omega}{2} \right) t - \sin \left(\omega_0 - \frac{\Delta \omega}{2} \right) t \right] = \\ &= \frac{A_0}{\Delta \omega \cdot t} \left[\sin \omega_0 t \cos \frac{\Delta \omega}{2} t + \sin \frac{\Delta \omega}{2} t \cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t \cos \frac{\Delta \omega}{2} t + \sin \frac{\Delta \omega}{2} t \cos \omega_0 t \right] = \\ &= \frac{A_0}{\Delta \omega \cdot t} \cdot 2 \sin \frac{\Delta \omega}{2} t \cos \omega_0 t \\ X(t) &= A_0 \frac{\sin \frac{\Delta \omega t}{2}}{\frac{\Delta \omega t}{2}} \cos \omega_0 t = A(t) \cos \omega_0 t \end{aligned} \quad (7.18)$$



Se obține o oscilație rapidă determinată de $\cos \omega_0 t$, cu amplitudinea lent

variabilă $A(t) = A_0 \frac{\sin \frac{\Delta \omega t}{2}}{\frac{\Delta \omega t}{2}}$. Pentru

$\omega_0 = 0$ rezultă $\cos \omega_0 t = 1$,

$$X(t) = A_0 \frac{\sin \frac{\Delta \omega t}{2}}{\frac{\Delta \omega t}{2}}$$

care are o formă similară relației (7.17).

7.5. Coeficientul Fourier $A(\omega)$ al unui oscilator amortizat ($\delta < \omega_0$)

Elongația oscilatorului amortizat are expresia:

$$x(t) = A_0 e^{-\delta|t|} \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad (7.19)$$

unde:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \quad (7.20)$$

Pentru a simplifica scrierea, alegem $A_0 = 1$, $\varphi = 0$. Astfel:

$$x(t) = e^{-\delta|t|} \cos \omega_1 t \quad (7.21)$$

Calculăm coeficientul Fourier $A(\omega)$ pe baza relației (7.12):

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta|t|} \cos \omega_1 t \cos \omega t \, dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta|t|} [\cos(\omega_1 + \omega)t + \cos(\omega_1 - \omega)t] \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} [\cos(\omega_1 + \omega)t + \cos(\omega_1 - \omega)t] \, dt \quad \Rightarrow \\ A(\omega) &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\delta}{(\omega_1 + \omega)^2 + \delta^2} + \frac{\delta}{(\omega_1 - \omega)^2 + \delta^2} \right] \quad (7.22) \end{aligned}$$

unde am folosit o integrală de tipul

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (7.23)$$

Înlocuind ω_1 din (7.20) în (7.22) obținem:

$$A(\omega) = \frac{\delta}{\pi} \left[\frac{\omega_0^2 - \delta^2 + \omega^2 - 2\omega\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} + \delta^2 + \omega_0^2 - \delta^2 + \omega^2 + 2\omega\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} + \delta^2}{(\omega_0^2 - \delta^2 + \omega^2 + 2\omega\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} + \delta^2)(\omega_0^2 - \delta^2 + \omega^2 - 2\omega\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} + \delta^2)} \right]$$

$$A(\omega) = \frac{2\delta(\omega^2 + \omega_0^2)}{\pi[(\omega^2 + \omega_0^2)^2 - 4\omega^2(\omega_0^2 - \delta^2)]} = \frac{2\delta(\omega^2 + \omega_0^2)}{\pi(\omega^2 + \omega_0^4 + 2\omega^2\omega_0^2 - 4\omega^2\omega_0^2 + 4\omega^2\delta^2)}$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{2\delta(\omega^2 + \omega_0^2)}{\pi[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\delta^2]} \quad (7.24)$$

Vom compara coeficientul $A(\omega)$ cu energia totală medie a unui oscilator forțat. Din relațiile (4.36), (4.17) și (4.9) obținem:

$$\bar{E} = \bar{E}_c + \bar{U} = \frac{m\omega^2 A^2}{4} + \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} = \frac{m(\omega^2 + \omega_0^2)}{4} A^2 \quad \Rightarrow$$

$$\bar{E} = \frac{m(\omega^2 + \omega_0^2)}{4} \cdot \frac{f_0^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2]} \quad (7.25)$$

Făcând raportul:

$$\frac{A(\omega)}{\bar{E}} = \frac{2\delta(\omega^2 + \omega_0^2)}{\pi[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\delta^2]} \cdot \frac{4[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2]}{m(\omega^2 + \omega_0^2)f_0^2} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{A(\omega) = \frac{8\delta}{\pi m f_0^2} \bar{E}} \quad (7.26)$$

Astfel, coeficientul Fourier $A(\omega)$ pentru oscilatorul amortizat este proporțional cu energia totală medie a unui oscilator forțat. Acest rezultat poate fi folosit la modelarea unor fenomene fizice. De exemplu, la emisia radiației luminoase de către un atom are loc dezexcitarea atomului. Se poate presupune că dezexcitarea atomului este descrisă de o relație de forma (7.19) caracteristică unui oscilator amortizat. În acest caz, putem spune că amplitudinea Fourier $A(\omega)$ pentru dezexcitarea spontană este proporțională cu energia medie \bar{E} acumulată de un oscilator forțat.

7.6. Densitatea spectrală de putere

Prin mărime aleatoare (stochastică) se înțelege o mărime care în urma repetării unei experiențe poate lua orice valoare dintr-un număr de valori permise. Mărimea aleatoare este nedeterminată, neputând ști dinainte ce valoare va lua. Astfel mărimile aleatoare au un comportament imprevizibil.

Un fenomen este ergodic dacă media temporală

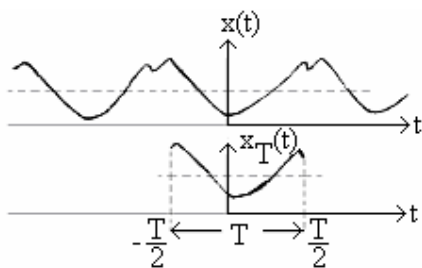
$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (7.27)$$

este egală cu media pe ansamblu

$$\tilde{x}(t_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_1) \quad (7.28)$$

Un proces este staționar dacă media pe ansamblu nu depinde de originea timpului:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i(t_1)}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i(t_1 + t)}{n} \quad (7.29)$$



Pentru a putea studia procesele aleatoare, vom trunchia $x(t)$ pentru un timp T . Notăm mărimea trunchiată cu $x_T(t)$.

Este evident că

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) \quad (7.30)$$

Valoarea pătratică medie a lui $x_T(t)$ este:

$$\overline{x_T^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T^2(t) dt \quad (\text{fig.}) \quad \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt \quad (7.14) \quad \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(\nu)|^2 d\nu \Rightarrow$$

$$\overline{x_T^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} |x_T(\nu)|^2 d\nu \quad (7.31)$$

Luând $T \rightarrow \infty$ rezultă:

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{x_T^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |x_T(\nu)|^2 d\nu \Rightarrow \overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\nu) d\nu \quad (7.32)$$

unde:

$$S_{xx}(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |x_T(\nu)|^2 \quad (7.33)$$

este numită densitate spectrală de putere.

Denumirea provine din electricitate, unde $x(t)$ este intensitatea curentului aleator pe unitatea de rezistență ($P = UI = I^2 R$, $R = 1 \Omega \Rightarrow P = I^2$).

În relația (7.33) avem o energie împărțită la timp într-un interval de frecvență egal cu unitatea, adică o putere corespunzătoare unității intervalului de frecvență.

Pentru o bandă de frecvență cuprinsă între ν_1 și ν_2 , puterea este $\int_{\nu_1}^{\nu_2} S_{xx}(\nu) d\nu$. Astfel membrul drept din (7.32) reprezintă puterea totală medie (valoarea pătratică medie a lui $x(t)$).

7.7. Funcția de corelație. Funcția de autocorelație. Relațiile Wiener-Hincin

Funcția de corelație a două mărimi $x(t)$ și $y(t)$ este definită ca media produsului uneia din mărimi cu cealaltă defazată cu intervalul de timp τ :

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \overline{x(t)y(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{x_T(t)y_T(t+\tau)} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t)y_T(t+\tau) dt \end{aligned} \quad (7.34)$$

În cazul proceselor staționare și ergodice, funcția de corelație depinde numai de τ .

Se definește funcția de autocorelație

$$\begin{aligned} R_{XX}(\tau) &= \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{x_T(t)x_T(t+\tau)} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t)x_T(t+\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)x_T(t+\tau) dt \quad (7.35) \end{aligned}$$

care pentru $\tau = 0$ devine valoarea pătratică medie.

Deoarece funcția de corelație are semnificația unei puteri medii, aceasta va permite caracterizarea mărimilor de energie infinită.

Din relația (7.33) rezultă:

$$\begin{aligned} S_{xx}(\nu) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |x_T(\nu)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} x_T^*(\nu)x_T(\nu) \quad (7.10) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{i2\pi\nu t} dt \int_{-\infty}^{\infty} x_T(s) e^{-i2\pi\nu s} ds = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) x_T(s) e^{i2\pi\nu t} e^{-i2\pi\nu s} dt \right] ds \end{aligned}$$

La integrarea după s , t este constant și deci pentru $s = t + \tau$ rezultă $ds = d\tau$. Introducem $s = t + \tau$ pentru a face să apară funcția de autocorelație:

$$\begin{aligned} S_{xx}(\nu) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) x_T(t+\tau) e^{i2\pi\nu t} e^{-i2\pi\nu(t+\tau)} dt \right] d\tau = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) x_T(t+\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} dt \right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) x_T(t+\tau) dt \right] e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \end{aligned}$$

Paranteza pătrată reprezintă $R_{XX}(\tau)$ din (7.35). Rezultă relațiile lui Wiener-Hincin:

$$S_{XX}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \quad (7.36)$$

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu \quad (7.37)$$

Astfel densitatea spectrală de putere $S_{XX}(\nu)$ și funcția de autocorelație $R_{XX}(\tau)$ formează o pereche Fourier.


Se definește coeficientul de corelație

$$\sigma_{xx}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau)}{R_{xx}(0)} \quad (7.38)$$

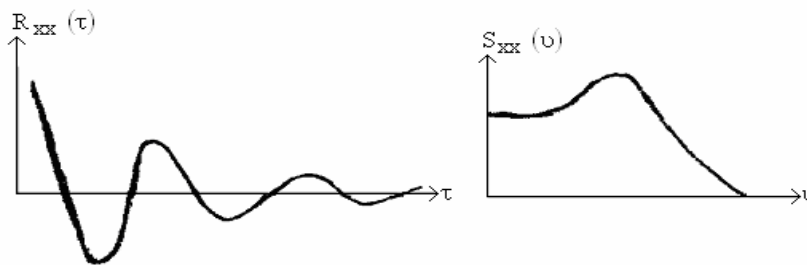
unde $R_{xx}(0)$ este valoarea pătratică medie a lui $x(t)$.

(t) O mărime x  poate fi obținută prin suprapunerea unui semnal

e (t)  cu un zgomot $n(t)$ 

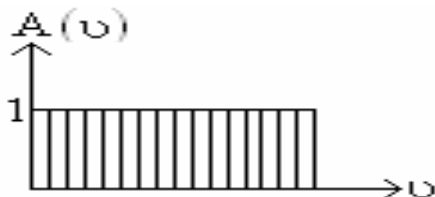
Mărimea $x(t+\tau)$  se înmulțește cu $x(t)$ și se mediază pentru

diferite valori ale lui τ pentru a obține $R_{xx}(\tau)$. Luând transformata Fourier a lui $R_{xx}(\tau)$ se obține $S_{xx}(\nu)$.



7.8. Zgomotul alb

Pentru un semnal ideal al cărui spectru este constant în amplitudine și continuu în funcție



de frecvență, puterea semnalului este infinită. Acest semnal este numit zgomot alb, prin analogie cu lumina albă, deși în cazul luminii albe avem aceeași putere pe unitatea intervalului de lungimi de undă și nu pe unitatea intervalului de frecvență, ca în cazul zgomotului alb.

Prin definiție, densitatea spectrală a zgomotului alb este constantă:

$$S_{xx}(\nu) = a = \text{const.} \quad (7.39)$$

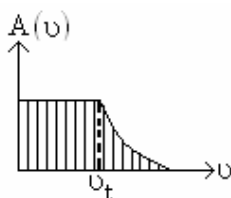
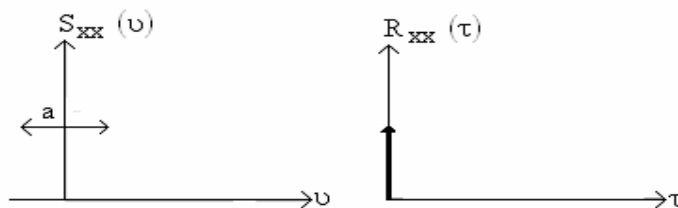
Funcția de autocorelație a zgomotului alb se obține din relațiile (7.37) și (7.39):

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu = a \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu\tau} d\nu \Rightarrow$$

$$R_{xx}(\tau) = a \delta(\tau) \quad (7.40)$$

unde $\delta(\tau)$ este funcția Dirac.

$S_{XX}(\nu)$ și $R_{XX}(\tau)$ au următoarele reprezentări grafice:



În practică puterea semnalului este finită, deoarece există o frecvență de tăiere după care amplitudinea semnalului scade la zero.

Zgomotul alb este furnizat de generatoare electronice utilizate în metodologia de identificare.

7.9. Funcția de autocorelație în cazul oscilațiilor forțate

Legătura dintre densitățile spectrale de putere ale excitației $F(t)$ și ale răspunsului $x(t)$ este dată de relația:

$$S_{XX}(\omega) = |\alpha(\omega)|^2 S_{FF}(\omega) \quad (7.41)$$

unde $\alpha(\omega)$ este funcția de transfer a oscilatorului forțat:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i 2 \delta \omega} \quad (7.42)$$

care poate fi determinată analitic sau experimental (se determină $|\alpha(\omega)|$). Dacă presupunem că forța excitatoare este caracterizată de un zgomot alb, atunci:

$$S_{FF}(\omega) = A = \text{const.} \quad (7.43)$$

și deci:

$$S_{XX}(\omega) = \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2} \quad (7.44)$$

Transformata Fourier a lui $S_{XX}(\omega)$ dă funcția de autocorelație $R_{XX}(\tau)$:

$$R_{XX}(\tau) = C e^{-\delta|\tau|} \left[\cos \omega_1 \tau + \frac{\delta}{\omega_1} \sin \omega_1 |\tau| \right] \quad (7.45)$$

unde:

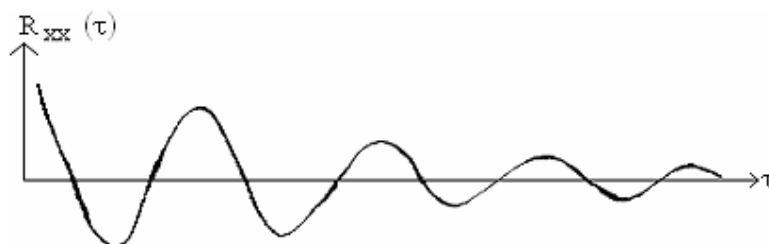
$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (7.46)$$

iar C este o constantă ce depinde de δ .

Dacă $\delta / \omega_1 \ll 1$ atunci:

$$R_{XX}(\tau) = C e^{-\delta|\tau|} \cos \omega_1 \tau \quad (7.47)$$

care are următoarea reprezentare grafică:



8. Unde mecanice (elastice)

8.1. Introducere

Mediile elastice sunt medii continue formate din particule materiale care interacționează între ele. Dacă la un moment dat o particulă începe să oscileze, după ea vor intra în oscilație și particulele vecine și astfel oscilația se propagă din aproape în aproape prin mediu, datorită forțelor de interacțiune elastice dintre particule.

Propagarea unei perturbații printr-un mediu elastic se numește undă elastică. Ca exemplu, considerăm perturbația produsă de o piatră ce cade pe suprafața liniștită a unei ape. Această perturbație se propagă la suprafața apei, în toate direcțiile orizontale, formând unde sub formă de valuri circulare concentrice. O particulă de rumeguș (de lemn) ce plutește pe suprafața apei va executa o mișcare oscilatorie într-un plan vertical, dar nu se va deplasa pe direcțiile orizontale care sunt direcțiile de propagare a undelor elastice. Astfel, în timpul propagării undei nu are loc un transport de substanță. Particulele mediului oscilează în jurul pozițiilor de echilibru, iar perturbația avansează în sensul de propagare a undei.

Spre deosebire de undele electromagnetice, undele elastice nu se propagă în vid. Undele elastice se caracterizează prin transferul de energie mecanică și transformarea energiei cinetice în energie potențială, în timp ce undele electromagnetice transportă energie electrică și magnetică, ce se transformă reciproc una în cealaltă.

Viteza undelor elastice este finită și este o caracteristică a fenomenului de propagare și a mediului și nu trebuie confundată cu viteza de oscilație a particulelor mediului, care depinde în primul rând de caracteristicile mediului și abia după aceea de caracteristicile undei (pulsatie, amplitudine, fază). Din punct de vedere fizic, propagarea undei mecanice depinde de elasticitatea și inerția mediului. Într-adevăr, se constată că viteza de propagare a unei perturbații mecanice se exprimă totdeauna sub forma unei rădăcini pătrate dintr-un parametru care definește rezistența mediului la deformație și un parametru care definește inerția mediului.

În general, mărimea perturbată (poziția unei particule din mediu, viteza acesteia, presiunea, densitatea) se notează cu $\Psi(x, y, z, t)$ și este numită funcție de undă.

Funcția de undă depinde atât de coordonatele spațiale, cât și de timp. Dacă direcția de oscilație a particulelor este paralelă cu direcția de propagare a undei, atunci unda se numește longitudinală, iar dacă direcția de oscilație este perpendiculară pe direcția de propagare, atunci unda se numește transversală. Un mediu este omogen dacă mărimile de material (densitatea ρ , permitivitatea electrică ϵ , permeabilitatea magnetică μ , conductivitatea σ , indicele de refracție n) au aceeași valoare în orice punct al mediului. Mediul este neomogen dacă proprietățile fizice (determinate de valorile mărimilor de material) depind de poziția punctului din mediu.

Mediile anizotrope au proprietăți fizice care variază în raport cu direcția, în timp ce în mediile izotrope nu există direcții privilegiate pentru aceste proprietăți (mărimile de material nu depind de direcție).

Mediile liniare sunt acelea în care este valabil principiul suprapunerii (superpoziției)

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \Psi_i, \text{ în caz contrar mediile fiind } \underline{\text{neliniare}}.$$

În medii dispersive viteza de propagare a perturbației depinde de caracteristicile undei, iar în cele nedisersive este constantă.

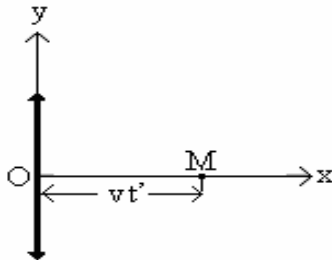
În mediile disipative propagarea undelor se produce cu absorbție de energie, în timp ce în mediile conservative energia totală se conservă.

Caracterul dispersiv sau nedispersiv, conservativ sau disipativ depinde atât de proprietățile mediului, cât și de natura undei (elastică, electromagnetică). Un mediu omogen, izotrop, liniar, nedispersiv și conservativ se numește mediu ideal.

8.2. Ecuția de propagare a undei plane monocromatice

O undă este plană dacă toate particulele situate într-un plan perpendicular pe direcția de propagare a undei oscilează identic.

Considerăm o undă plană care se propagă într-un mediu ideal, de-a lungul axei Ox. Presupunem că sursa de oscilație se află în originea axei și execută oscilații transversale ca în cazul unei coarde elastice.



Dacă alegem ca origine a timpului momentul în care sursa din O începe să oscileze, atunci un punct M începe să oscileze la un timp t' de la producerea oscilației în O, adică punctul M oscilează cu o întârziere de fază față de O.

În cazul oscilațiilor armonice putem scrie:

$$y_O = A \cos \omega t \quad (8.1)$$

$$y_M = A \cos \omega (t - t') = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (8.2)$$

unde v este viteza de propagare a undei. În cazul coardei elastice y are semnificație de elongație. Se constată că funcția y este periodică atât în timp, cu perioada $T = \frac{2\pi}{\omega}$, cât și în spațiu, cu perioada λ numită lungime de undă. Lungimea de undă este definită ca spațiul parcurs de undă în timp de o perioadă și se obține din condiția de periodicitate spațială:

$$\begin{aligned} A \cos \omega \left(t - \frac{x + \lambda}{v} \right) &= A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) - 2\pi \right] \quad \Rightarrow \\ \frac{\omega \lambda}{v} &= 2\pi, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi v}{\omega} \quad \Rightarrow \\ \boxed{\lambda = v \cdot T} & \quad (8.3) \end{aligned}$$

Ecuția undei (8.2) se mai poate scrie și astfel:

$$y_M = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = A \cos (\omega t - kx) = A \cos k(vt - x) =$$

$$= A \operatorname{Re} e^{i(\omega t - k x)} \quad (8.4)$$

unde:

$$\boxed{k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}} \quad (8.5)$$

este mărimea vectorului de undă $\vec{k} = k \vec{u}_k$, \vec{u}_k fiind versorul direcției de propagare.

Argumentul funcției cosinus se numește faza undei:

$$\varphi = \omega t - k x = k(v t - x) \quad (8.6)$$

Suprafața de undă este suprafața pe care faza undei are aceeași valoare la un moment dat, adică reprezintă locul geometric al punctelor care oscilează în fază. Suprafața de undă cea mai îndepărtată de sursă la un moment dat se numește front de undă. La un moment dat ($t = \text{constant}$) faza undei este constantă ($\varphi = \text{constant}$) dacă

$$\boxed{x = \text{constant}} \quad (8.7)$$

care reprezintă ecuația unui plan perpendicular pe direcția de propagare, adică avem o undă plană.

Din condiția ca faza să fie constantă:

$$d\varphi = \omega dt - k dx = k(v dt - dx) = 0$$

rezultă viteza de deplasare a suprafeței de undă, numită viteză de fază, care coincide cu viteza undei:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (8.8)$$

Pentru $dt > 0$ rezultă:

$$dx = v dt > 0$$

adică avem o undă care se deplasează în sensul pozitiv al axei Ox , numită undă progresivă.

Din relația $d\varphi = \omega dt - k dx$ rezultă:

$$\boxed{\omega = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x}, \quad \boxed{k = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_t} \quad (8.9)$$

Astfel pulsația descrie viteza de variație a fazei.

Scriind relația (8.4) pentru același moment de timp, dar pentru două puncte diferite M_1 și M_2 :

$$y_{M_1} = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) = A \cos \left[-2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) \right],$$

$$y_{M_2} = A \cos \left[-2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) \right]$$

obținem diferența de fază:

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad (8.10)$$

unde $\delta = x_2 - x_1$ este diferența de drum geometric. Aceeași relație se puea obține prin diferențierea lui φ din (8.6) la $t = \text{const.}$ și ținând seama de paritatea funcției cosinus. Dacă $\delta = n\lambda$, $n = 0, 1, 2, \dots$, atunci $\Delta \varphi = 2n\pi$ și cele două puncte oscilează în fază,

iar dacă $\delta = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, atunci $\Delta\phi = (2n + 1)\pi$ și punctele M_1 și M_2 oscilează în opoziție de fază.

Relația (8.4) poate fi scrisă sub o formă mai generală:

$$f = A \cos k(vt - x) \quad \Rightarrow \quad \Psi = f[k(vt - x)] \quad (8.11)$$

Prin derivare obținem:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -kf, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k(-kf) = k^2 f, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = kvf, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = k^2 v^2 f$$

$$\frac{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}} = \frac{k^2 v^2 f}{k^2 f} = v^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0} \quad (8.12)$$

Ecuția (8.12) este ecuația de propagare a undelor.

Ecuția (8.12) este echivalentă cu următoarele două ecuații:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Psi = 0 \quad (8.13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Psi = 0 \quad (8.14)$$

Aceste ecuații sunt satisfăcute dacă:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (8.15)$$

sau:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (8.17)$$

unde $y = vt$.

Ecuția (8.16) este satisfăcută de o funcție de forma (8.11):

$$\Psi_p = f[k(y - x)] = f[k(vt - x)] \quad (8.18)$$

deoarece:

$$\frac{\partial \Psi_p}{\partial x} = -kf, \quad \frac{\partial \Psi_p}{\partial y} = kf, \quad -kf = -(kf)$$

Ecuția (8.17) este satisfăcută de funcția:

$$\Psi_r = g[k(y + x)] = g[k(vt + x)] \quad (8.19)$$

întrucât x și y apar în (8.17) în mod simetric.

Ψ_p din (8.18) și Ψ_r din (8.19) sunt soluții particulare ale ecuației (8.12).

Soluția generală a ecuației de propagare a undelor se obține folosind principiul superpoziției:

$$\Psi = \Psi_p + \Psi_r = f[k(vt - x)] + g[k(vt + x)] \quad (8.20)$$

Soluția Ψ_p corespunde unei progresive, iar soluția Ψ_r corespunde unei regresive, care se propagă spre stânga.

Faza unei regresive este:

$$\varphi = k(vt + x) \quad (8.21)$$

Din condiția $d\varphi = 0$ rezultă viteza de fază a unei regresive:

$$v = -\frac{dx}{dt} \quad (8.22)$$

care pentru $dt > 0$ conduce la $dx = -v dt < 0$, explicând astfel denumirea de undă regresivă.

În cazul în care direcția de propagare a unei nu coincide cu nici una dintre axele de coordonate, ecuația de propagare a unei are forma:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (8.23)$$

sau:

$$\Delta \Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (8.24)$$

unde:

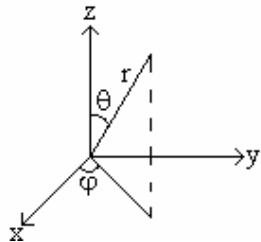
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8.25)$$

se numește laplacion, iar $\Psi(x, y, z, t)$ este funcția de undă.

8.3. Unde sferice

Soluția ecuației (8.24) depinde de condițiile inițiale, iar forma suprafeței de undă depinde de forma sursei de perturbație și de proprietățile mediului elastic.

Într-un mediu omogen și izotrop, o perturbație produsă de o sursă punctuală se propagă sub formă de unde sferice. În acest caz perturbația se propagă cu aceeași viteză în toate direcțiile, astfel că frontul de undă este o sferă cu centrul în sursa punctuală.



Datorită simetriei sferice, este mai corect să lucrăm în coordonate sferice:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (8.26)$$

În coordonate sferice ecuația (8.24) se scrie astfel:

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (8.27)$$

Pentru un mediu omogen și izotrop, Ψ nu depinde de θ și φ . Ecuația de propagare a undelor sferice devine:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Psi) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (8.28)$$

sau:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Psi) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \Psi) = 0 \quad (8.29)$$

Această ecuație are aceeași formă ca (8.12).

Notând:

$$\Psi_S = r \Psi \quad (8.30)$$

rezultă ecuația:

$$\frac{\partial^2 \Psi_S}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi_S}{\partial t^2} = 0 \quad (8.31)$$

Soluția acestei ecuații este de forma (8.20):

$$\Psi_S = f [k (v t - r)] + g [k (v t + r)] \quad (8.32)$$

Înlocuind Ψ_S din (8.30) obținem:

$$\Psi = \frac{1}{r} f [k (v t - r)] + \frac{1}{r} g [k (v t + r)] \quad (8.33)$$

Soluția este divergentă pentru $r = 0$, deoarece se presupune că în acest punct se află sursa de perturbație.

La un moment dat faza undei

$$\varphi = k (v t \mp r) \quad (8.34)$$

este constantă dacă:

$$r = \text{constant} \quad (8.35)$$

care reprezintă ecuația unei sfere cu centrul în sursă.

Din condiția ca faza să fie constantă

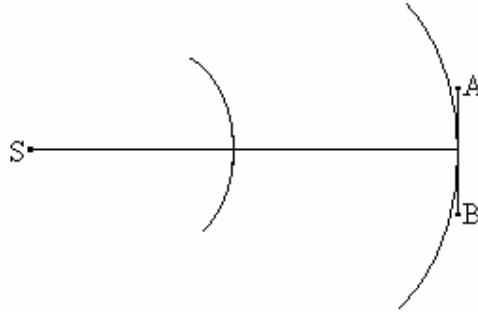
$$d \varphi = k (v dt \mp dr) = 0$$

rezultă viteza de fază:

$$v = \pm \frac{dr}{dt} \quad (8.36)$$

Pentru unda progresivă $\Psi_p = \frac{1}{r} f [k (v t - r)]$, $\varphi = k (v t - r)$, $v = \frac{dr}{dt}$, iar pentru unda regresivă $\Psi_r = \frac{1}{r} g [k (v t + r)]$, $\varphi = k (v t + r)$, $v = - \frac{dr}{dt}$. Unda progresivă se propagă de la sursă spre exterior, iar unda regresivă se propagă în sens invers.

La distanțe foarte mari față de sursă, undele sferice pot fi considerate ca unde plane pentru un domeniu $A B$ de dimensiuni mici față de distanța până la sursa S . În acest caz suprafața de undă are o rază de curbură foarte mare și devine un plan perpendicular pe direcția de propagare.



8.4. Propagarea perturbațiilor longitudinale

Undele longitudinale se pot propaga atât în solide, cât și în lichide și gaze, în timp ce undele transversale se pot propaga numai în solide sau la suprafața lichidelor, deoarece în fluide nu există forțe elastice la forfecare, adică forțe proporționale cu distanța de alunecare a unui strat față de altul, care să transmită oscilațiile transversale.

Vom analiza cazul undelor acustice care se propagă într-un gaz. Fenomenul de propagare a undelor longitudinale poate fi descris cu ajutorul a două funcții de undă: presiunea acustică și viteza de oscilație a particulei în jurul poziției sale de echilibru.

8.4.1. Presiunea acustică

La echilibru, când în mediu nu se propagă unde acustice, presiunea locală este cea statică p_0 . Când în mediu se propagă unde acustice, într-un punct din câmpul acustic presiunea va oscila armonhic între o valoare maximă și una minimă. Presiunea dinamică p_d este diferența dintre presiunea totală și presiunea statică p_0 :

$$p_d = p - p_0 \quad (8.37)$$

Presiunea dinamică p_d este o presiune suplimentară (suprapresiune), care se datorează efectului ondulatoriu acustic și de aceea se numește presiune acustică.

Deoarece presiunea acustică p_d este mult mai mică decât presiunea de echilibru p_0 , rezultă că o astfel de inegalitate este valabilă și pentru densitățile corespunzătoare:

$$p = p_0 + p_d , \quad \rho = \rho_0 + \rho_d , \quad p_d \ll p_0 , \quad \rho_d \ll \rho_0 \quad (8.38)$$

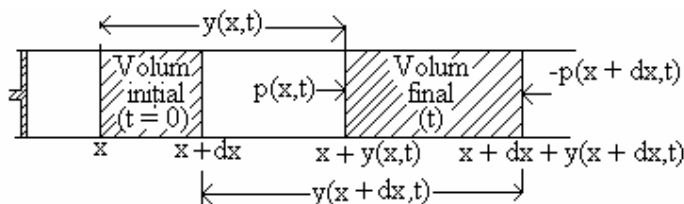
Dezvoltăm presiunea totală $p(\rho_0 + \rho_d)$ în serie Taylor în jurul valorii de echilibru $p(\rho_0)$:

$$\begin{aligned} p &= p(\rho) = p(\rho_0 + \rho_d) = p(\rho_0) + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \rho_d = \\ &= p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \rho_d \quad \underline{(8.38)} \quad p_0 + p_d \end{aligned}$$

Rezultă că presiunea suplimentară produsă de oscilațiile sonore este proporțională cu densitatea suplimentară ρ_d :

$$\boxed{p_d = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \rho_d} \quad (8.39)$$

Considerăm un gaz ideal într-un cilindru cu piston. Dacă pistonul execută o mișcare oscilatorie în jurul poziției sale de echilibru, atunci în gaz apare o undă longitudinală.



Frontul de undă plan este perpendicular pe direcția x și se propagă în sensul pozitiv al axei Ox . Presupunem că aria frontului este egală cu unitatea și că la momentul inițial ($t = 0$) acesta se află în poziția x , unde gazul nu este perturbat. Sub acțiunea sunetului, gazul din x se deplasează cu $y(x, t)$ așa încât la timpul t va ocupa o nouă poziție $x + y(x, t)$. Moleculele de gaz care inițial se găseau la o distanță $x + dx$ se vor deplasa cu $y(x + dx, t)$ și se vor găsi la timpul t la distanța $x + dx + y(x + dx, t)$. Deoarece secțiunea tubului cilindric este egală cu unitatea, volumul ocupat inițial de gaz între x și $x + dx$ este dx , iar volumul final va fi:

$$x + dx + y(x + dx, t) - x - y(x, t) = dx + \frac{\partial y}{\partial x} dx,$$

dx fiind foarte mic.

În noul volum, considerat mai mare decât cel inițial, există aceeași cantitate de gaz ca și în volumul inițial neperturbat:

$$\begin{aligned} dm &= \rho_0 dx = \rho \left(dx + \frac{\partial y}{\partial x} dx \right) \Rightarrow \rho_0 = \left(1 + \frac{\partial y}{\partial x} \right) \quad (8.38) \\ &= (\rho_0 + \rho_d) \left(1 + \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \rho_0 + \rho_d + \rho_0 \frac{\partial y}{\partial x} + \rho_d \frac{\partial y}{\partial x} \cong \rho_0 + \rho_d + \rho_0 \frac{\partial y}{\partial x} \end{aligned}$$

Am neglijat termenul $\rho_d \frac{\partial y}{\partial x}$ deoarece $\rho_d \ll \rho_0$. Rezultă:

$$\rho_d = -\rho_0 \frac{\partial y}{\partial x} \quad (8.40)$$

Această relație arată că atunci când gazul se deplasează își schimbă densitatea. Dacă $\partial y / \partial x > 0$ atunci densitatea ρ scade față de ρ_0 .

$$\rho = \rho_0 + \rho_d = \rho_0 - \rho_0 \frac{\partial y}{\partial x} \quad (8.41)$$

Dacă presupunem că deplasarea particulelor de gaz $y(x, t)$ este de forma (8.2):

$$y(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (8.42)$$

atunci viteza particulei este:

$$u = \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (8.43)$$

Din (8.40) și (8.42) rezultă:

$$\frac{\rho_d}{\rho_0} = -\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\omega A}{v} \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (8.44)$$

Folosind (8.43) obținem:

$$\boxed{\frac{\rho_d}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{u}{v}} \quad (8.45)$$

Rezultă că variația relativă a densității unui fluid într-o undă progresivă este egală cu raportul dintre viteza particulelor și viteza undei.

Deformația relativă a volumului de gaz este:

$$\varepsilon = \frac{\left(dx + \frac{\partial y}{\partial x} dx \right) - dx}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (8.46)$$

Din (8.44), (8.45) și (8.46) obținem:

$$\varepsilon = -\frac{\rho_d}{\rho_0} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = -\frac{u}{v}} \quad (8.47)$$

Din această relație rezultă că, pentru unda progresivă, deformația relativă este egală cu rapoartul, cu semn schimbat, dintre viteza particulei și viteza undei. Deformația relativă este maximă acolo unde viteza particulelor $u(x, t)$ este maximă, adică în punctele în care particulele trec prin pozițiile lor de echilibru. Acolo unde viteza particulelor u este în același sens cu sensul de propagare al undei longitudinale avem o regiune de comprimare ($\varepsilon < 0$), iar acolo unde viteza particulelor este în sens opus avem o regiune de rarefiere ($\varepsilon > 0$).

Din relația (8.44) putem determina deformația relativă maximă:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\omega A}{v} = k A = \frac{2\pi}{\lambda} A \quad (8.48)$$

care are ordinul de mărime al raportului dintre amplitudinea de oscilație a particulelor și lungimea de undă.

Din teoria elasticității se știe că efortul unitar, care în cazul nostru are rol de presiune dinamică, are expresia:

$$p_d = \frac{F}{S} = -E \frac{\Delta \ell}{\ell} = -E \frac{\left(dx + \frac{\partial y}{\partial x} dx - dx \right)}{dx} = -E \frac{\partial y}{\partial x} = -E \varepsilon \quad (8.49)$$

semnul minus având semnificația că suprapresiunea p_d se opune deformației relative, în acord cu relațiile (8.39) și (8.40) din care rezultă:

$$p_d = -\rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \quad (8.50)$$

Din (8.49), (8.43) și (8.47) obținem:

$$p_d = -E \left(-\frac{u}{v} \right) = \frac{E u}{v} = -\frac{E \omega A}{v} \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (8.51)$$

$$p_{d_{\max}} = -\frac{E \omega A}{v} = -k A E = -\frac{2\pi}{\lambda} A E \quad (8.52)$$

$$\boxed{p_d = p_{d_{\max}} \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)} \quad (8.53)$$

Relația (8.53) este expresia presiunii acustice momentane.

Se definește presiunea acustică eficace p_{ef} ca rădăcina pătrată a mediei pătratului presiunii acustice momentane p_d în decurs de o perioadă. Din relația (8.53) obținem:

$$p_d^2 = p_{d_{max}}^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad p_{ef} = \sqrt{p_d^2} = \frac{p_{d_{max}}}{\sqrt{2}} \quad (8.54)$$

8.4.2. Viteza sunetului

Asupra elementului de masă dm ce ocupă volumul final acționează o forță rezultantă

$$dF = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t) - p(x + dx, t) \quad (8.55)$$

unde secțiunea S a fost luată egală cu unitatea. Același element de masă ocupă volumul inițial dx în care densitatea gazului este ρ_0 .

Rezultă:

$$\begin{aligned} \rho_0 dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= - \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (8.38) & - \frac{\partial}{\partial x} (p_0 + p_d) dx &= - \frac{\partial p_d}{\partial x} dx \\ \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= - \frac{\partial p_d}{\partial x} \end{aligned} \quad (8.56)$$

Înlocuind p_d din (8.39) obținem:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \frac{\partial p_d}{\partial x} \quad (8.40) & \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \end{aligned} \quad (8.57)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0}} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0} \quad (8.58)$$

Ecuția (8.58) reprezintă ecuația de propagare a undelor sonore în care viteza sunetului este:

$$\boxed{v = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0}}} \quad (8.59)$$

Se constată că viteza de propagare a undelor acustice depinde de densitatea mediului.

Din relațiile (8.49) și (8.56) obținem:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(-E \frac{\partial y}{\partial x} \right) \quad \Rightarrow \quad \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \\ \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\frac{E}{\rho_0}} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0} \end{aligned} \quad (8.60)$$

Din (8.60) rezultă că viteza undelor acustice longitudinale este:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}} \quad (8.61)$$

unde E este modulul de elasticitate.

Din relațiile (8.51), (8.45) și (8.61) obținem:

$$\boxed{p - p_0 = v^2 (\rho - \rho_0)} \quad (8.62)$$

Rezultă că variațiile de presiune în unda sonoră sunt proporționale cu variațiile de densitate, constanta de proporționalitate v^2 fiind pătratul vitezei de propagare a unde.

Din relațiile (8.49), (8.62) și (8.45) rezultă:

$$\boxed{p - p_0 = -E \varepsilon} \quad (8.63)$$

$$p - p_0 = v^2 \frac{u}{v} \rho_0 \Rightarrow \boxed{p - p_0 = \rho_0 u v} \quad (8.64)$$

Astfel variația de presiune este maximă acolo unde deformația ε este maximă și este proporțională cu viteza particulelor.

Considerând că procesul de propagare a sunetului este adiabatic

$$p V^\gamma = \text{const.} \quad (8.65)$$

prin diferențierea ecuației adiabatei obținem:

$$V^\gamma dp + \gamma p V^{\gamma-1} dV = 0 \Rightarrow V dp + \gamma p dV = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}} \quad (8.66)$$

Pentru o masă de gaz constantă, putem scrie:

$$V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow \frac{dV}{d\rho} = -\frac{m}{\rho^2} = -\frac{V\rho}{\rho^2} \Rightarrow \boxed{\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}} \quad (8.67)$$

Înlocuind (8.67) în (8.66) obținem:

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow v^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}} \quad (8.68)$$

sau

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0 V}{\rho_0 V}} = \sqrt{\frac{\gamma n k T}{n m_1}} = \sqrt{\gamma \frac{k T}{m_1}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{N_a m_1}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \quad (8.69)$$

unde am folosit următoarele relații, care sînt valabile în cazul gazului ideal:

$$p_0 = \frac{n}{V} k T, \quad \rho_0 = \frac{n m_1}{V} = \frac{m}{V}, \quad k = \frac{R}{N_a}, \quad M = N_a m_1$$

În aceste relații n este numărul de molecule, m_1 este masa unei molecule, N_a este numărul lui Avogadro, M este masa molară, k este constanta lui Boltzmann, iar R este constanta gazelor perfecte.

Din relația (8.69) rezultă că viteza sunetului în gaze crește cu temperatura gazului.

În aer, la 20°C , $v = 340$ m/s, iar în apă la 20°C , $v = 1480$ m/s.

Din relația:

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

putem scrie:

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho_0}$$

în care Δp și $\Delta \rho$ sunt variații mici ale lui p și ρ .

Înlocuind $\frac{\Delta \rho}{\rho_0}$ din relația (8.45) obținem:

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \gamma \frac{u}{v} \quad (8.70)$$

Din statistica lui Maxwell se știe că viteza cea mai probabilă v_p , viteza medie $\langle v \rangle$ și viteza pătratică medie $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$, numită uneori viteză termică a moleculelor, satisfac inegalitățile:

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} < (\langle v \rangle) = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} < \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (8.71)$$

Din (8.69) și (8.71) rezultă:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} v_p = \sqrt{\frac{\gamma}{3}} \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

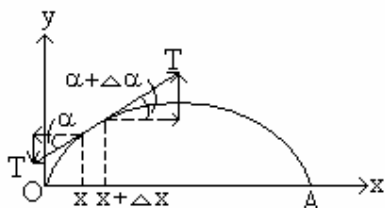
Deoarece $\gamma < 2$, rezultă $v < v_p$, $v < (\langle v \rangle)$, $v < \sqrt{\langle v^2 \rangle}$.

Deci viteza sunetului v este mai mică decât viteza medie a moleculelor gazului în care acesta se propagă.

8.5. Propagarea perturbațiilor transversale

8.5.1. Ecuația de propagare a undelor transversale într-o coardă

Considerăm o coardă omogenă cu densitatea masică $\rho_\ell = \frac{m}{\ell} = \frac{\Delta m}{\Delta x}$, unde m este masa corzii, iar ℓ este lungimea ei. Coarda este fixată la capete și este supusă unei tensiuni. Se consideră că tensiunea în coardă este practic constantă. În starea neperturbată, dar tensionată, coarda OA se află de-a lungul axei Ox .



Vom studia oscilațiile transversale de mică amplitudine ale unui element al corzii, care are în poziția de echilibru lungimea Δx și masa Δm . Presupunem că, datorită unei anumite excitații, coarda ocupă la un moment dat t o poziție diferită de aceea de echilibru. Pentru coarda deformată, direcțiile forțelor de

tensiune T care acționează la capetele elementului de coardă considerat sunt diferite, astfel că asupra elementului va acționa o forță de întindere a cărei componentă pe axa y este:

$$T \sin(\alpha + \Delta \alpha) - T \sin \alpha \quad (8.72)$$

Rezultanta forțelor pe axa Oy tinde să readucă elementul de coardă la echilibru.

Întrucât studiem numai micile oscilații ale corzii vibrante, unghiurile α și $\Delta \alpha$ formate de forțele de tensiune care sunt tangente la curba deplasată în punctele de abscise x , respectiv $x + \Delta x$, cu axa Ox , satisfac condițiile $\alpha \ll 1$ radian, $\alpha + \Delta \alpha \ll 1$ radian.

Pentru unghiuri mici aproximăm sinusul cu tangenta și expresia (8.72) devine:

$$T [\sin(\alpha + \Delta \alpha) - \sin \alpha] \cong T [\operatorname{tg}(\alpha + \Delta \alpha) - \operatorname{tg} \alpha] = T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x + \Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] \quad (8.73)$$

unde $y(x, t)$ este ecuația curbei corespunzătoare corzii deplasate.

Pentru Δx suficient de mic, putem folosi definiția derivatei:

$$\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x + \Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} \cong \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

care provine din dezvoltarea în serie Taylor a funcției $\frac{\partial y}{\partial x}$ la care se neglijează termenii de ordin mai mare ca doi. Astfel expresia (8.73) devine:

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x \quad (8.74)$$

Neglijând greutatea corzii, ecuația de mișcare este:

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x = \Delta m a_y = \rho_\ell \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

sau:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (8.75)$$

ρ_ℓ

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0} \quad (8.76)$$

unde:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_\ell}} \quad (8.77)$$

este viteza de propagare a undei transversale.

Ecuația (8.76) este ecuația de propagare a undelor transversale.

8.5.2. Soluția ecuației de propagare a undelor transversale

Considerăm o coardă vibrantă de lungime ℓ fixată la capete:

$$y(0, t) = 0 \quad (8.78)$$

$$y(\ell, t) = 0 \quad (8.79)$$

care la momentul $t = 0$ se află la distanța $f(x)$ de poziția de echilibru și are viteza inițială $g(x)$:

$$y(x, 0) = f(x) \quad (8.80)$$

$$\left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x) \quad (8.81)$$

Ecuția de propagare a undelor transversale în coardă (8.76) poate fi rezolvată prin metoda separării variabilelor. Se exprimă soluția ecuației ca un produs de două funcții $X(x)$ și $T(t)$ dependente fiecare numai de câte o singură variabilă:

$$y(x, t) = X(x) T(t) \quad (8.82)$$

Impunem ca soluția (8.82) să verifice ecuația (8.76):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = T X'', \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = X T'' \Rightarrow T X'' = \frac{1}{v^2} X T'' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{v^2 T} \quad (8.83)$$

Variabilele x și t fiind independente, membrul stâng al relației (8.83) depinzând numai de x , iar membrul drept numai de t , rezultă că această relație este satisfăcută numai dacă ambii membri ai relației sunt egali cu aceeași constantă, care trebuie să fie negativă pentru a elimina cazurile banale în care soluția este neperiodică. Deci:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{v^2 T} = -k^2 \quad (8.84)$$

Rezultă ecuațiile:

$$X'' + k^2 X = 0 \quad (8.85)$$

$$T'' + k^2 v^2 T = 0 \quad (8.86)$$

Soluțiile acestor două ecuații sunt:

$$X = A_1 \cos kx + B_1 \sin kx \quad (8.87)$$

$$T = A_2 \cos(kvt) + B_2 \sin(kvt) \quad (8.88)$$

Din (8.88) rezultă că pulsația ω are expresia:

$$\omega = kv \quad (8.89)$$

unde k are semnificația de modul al vectorului de undă.

Soluția (8.82) se scrie astfel:

$$y(x, t) = (A_1 \cos kx + B_1 \sin kx) (A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) \quad (8.90)$$

Din condițiile la limită (8.78) și (8.79) rezultă:

$$y(0, t) = A_1 (A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$y(\ell, t) = B_1 \sin k\ell (A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) = 0 \Rightarrow \sin k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.91)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{\ell}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.92)$$

Din (8.89) și (8.92) obținem:

$$\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{\ell} v \quad (8.93)$$

Pulsația ω_1 este pulsația fundamentală, iar $\omega_2, \omega_3, \dots$ sunt pulsațiile armonicelor. Rezultă că pulsația prezintă valori cuantificate, iar raportul pulsațiilor a două oscilații proprii ale corzii este un număr rațional (raportul între două numere întregi).

Înlocuind k_n și ω_n în (8.90) obținem:

$$y_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x \left(b_n \cos \frac{n\pi v}{\ell} t + a_n \sin \frac{n\pi v}{\ell} t \right) \quad (8.94)$$

Folosind principiul superpoziției putem scrie soluția generală a ecuației (8.76) sub forma:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \left(b_n \cos \frac{n\pi v}{\ell} t + a_n \sin \frac{n\pi v}{\ell} t \right) \quad (8.95)$$

Constantele a_n și b_n se determină din condițiile inițiale (8.80), (8.81).

$$f(x) = y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (8.96)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \left(-b_n \frac{n\pi v}{\ell} \sin \frac{n\pi v}{\ell} t + a_n \frac{n\pi v}{\ell} \cos \frac{n\pi v}{\ell} t \right)_{t=0} \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{\pi v}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (8.97)$$

Relația (8.96) reprezintă dezvoltarea în serie Fourier a funcției $f(x)$. Coeficientul b_n al acestei serii se determină astfel:

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx \quad (8.98)$$

În mod similar, din (8.97) obținem:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad A_n = \frac{\pi v}{\ell} n a_n$$

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad a_n = \frac{\ell}{\pi v n} A_n \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{2}{\pi v n} \int_0^{\ell} g(x) \sin \left(\frac{n\pi}{\ell} x \right) dx \quad (8.99)$$

Dacă poziția inițială a corzii este $f(x)$, iar viteza inițială $g(x) = 0$ (coarda este scoasă din poziția de echilibru și apoi este lăsată liberă), din (8.99) rezultă $a_n = 0$. În acest caz soluția (8.95) devine:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx \right\} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \cos\left(\frac{n\pi v}{\ell} t\right) \quad (8.100)$$

8.6 Densitatea volumică de energie a unei unde elastice

Energia unei constă din energia cinetică datorită căreia se produc oscilațiile particulelor și din energia potențială (de deformare) a mediului în care se propagă unda.

Densitatea volumică de energie cinetică este energia cinetică din unitatea de volum:

$$w_c = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m \cdot u^2}{2 \Delta V} = \frac{u^2}{2} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho_0 \frac{u^2}{2} = \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \quad (8.101)$$

Energia potențială se exprimă astfel:

$$W_p = - \int F dl \quad (8.49) \quad - \int -ES \varepsilon dl = ES \ell_0 \int \varepsilon d\left(\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}\right) = E V_0 \int_0^{\varepsilon} \varepsilon d\varepsilon = E V_0 \frac{\varepsilon^2}{2}$$

Densitatea volumică de energie potențială este:

$$w_p = \frac{E \varepsilon^2}{2} \quad (8.61) \quad \frac{\rho_0 v^2 \varepsilon^2}{2} = \frac{\rho_0 v^2}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad (8.102)$$

Înlocuind $\frac{\partial y}{\partial t}$ din (8.43) și $\frac{\partial y}{\partial x}$ din (8.44) obținem:

$$w_c = \frac{\rho_0 \omega^2 A^2}{2} \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \quad (8.103)$$

$$w_p = \frac{\rho_0 v^2}{2} \cdot \frac{\omega^2 A^2}{v^2} \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = \frac{\rho_0 \omega^2 A^2}{2} \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \quad (8.104)$$

Densitatea volumică a energiei totale va fi.

$$w = w_c + w_p = \rho_0 \omega^2 A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \quad (8.43) \quad \rho_0 u^2 \quad (8.105)$$

Valoarea medie a densității de energie este:

$$\bar{w} = \frac{\rho_0 \omega^2 A^2}{2} \quad (8.106)$$

Rezultă că densitatea volumică de energie a unei unde elastice este proporțională cu densitatea mediului, cu pătratul pulsației și cu pătratul amplitudinii de oscilație a particulelor.

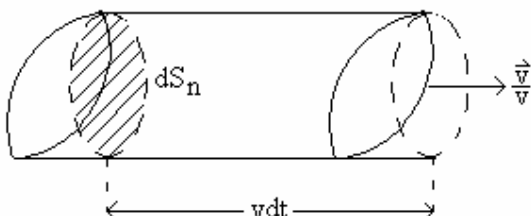
8.7 Densitatea fluxului de energie al unei unde mecanice. Intensitatea unei

Densitate fluxului energetic (vectorul Umov) \vec{j} este o mărime vectorială al cărei modul este numeric egal cu energia d^2W transportată de undă în unitatea de timp, prin unitatea de

arie normală pe direcția de propagare și a cărei direcție și sens coincid cu cele ale vitezei de propagare:

$$\vec{j} = \frac{d}{dS_n} \left(\frac{dW}{dt} \right) \vec{v} \quad (8.107)$$

După trecerea timpului dt vor fi excitate toate particulele cuprinse într-un cilindru cu generatoarea $v dt$ și aria bazei dS_n .



Rezultă:

$$d^2W = W dS_n \cdot v dt$$

$$j = \omega v = \rho_0 u^2 v \quad (8.108)$$

Folosind relațiile (8.51) și (8.61) obținem:

$$p_{dmax} = -\frac{E \omega A}{v} = -\frac{\rho_0 v^2 \omega A}{v} = -\rho_0 v \omega A \Rightarrow \omega^2 A^2 = \frac{p_{dmax}^2}{\rho_0 v^2}$$

$$j = \rho_0 \omega^2 A^2 v \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = \frac{p_{dmax}^2}{\rho_0 v} \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (8.109)$$

Intensitatea undelor elastice \bar{I} este valoarea medie a mărimii vectorului Umov în timp de o perioadă, adică:

$$\bar{I} = \frac{p_{dmax}^2}{2 \rho_0 v} \frac{\vec{v}}{v} \quad (8.110)$$

$$I = \frac{p_{dmax}^2}{2 \rho_0 v} = \frac{p_{dmax}^2}{2 z} \quad (8.111)$$

unde $z = \rho_0 v$ se numește impedanța acustică a mediului, prin analogie cu rezistența electrică. Viteza particulelor u corespunde intensității instantanee a curentului, iar p_d corespunde tensiunii electrice alternative. Intensitatea undei corespunde puterii medii a curentului alternativ.

Într-adevăr relația (8.64) poate fi pusă sub forma legii lui Ohm din electricitate:

$$\frac{p_d}{u} = \rho_0 v \quad (8.112)$$

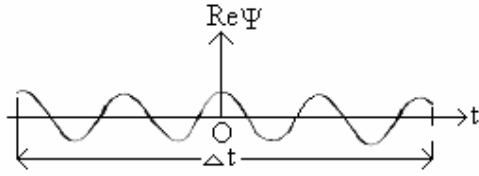
În cazul unei unde sferice, frontul de undă fiind sferic, intensitatea undei variază invers proporțional cu pătratul distanței până la sursă.

8.8. Propagarea perturbațiilor de durată finită

Unda armonică plană și unda armonică sferică sunt unde monocromatice, deoarece sunt caracterizate de o singură pulsație. O undă monocromatică se extinde fără limită în spațiu și durează un timp infinit. În realitate asemenea unde nu există, întrucât orice perturbație are o durată finită și se întinde într-un domeniu finit din spațiu.

Considerăm o perturbație reală descrisă de funcția de undă

$$\Psi(t) = \begin{cases} \frac{A_0}{\Delta t} e^{i\omega_0 t} & , \quad t \in \left[-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2} \right] \\ 0 & , \quad \text{rest} \end{cases} \quad (8.113)$$

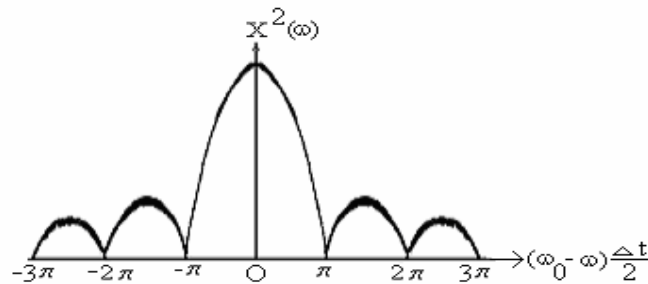


care are următoarea reprezentare grafică.

Folosind relația (7.10) putem determina transformata Fourier a lui Ψ(t):

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) e^{-i\omega t} dt \quad (8.113) \quad \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \frac{A_0}{\Delta t} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \\ &= \frac{A_0}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{A_0}{\Delta t \cdot i(\omega_0 - \omega)} e^{i(\omega_0 - \omega)t} \Bigg|_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} = \\ &= \frac{A_0}{i \Delta t (\omega_0 - \omega)} \left[\cos(\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2} + i \sin(\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2} - \cos(\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2} + i \sin(\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2} \right] = \\ &= \frac{2 A_0}{\Delta t (\omega_0 - \omega)} \sin(\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2} \quad \Rightarrow \\ X(\omega) &= A_0 \frac{\sin(\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2}}{(\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2}} \quad (8.114) \end{aligned}$$

Dependența pătratului amplitudinii Fourier de $(\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2}$ este dată în figură.



Se constată că o perturbație de durată finită nu este caracterizată de o singură pulsație, ci este compusă dintr-o infinitate de perturbații armonice de diverse pulsații ω. Valorile amplitudinii cu o mare contribuție la intensitatea undei, care este proporțională cu $X^2(\omega)$, sunt cuprinse în intervalul

$$-\pi \leq (\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2} \leq \pi \quad (8.115)$$

Între durata Δt a perturbației și imprecizia $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ a pulsației există relația:

$$\Delta\omega \Delta t \cong 2\pi \quad (8.116)$$

numită relație de incertitudine. Din această relație se constată că pentru a obține o perturbație riguros armonică, monocromatică ($\Delta\omega \rightarrow 0$) este necesar ca aceasta să aibă o durată infinită ($\Delta t \rightarrow \infty$). Invers, dacă $\Delta t \rightarrow 0$, atunci $\Delta\omega \rightarrow \infty$, adică pulsațiile tind să ocupe tot spectrul. Cazurile reale se încadrează între aceste două extreme: orice perturbație de durată finită ocupă o bandă de pulsații cu atât mai largă, cu cât durata este mai mică.

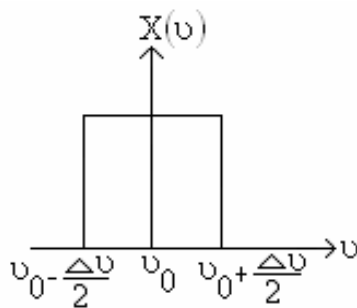
8.9. Grup de unde

Considerăm cazul unui număr mare de unde armonice plane, a căror frecvență variază continuu într-un interval îngust cuprins între $\nu_0 - \Delta\nu/2$ și $\nu_0 + \Delta\nu/2$, $\Delta\nu \ll \nu_0$. Fiecare undă este caracterizată de o anumită valoare a frecvenței și o anumită valoare a vectorului de undă.

Prin suprapunerea unui număr infinit (nenumărabil) de unde armonice plane se obține un grup de unde.

Deoarece $\Delta\nu \ll \nu_0$, putem considera că undele care se suprapun au aceeași amplitudine $X(\nu)$ și aceeași fază, iar faza inițială o alegem egală cu zero. Astfel, pentru o perturbație finită a cărei amplitudine $X(\nu)$ este de forma

$$X(\nu) = \begin{cases} \frac{\Psi_0}{\Delta\nu} = \text{const.} & , \quad \nu \in \left[\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}, \nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2} \right] \\ 0 & , \quad \text{rest} \end{cases} \quad (8.117)$$



putem aplica principiul superpoziției (mediul fiind liniar) sub forma unei integrale Fourier (7.11):

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{i(2\pi\nu t - kx)} d\nu \quad (8.118)$$

Întrucât $\Delta\nu$ este foarte mic, putem dezvolta modulul vectorului de undă în serie Taylor în raport cu ν în jurul valorii ν_0 , limitându-ne numai la primii doi termeni:

$$k(\nu) = k(\nu_0) + \left(\frac{\partial k}{\partial \nu} \right)_{\nu_0} (\nu - \nu_0) = k_0 + \left(\frac{\partial k}{\partial \nu} \right)_{\nu_0} (\nu - \nu_0) \quad (8.119)$$

Înlocuind (8.117) și (8.119) în (8.118), obținem:

$$\Psi(x, t) = \int_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} \frac{\Psi_0}{\Delta\nu} e^{i \left[2\pi\nu t - k_0 x - \left(\frac{\partial k}{\partial \nu} \right)_{\nu_0} (\nu - \nu_0) x \right]} d\nu =$$

$$= \frac{\Psi_0}{\Delta v} e^{i(2\pi v_0 t - k_0 x)} \int_{v_0 - \frac{\Delta v}{2}}^{v_0 + \frac{\Delta v}{2}} e^{i \left[2\pi t - \left(\frac{\partial k}{\partial v} \right)_{v_0} x \right] (v - v_0)} dv \Rightarrow$$

$$\Psi(x, t) = \frac{\Psi_0}{\Delta v} e^{i(2\pi v_0 t - k_0 x)} \cdot f(x, t) \quad (8.120)$$

Notând:

$$\xi = \frac{\Delta v}{2} \left[2\pi t - \left(\frac{\partial k}{\partial v} \right)_{v_0} x \right], \quad v - v_0 = q, \quad dv = dq;$$

$$v = v_0 - \frac{\Delta v}{2} \Rightarrow q = -\frac{\Delta v}{2}; \quad v = v_0 + \frac{\Delta v}{2} \Rightarrow q = \frac{\Delta v}{2}$$

obținem:

$$f(x, t) = \int_{-\frac{\Delta v}{2}}^{\frac{\Delta v}{2}} e^{\frac{2i\xi q}{\Delta v}} dq = \frac{\Delta v}{2i\xi} \left(e^{\frac{2i\xi}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{2}} - e^{\frac{2i\xi}{\Delta v} \cdot \left(-\frac{\Delta v}{2}\right)} \right) = \frac{\Delta v}{2i\xi} \cdot 2i \sin \xi$$

$$\Rightarrow f(x, t) = \Delta v \frac{\sin \xi}{\xi} \quad (8.121)$$

Înlocuind (8.121) în (8.120) obținem:

$$\Psi(x, t) = \frac{\Psi_0}{\Delta v} e^{i(2\pi v_0 t - k_0 x)} \cdot \Delta v \frac{\sin \xi}{\xi} \Rightarrow$$

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 e^{i(2\pi v_0 t - k_0 x)} \cdot \frac{\sin \xi}{\xi} \quad (8.122)$$

Grupul de unde determinat de relația (8.122) corespunde unei unde armonice plane $\Psi_0 e^{i(2\pi v_0 t - k_0 x)}$ de frecvență v_0 și număr de undă k_0 , modulată de factorul $\frac{\sin \xi}{\xi}$.

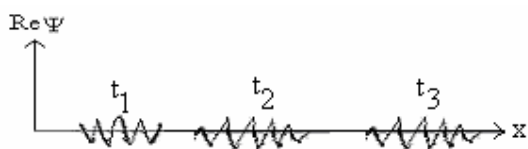
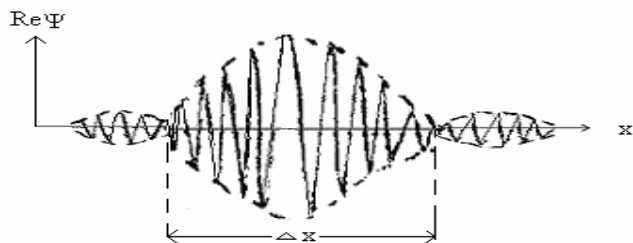
Funcția de undă $\Psi(x, t)$ din (8.122) nu reprezintă o undă armonică plană, deoarece are o amplitudine variabilă, care depinde de x și t :

$$A(x, t) = \Psi_0 \frac{\sin \xi}{\xi} \quad (8.123)$$

Pentru $\xi = 0$ avem un maxim principal cuprins între abscisele $\xi = \pm \pi$, iar pentru $\xi = \pm n\pi$, $n = 1, 2, \dots$, amplitudinea $A(x, t)$ se anulează. Maximele secundare se determină din condiția:

$$\frac{dA(x, t)}{d\xi} = 0 \quad (8.124)$$

care conduce la o ecuație transcendentă $\text{tg } \xi = \xi$ ce se rezolvă numeric sau grafic.



Maximele secundare au valori cu mult mai mici, amplitudinea având valori semnificative numai în regiunea maximului central.

Grupul de unde determinat de relația (8.122) are următoarea reprezentare grafică (v. figura alăturată).

Grupul de unde este practic localizat pe o distanță Δx . Deplasarea în timp a grupului de unde este arătată în figura din stânga, în care s-a reprezentat poziția unei descrise de $\text{Re } \Psi$ la câteva momente.

8.10. Viteza de grup. Dispersia undelor

Relația (8.122) arată că, pe lângă suprafața de undă $2\pi\nu_0 t - k_0 x = \text{const.}$, care se propagă cu viteza de fază v , se poate defini și o suprafață de egală amplitudine, ca locul geometric al punctelor care au, la un moment dat, aceeași amplitudine.

$$A(x, t) = \Psi_0 \frac{\sin \xi}{\xi} = \text{const.}, \quad \Rightarrow \quad \xi = \text{const.} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta\nu}{2} \left[2\pi t - \left(\frac{\partial k}{\partial \nu} \right)_{\nu_0} x \right] = \text{const.} \quad (8.125)$$

Diferențiind ultima relație obținem:

$$2\pi dt - \left(\frac{\partial k}{\partial \nu} \right)_{\nu_0} dx = 0 \quad (8.126)$$

Mărimea

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{\left(\frac{\partial k}{\partial \nu} \right)_{\nu_0}} = 2\pi \left(\frac{\partial \nu}{\partial k} \right)_{\nu_0} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{\nu_0} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{\omega_0} \quad (8.127)$$

sau

$$\vec{v}_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right)_{\nu_0} \vec{u}_k \quad (8.128)$$

se numește viteză de grup și reprezintă viteza de propagare a suprafețelor de egală amplitudine (în particular, pentru $\xi = 0$ avem viteza de propagare a maximului central al amplitudinii).

Detecția undelor se realizează prin efecte energetice, ceea ce înseamnă că se determină experimental viteza de transfer al energiei, adică viteza de grup, fluxul energetic fiind

proporțional cu pătratul amplitudinii, deci legat de suprafața de egală amplitudine. Viteza de fază, care este viteza de propagare a suprafeței de fază constantă

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (8.8) = (8.129)$$

nu poate fi măsurată experimental, fiind determinată numai prin calcul.

Din relațiile (8.127) și (8.129) obținem:

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0} = \frac{d}{dk} (v k)_{\omega_0} = v + k \left(\frac{dv}{dk} \right)_{\omega_0} = v + \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} \right)_{\omega_0}$$

$$\frac{d\lambda}{dk} = \frac{d}{dk} \left(\frac{2\pi}{k} \right) = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{2\pi}{(2\pi)^2} \lambda^2 = -\frac{\lambda^2}{2\pi}$$

$$v_g = v + \frac{2\pi}{\lambda} \left(-\frac{\lambda^2}{2\pi} \right) \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)_{\omega_0}$$

$$\boxed{v_g = v - \lambda \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)_{\omega_0}} \quad (8.130)$$

Astfel, legătura între viteza de fază și viteza de grup este dată de relația lui Rayleigh (8.130).

Dacă viteza de propagare a undei (viteza de fază) depinde de lungimea de undă, se observă fenomenul de dispersie: undele de diferite lungimi de undă se propagă cu viteze diferite.

În cazul dispersiei normale $\frac{dv}{d\lambda} > 0$ și $v_g < v$. În medii nedispersive $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ și $v_g = v$.

În teoria relativității se arată că viteza luminii în vid este o viteză limită, ce nu poate fi depășită. Viteza de fază poate depăși viteza luminii în vid, deoarece ea nu este legată de transportul de energie. Numai viteza de grup, care caracterizează viteza de transfer al energiei, nu poate depăși viteza luminii în vid.

Din relațiile (8.116) și (8.127) rezultă următoarele relații de incertitudine:

$$\Delta k \Delta x = \Delta \omega \Delta t \cong 2\pi \quad (8.131)$$

care sunt analoge relațiilor lui Heisenberg din mecanica cuantică $\left(\Delta p \Delta x \geq \frac{h}{4\pi} \right)$.

Cu cât un pachet de unde este mai concentrat în lungime ($\Delta x \rightarrow 0$), cu atât conține unde monocromatice mai diferite ($\Delta k \rightarrow \infty$). Cu cât grupul de unde este mai concentrat în durată ($\Delta t \rightarrow 0$), cu atât este mai dispersat în pulsație ($\Delta \omega \rightarrow \infty$). Dacă se ține seama și de maximele secundare, atunci:

$$\Delta k \Delta x = \Delta \omega \Delta t \geq 2\pi \quad (8.132)$$

În cazul undelor sonore dispersia undelor este neglijabilă.

9. Elemente de acustică

Acustica este o parte a fizicii fiziologice care se ocupă cu producerea, propagarea și recepția sunetelor.

În funcție de frecvența undelor mecanice și de efectul fiziologic pe care îl produc asupra organului auditiv uman, distingem:

a) unde sonore, care nu produc o senzație dureroasă și au frecvența cuprinsă între 16 Hz și 20 kHz.

b) unde infrasonore, care nu produc o senzație dureroasă și au frecvența mai mică de 16 Hz.

c) unde ultrasonore, care produc o senzație de durere și au frecvența mai mare de 20 kHz.

O dovadă că undele acustice nu se propagă în vid este faptul că un clopoțel nu sună în vid.

Presupunem că într-o mână avem un corp cu masa de 0,1 kg, iar în cealaltă mână un corp de 1 kg. Dacă adăugăm câte 0,1 kg în fiecare mână, constatăm că variațiile senzațiilor de apăsare nu vor coincide. Variația senzației de apăsare produsă la adăugarea unui corp cu masa de 0,1 kg la un corp cu masa de 0,1 kg este egală cu variația senzației de apăsare care se obține dacă la masa de 1 kg se adaugă tot o masă de 1 kg (variația senzației de apăsare este mai mică la adăugarea corpului cu masa de 0,1 kg la corpul cu masa de 1 kg). Întrucât greutatea $G = m g$ este un parametru fizic – excitația e , rezultă că variația senzației ΔS nu este proporțională cu variația absolută Δe a excitației, ci cu variația sa relativă $\Delta e / e$:

$$\Delta S = k \frac{\Delta e}{e} \quad (8.133)$$

unde k este o constantă.

Pentru o variație diferențială $d e$ a excitației avem:

$$dS = k \frac{d e}{e} \quad (8.134)$$

de unde:

$$S = k \ln e + S_0 \quad (8.135)$$

Alegând constanta auditivă arbitrară $S_0 = 0$, obținem legea lui Weber și Fechner

$$S = k \ln e \quad (8.136)$$

care arată că senzația este proporțională cu logaritmul excitației.

Legătura dintre senzație și excitație poate fi ilustrată și cu două surse sonore identice alimentate de la două generatoare electrice diferite, având fiecare 0,1 W. Presupunem că pentru a percepe o diferență minimă de intensitate sonoră de la cele două surse trebuie ca diferența de putere electrică a celor două generatoare să fie de 10 mW. Dacă mărim puterea ambelor generatoare de 10 ori, astfel ca fiecare generator să aibă o putere de un watt, pentru a putea percepe o diferență minimă de intensitate sonoră între cele două surse va trebui ca diferența de putere a celor două generatoare să fie de 100 mW, adică de 10 ori mai mare decât în primul caz. Deci și în acest caz senzația minimă de percepere între efectele celor două surse sonore este proporțională cu variația relativă a excitației

$$\left(\Delta S = \frac{0,01}{0,1} k = \frac{0,1}{1} k = 0,1 k \right).$$

Din relația (8.136) se constată că dacă excitația crește în proporție geometrică ($e' = e^2$), atunci senzația crește în proporție aritmetică ($S' = k \ln e' = 2 k \ln e = 2 S$).

Fiecare sunet este caracterizat prin trei calități: înălțimea, intensitatea și timbrul.

Prin înălțimea unui sunet se înțelege însușirea lui de a fi mai profund (grav) sau mai înalt (acut). Înălțimea unui sunet complex este determinată de cea mai mică frecvență a spectrului, numită frecvență fundamentală. Cu cât frecvența sunetului este mai mare, cu atât acesta este mai înalt (ascuțit).

Notând cu m masa oscilantă, care înmagazinează energia cinetică și cu k constanta de elasticitate a elementului de legătură, care înmagazinează energia potențială, în cazul în care vibrațiile masei m dau naștere la unde acustice frecvența sunetului emis va fi:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Urechea poate aprecia dacă două sunete sunt de aceeași înălțime, chiar dacă ele sunt produse de instrumente diferite și au intensități diferite.

Înălțimea unui sunet se poate determina pe baza fenomenului de bătăi. Se știe că frecvența bătăilor ν_b este egală cu diferența dintre frecvențele celor două sunete componente:

$$\nu_b = \nu_2 - \nu_1$$

Dacă ν_1 este cunoscută, iar ν_b este măsurată, atunci se poate determina frecvența ν_2 :

$$\nu_2 = \nu_b + \nu_1$$

Senzația auditivă produsă de un acord, adică de cel puțin două sunete simultane, este plăcută atunci când frecvențele acestora se află într-un anumit raport numeric, numit interval.

Sunetele folosite în muzică au fost alese după frecvența lor și grupate în game muzicale. Prima gamă muzicală este gama 2, iar gama cea mai înaltă este gama 6. Nota muzicală cea mai joasă (do – 2) are frecvența de 16,31 Hz. Domeniul sunetelor muzicale se întinde până la frecvența de 4700 Hz.

Trebuie să se facă distincție între intensitatea acustică a unui sunet și intensitatea sa auditivă, adică intensitatea senzației auditive. Cele două mărimi variază în același sens, dar între ele nu există o relație de proporționalitate. Intensitatea auditivă se exprimă într-o scară logaritmică.

Nivelul de intensitate sonoră este definit de expresia:

$$N_s = \log \frac{I}{I_0}$$

în care I_0 este intensitatea acustică de referință, iar I este intensitatea acustică a sunetului analizat. Intensitatea acustică de referință $I_0 = 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}$ reprezintă valoarea minimă a intensității acustice care, pentru o frecvență de aproximativ 1 kHz, poate fi percepută de ureche (pragul inferior de audibilitate). Pragul superior de audibilitate corespunde la $I = 10^2 \text{ W/m}^2$. Raportul dintre valoarea corespunzătoare pragului superior și cea corespunzătoare pragului inferior este 10^{14} , ceea ce arată că domeniul intensităților auditive este foarte mare. Dacă intensitatea sonoră crește în progresie geometrică, nivelul sonor crește în progresie aritmetică. Unitatea de măsură pentru nivelul sonor este numită Bell, după numele inventatorului telefonului. Întrucât Bell-ul este o unitate de măsură prea mare, în locul său se folosește decibelul (dB), care reprezintă de fapt diferența minimă de nivel sonor ce poate fi percepută de ureche. Deci:

$$N_s = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (8.137)$$

sau:

$$N_s = 20 \log \frac{p_{dmax}}{(p_{dmax})_0} \quad (8.138)$$

în care N_s se măsoară în decibeli, iar $(p_{d_{max}})_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$ este amplitudinea presiunii sonore corespunzătoare pragului inferior de audibilitate.

Relația (8.138) se obține din (8.137) folosind expresia lui I din (8.111).

Pragul senzației dureroase are nivelul sonor:

$$N_s = \log \frac{10^2}{10^{-12}} = 140 \text{ dB}$$

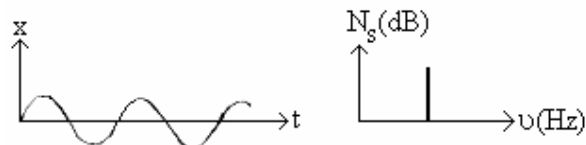
Întrucât intensitatea senzației auditive depinde nu numai de intensitatea sonoră, ci și de frecvența sunetului, se definește nivelul de intensitate auditivă sau nivelul de tărie

$$N_a = 10 \log \frac{I_a(1 \text{ kHz})}{I_0} = 20 \log \frac{p_a}{p_0} \quad (8.139)$$

unde N_a este nivelul de intensitate sonoră al unui sunet normal (1 kHz) care produce asupra unei urechi normale aceeași intensitate a senzației auditive ca și sunetul considerat. N_a se măsoară în foni. Intensitatea auditivă se măsoară cu urechea, prin compararea senzației cu aceea pe care o dă un sunet cu frecvența de 1 kHz, variindu-se intensitatea acustică pînă ce intensitățile auditive ale celor două sunete devin egale. Pentru vorbirea în șoaptă $I_a = 10^{-10} \text{ W/m}^2$, $N_a = 20$ foni, pentru vorbirea normală $I_a = 10^{-7} \text{ W/m}^2$, $N_a = 50$ foni, zgomotul de cazangerie are $I_a = 10^{-2} \text{ W/m}^2$, $N_a = 100$ foni, iar zgomotul produs de elicea de avion are $I_a = 1 \text{ W/m}^2$, $N_a = 120$ foni. Senzația de durere apare la $I_a = 10 \text{ W/m}^2$, $N_a = 130$ foni.

Urechea aude bine un sunet curat dacă durata emiterii lui este mai mare de 60 milisecunde. Persistența senzației auditive este cuprinsă între $\frac{1}{20}$ și $\frac{1}{15}$ secunde după încetarea excitației.

Pentru ca o undă mecanică să fie auzită ca sunet și nu ca pocnet, este necesar ca durata oscilațiilor să fie cel puțin egală cu semiperioada acestor oscilații $\Delta t \geq \frac{T}{2}$, astfel ca omul să poată recunoaște dependența de timp a suprapresiunii. Pentru $\nu = 1 \text{ kHz}$, $T = 1 \text{ ms}$, adică durata oscilațiilor mecanice auzite ca sunete trebuie să fie mai mare de 1 ms.



Reprezentarea grafică a nivelului de intensitate sonoră în funcție de frecvență (diagrama spectrului sonor) are pentru sunetul pur (fundamental) aspectul din figură (în cazul unei pur sinusoidale spectrul are o singură componentă). În natură sunetele pure intervin foarte rar, iar în laborator sunt produse de aparate electronice numite generatoare de ton.

Sunetele muzicale care au aceeași intensitate și înălțime pot fi deosebite dacă sunt emise de instrumente diferite (vioară, pian, clarinet).

Timbrul sunetului unui instrument muzical depinde de armonicile care sunt excitate. De exemplu, armonicile pare nu există deloc la clarinet. Fourier a dovedit teoretic și Helmholtz a arătat experimental că deosebirea între sunetele care au aceeași intensitate și înălțime constă în numărul și amplitudinea armonicilor care însoțesc sunetul fundamental. Deci timbrul sunetului depinde de spectrul lui.

Când un corp emite numai sunetul fundamental, toate punctele corpului au în același moment elongația de aceeași parte a poziției de echilibru. În cazul când corpul emite și armonice superioare, acesta se împarte în porțiuni separate prin puncte, linii sau suprafețe nodale (în care nu are loc nici o vibrație). Punctele a două porțiuni vecine, separate printr-un nod, au în același moment elongații de sens contrar. Se poate aplica metoda elementelor finite în care suprafețele nodale separă diferite porțiuni din corp. Fazele armonicilor care schimbă forma curbei oscilației compuse nu sunt recepționate de ureche și nu influențează timbrul sunetului.

Zgomotul este un sunet complex format din componente foarte numeroase și haotic distribuite în banda frecvențelor. Zgomotul produce o senzație neplăcută. Spectrul său este un spectru continuu și nu unul discret, ca la sunetele muzicale.

8.12. Efectul Doppler. Unda de șoc

Efectul Doppler apare la mișcarea relativă a sursei față de observator și constă în recepționarea unei unde având o frecvență diferită față de cea emisă de sursă. Astfel un observator aflat în apropierea unei căi ferate va percepe sunetul emis de o locomotivă care se apropie cu o frecvență crescătoare (sunetul se aude din ce în ce mai înalt (ascuțit)), iar în cazul în care locomotiva se îndepărtează de observator frecvența sunetului auzit de acesta este descrescătoare. Pentru mecanicul locomotivei frecvența sunetului este constantă, deoarece el se deplasează odată cu sursa. Dacă două autovehicule se apropie reciproc, șoferii vor aprecia că sunetul emis de autovehiculul în care se găsesc are frecvența constantă, în timp ce sunetul emis de autovehiculul ce vine în sens invers se aude cu o frecvență tot mai mare. Când vehiculele se îndepărtează reciproc, frecvența sunetului emis de celălalt autovehicul scade, sunetul devenind tot mai profund (tot mai „jos”).

Presupunem că viteza relativă a sursei față de observator este mai mică decât viteza de propagare a unde.

La momentul t_0 determinat de observatorul O sursa S emite o undă care străbate distanța SO în timpul $t'_1 = \frac{SO}{v}$, unde v este viteza de propagare a unde.



Unda este recepționată de observator la momentul:

$$t_1 = t_0 + \frac{SO}{v} \quad (8.140)$$

Sursa emite a doua undă după un timp egal cu perioada oscilațiilor sursei T_0 , atunci când ea se află în punctul S' , deci a parcurs distanța $SS' = v_s T_0$. Observatorul O primește această undă la momentul:

$$t_2 = t_0 + T_0 + \frac{S'O}{v} \quad (8.141)$$

Intervalul de timp între două sosiri succesive ale oscilației la observator constituie perioada oscilației primite de observator. Această perioadă este:

$$T = t_2 - t_1 = T_0 + \frac{S'O - SO}{v} = T_0 - \frac{SO - S'O}{v} = T_0 - \frac{SS'}{v} = T_0 - \frac{v_s T_0}{v}$$

$$T = T_0 \left(1 - \frac{v_s}{v} \right) = T_0 \left(\frac{v - v_s}{v} \right) \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} \frac{v - v_s}{v} \Rightarrow$$

$$\boxed{v = v_0 \frac{v}{v - v_s}} \quad (8.142)$$

Frecvența oscilațiilor sosite în O este mai înaltă decât frecvența oscilațiilor emise de sursă, dacă sursa se apropie de observator. Dacă sursa se îndepărtează de observator, atunci frecvența oscilațiilor sosite la observator scade:

$$v = v_0 \frac{v}{v + v_s} \quad (8.143)$$

Dacă sursa este fixă, iar observatorul se apropie de sursă cu viteza v_0 , atunci:

$$v = v_0 \frac{v + v_0}{v} \quad (8.144)$$

iar când observatorul se îndepărtează de sursă cu viteza v_0 , atunci:

$$v = v_0 \frac{v - v_0}{v} \quad (8.145)$$

În general:

$$\boxed{v = v_0 \frac{v \pm v_0}{v \mp v_s}} \quad (8.146)$$

Semnul + la numărător și semnul - la numitor corespund cazului când sursa și observatorul se apropie reciproc, iar semnul - la numărător și semnul + la numitor corespund cazului în care sursa și observatorul se îndepărtează reciproc.

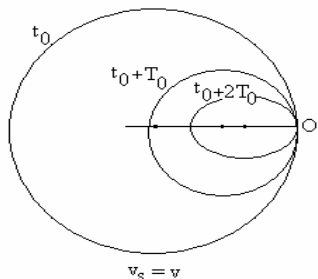
Pe baza efectului Doppler se poate măsura viteza relativă a unui corp utilizând radarul. Astfel se poate măsura viteza radială a rachetelor spațiale, sau se pot depista conducătorii auto care depășesc viteza legală.

În cazul undelor luminoase efectul Doppler a fost sesizat în timp ce se studiau liniile spectrale emise de către stele, deducându-se valorile vitezelor de apropiere sau îndepărtare a stelelor față de Pământ.

Efectul Doppler a condus pe oamenii de știință la concluzia că Universul este în plină expansiune (cu cât corpurile cerești sunt mai îndepărtate de sistemul nostru solar, cu atât deplasarea liniilor spectrale este mai pronunțată). Deplasarea liniilor spectrale are loc înspre domeniul roșu al spectrului (lungime de undă mare și deci frecvență mică).

Un fizician american Wood a fost acuzat că a trecut printr-o intersecție când semaforul era pe roșu. La tribunal profesorul Wood a spus că viteza cu care a trecut prin intersecție a fost așa de mare încât, datorită efectului Doppler, lumina roșie a semaforului a avut pentru el reflexe verzi. Judecătorul, care cunoștea efectul Doppler, a făcut un calcul și apoi l-a condamnat pe Wood pentru exces de viteză.

Am analizat efectul Doppler longitudinal. În teoria relativității s-a demonstrat că există și un efect Doppler transversal.

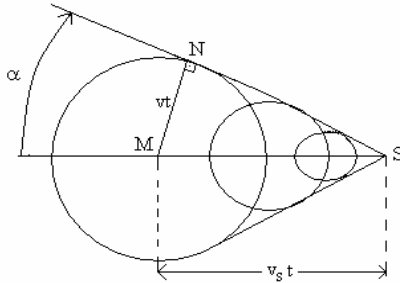


Dacă viteza sursei v_s este egală cu viteza undei (sunetului), atunci avem cazul de trecere de la regimul subsonic la regimul supersonic. Suprafețele de undă devin tangente în punctul O și observatorul înregistrează un efect numit undă de șoc, cu o durată foarte scurtă, dar cu amplitudine deosebit de mare, din cauza însumării perturbațiilor corespunzătoare diferitelor unde, .

recepționate în același timp, sunetul fiind perceput ca un pocnet.

Dacă viteza sursei depășește viteza sunetului (unde), diversele suprafețe de undă se întretaie, iar înfășurătoarea acestora reprezintă suprafața de undă efectivă, de forma unui con, cu vârful în punctul în care se află sursa la momentul considerat.

Axa conului se află pe direcția de mișcare a sursei.



Unghiul de deschidere al conului se deduce din triunghiul dreptunghic MNS, unde MN și MS reprezintă distanțele străbătute, în același timp, de undă și de sursă.

$$\sin \alpha = \frac{v t}{v_s t} = \frac{v}{v_s}$$

Unda este numită undă de șoc sau undă Mach.

Astfel de unde sunt recepționate atunci când trec prin apropiere avioane supersonice. Fenomenul se petrece la fel dacă sursa este în repaus, dar fluidul prin care se propagă sunetul este în mișcare ($v_s > v$). În această situație, raportul $\frac{v_s}{v}$ se numește numărul lui Mach, iar conul definit de unghiul α delimitează regiunea în care se propagă perturbațiile.