

Ținând seamă că: $x' = OF' + F'E' = OF' + OG'$, putem identifica:

$$OF' = \kappa \cdot OF \quad \text{și} \quad OG' = \sigma \cdot OG. \quad (3B.1.1)$$

Reiese astfel că – în planul complex (x, ict) – sunt valabile unele relații de tip (pseudo)trigonometric, care includ funcțiile pseudotrigonometrice:

$$\kappa \equiv \cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{și} \quad \sigma \equiv \sin \vartheta = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3B.1.2)$$

Constatările de mai sus permit unele aplicații. Dat fiind spațiul limitat al acestei lucrări, vom examina aici doar unele aplicații clasice în cinematica relativistă.

(i) *Dilatarea relativistă a Timpului*

Fie L linia de Univers care corespunde mișcării unui punct material liber de masă M și:

$$Ox_0, \quad O - ict_0$$

axe perpendiculară pe linia de Univers L , respectiv paralelă cu această linie, din planul complex x, ict (v. figura 3B.1.2).

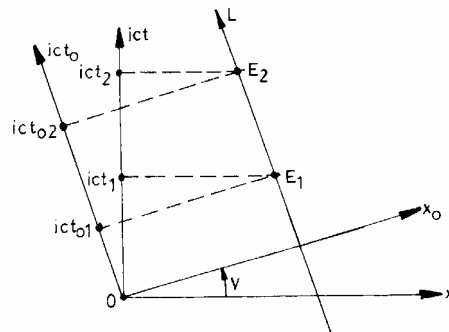


Fig.3B.1.2

Deoarece punctul material considerat M are permanent aceeași coordonată față de nou construitul referențial inerțial, acesta este referențialul propriu al punctului material studiat. Din figura 3B.1.2, se obține:

$$ic\Delta t(v) = ic(t_2 - t_1) = E_2E_1 \cdot \cos \vartheta = ic(t_{02} - t_{01})\kappa = \frac{ic \cdot \Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

deci:

$$\Delta t(v) = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Se constată că acest rezultat coincide cu cel obținut prin metode algebrice (v. partea 3A a acestui capitol), pornind de la ecuațiile transformărilor lui Lorentz.

(i) *Contrația relativistă a lungimilor riglelor rigide*

Fie L și L' - liniile de Univers care corespund capetelor C, C' ale unei rigle rectilinii rigide, așezată în lungul axei Ox a referențialului inerțial R . Deoarece rigla considerată este rigidă, liniile de Univers L și L' sunt paralele (v. figura 3B.1.3).

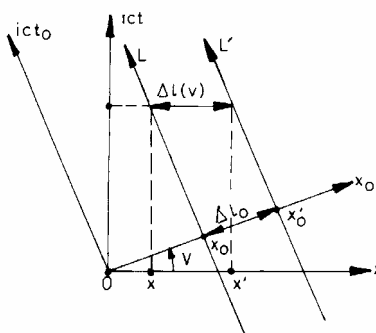


Fig. 3B.1.3

Fie Ox_o , $O-ict_o$ axele perpendiculară pe liniile de Univers L , L' , respectiv paralelă cu aceste linii de Univers. Deoarece capetele C , C' au permanent aceleași coordonate față de noul referențial inerțial considerat, acest referențial este în fapt referențialul propriu care corespunde riglei rectilinii rigide considerate. Fie x și x' coordonatele capetelor C și C' la același moment t .

Din figura 3B.1.3, rezultă că:

$$\Delta l(v) = x' - x = \frac{\Delta l_0}{\cos \vartheta} = \Delta l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad .$$

Se constată că acest rezultat coincide cu expresia dedusă pornind de la ecuațiile transformărilor lui Lorentz (v. partea 3A a acestui capitol).

§3B.2. Metoda matricială

În legătură cu studiul transformărilor lui Lorentz (v. partea 3A a acestui capitol), am constatat deja unele aplicații ale metodei matriciale în cadrul cinematicii relativiste. Această metodă poate fi folosită de asemenea: a) în cadrul dinamicii relativiste, al electrodinamicii relativiste și al altor domenii ale Fizicii (cu ajutorul noțiunilor de invarianți Lorentz și – respectiv - de cuadvectori), b) pentru a generaliza expresiile transformărilor Lorentz în cazul unor referențiale inerțiale arbitrare (deducerea transformărilor generale ale lui Lorentz), precum și în alte probleme.

b1) Metoda invarianților lui Lorentz și a cuadvectorilor

Cantitățile fizice ale căror valori coincid față de orice referențial inerțial sunt numite *invarianți Lorentz*. Aceste cantități sunt – în principal – de următoarele tipuri: (i) constante universale (precum constanta lui Planck h , masa de repaus a electronului și altele), (ii) cantități care au aceeași valoare față de orice referențial inerțial (spre exemplu, viteza undelor electromagnetice, egală – în conformitate cu principiile relativității – cu viteza luminii în spațiul liber c față de orice referențial inerțial), (iii) unele cantități fizice corespunzând unor anumite domenii (spre exemplu, numărul electronilor aflați în domeniul Ω și – în consecință - sarcina electrică corespunzătoare), precum și, desigur: (iv) constantele matematice (precum numărul lui Euler e , $\tan(\pi/3)$) și altele.

Ansamblele de 4 cantități fizice scalare, a căror modificare – la trecerea de la un referențial inerțial la un alt asemenea referențial este descrisă de matricea \mathbf{L} a transformării Lorentz corespunzătoare:

$$\bar{v}'_4 = \bar{\bar{L}} \cdot \bar{v}_4 \quad , \quad \text{relatie echivalenta cu: } (v'_1, v'_2, v'_3, v'_4) \equiv \bar{v}'_4{}^T = (v_1, v_2, v_3, v_4) \bar{\bar{L}}^T = \bar{v}^T \cdot \bar{\bar{L}}^T \quad (3B.2.1)$$

(unde ansamblele de mai sus de câte of 4 cantități fizice scalare corespund referențialelor inerțiale R' și – respectiv - R) sunt numite *cuadvectori*.

Principalele proprietăți ale cuadvectorilor sunt următoarele:

(i) o combinație lineară a componentelor a n cuadvectori:

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_j v_{ij} \quad , \quad \text{unde } a_j = \text{invarianti Lorentz } (i=1,2,3,4) \quad (3B.2.2)$$

este de asemenea un cuadvivector; se constată ușor că:

$$\bar{w}' = \sum_{j=1}^4 a_j v'_j = \sum_{j=1}^4 a_j \bar{L} \cdot \bar{v}_j = \bar{L} \sum_{j=1}^4 a_j \bar{v}_j = \bar{L} \cdot \bar{w};$$

(ii) diferențiala unui cuadvivector este de asemenea un cuadvivector (această proprietate este o consecință a precedentei proprietăți),

(iii) produsul scalar al 2 cuadvivectori:

$$\bar{u}_4^T \cdot \bar{v}_4 = \sum_{i=1}^4 u_i v_i \tag{3B.2.3}$$

este un invariant Lorentz (pornind de la definiția (3B.2.1) a cuadvivectorilor, se obține:

$$\bar{u}_4^T \cdot \bar{v}_4 = (\bar{L} \cdot \bar{u}_4)^T \cdot \bar{L} \cdot \bar{v}_4 = \bar{u}_4^T \cdot \bar{L}^T \cdot \bar{L} \cdot \bar{v}_4 = \bar{u}_4^T \cdot \bar{v}_4);$$

(iv) norma unui cuadvivector (definită prin relația):

$$\|\bar{v}_4\|^2 = \bar{v}_4^T \cdot \bar{v}_4 = \sum_{i=1}^4 v_i^2 \tag{3B.2.4}$$

este un invariant Lorentz (această proprietate este o consecință a celei precedente, pentru $\mathbf{u} = \mathbf{v}$).

Principalii cuadvivectori ai mecanicii relativiste sunt:

(i) vectorul de poziție în spațiul 4D(imensional) al lui Minkowski:

$$\bar{r}_4^T \equiv (x, y, z, ict) \tag{3B.2.5}$$

(această proprietate este o consecință directă a definiției transformărilor lui Lorentz și a relației (3.11'), din cadrul fasciculei 46 a acestei serii),

(ii) vectorul "deplasării" diferențiale în spațiul 4D(imensional) al lui Minkowski:

$$d\bar{r}_4^T \equiv (dx, dy, dz, ic dt) \tag{3B.2.6}$$

(consecință directă a definiției transformărilor lui Lorentz),

(iii) cuadvivectorul "viteză", construit pornind de la cuadvivectorul precedent, cu ajutorul invariantului Lorentz: durata deplasării diferențiale față de referențialul propriu; luând în considerație expresia dilatării relativiste a duratelor, se obține:

$$\bar{v}_4^T \equiv \left(\frac{dx}{dt_0} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dt_0} = \alpha v_x, \alpha v_y, \alpha v_z, ic \frac{dt}{dt_0} = i\alpha c \right), \tag{3B.2.7}$$

(iv) cuadvivectorul "impuls - energie", construit pornind de la cel precedent, prin înmulțire cu invariantul Lorentz: masă de repaus a punctului material considerat față de referențialul său propriu; luând în considerație bine-cunoscutele (chiar și din studiile liceale) relații ale dinamicii relativiste:

$$m(v) = m_0 \alpha = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{si:} \quad E = m(v) \cdot c^2, \tag{3B.2.8}$$

se găsesc expresiile elementelor cuadvivectorului "impuls - energie":

$$\bar{p}_4^T \equiv \left(m_0 \alpha v_x = m(v) v_x = p_x, p_y, p_z, i m_0 \alpha c = i m(v) c = \frac{iE}{c} \right), \tag{3B.2.9}$$

(v) cuadvivectorul "diferențiala impulsului și energiei", cu elementele:

(vi) cuadvivectorul "forță - putere", construit pornind de la cel precedent, prin împărțire cu invariantul Lorentz: durata variației diferențiale a impulsului și energiei; luând în considerație

$$d\bar{p}_4^T \equiv (dp_x, dp_y, dp_z, \frac{i}{c} dE), \tag{3B.2.10}$$

expresia dilatării relativiste a duratelor (v. partea 3A a acestui capitol), se obține:

$$\bar{F}_4^T \equiv \left(\frac{dp_x}{dt_0} = \frac{dp_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dt_0} = \alpha F_x, \alpha F_y, \alpha F_z, ic \frac{dE}{dt_0} = ic \frac{dE}{dt} \cdot \frac{dt}{dt_0} = ic \alpha P \right) . \quad (3B.2.11)$$

Principalele aplicații ale cuadvectorilor se referă la:

(i) *obținerea componentelor principalilor parametri fizici ai mecanicii relativiste în alte referențiale inerțiale*, pornind de la valorile lor într-un referențial inerțial dat, cu ajutorul transformărilor lui Lorentz; spre exemplu:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \frac{i}{c} E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & i\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\alpha\beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \frac{i}{c} E \end{pmatrix}, \quad (3B.2.12)$$

(ii) *deducerea simplă a unor relații relativiste importante*; spre exemplu, aplicând cuadvectorului “impuls-energie” proprietatea de invarianță a normei la aplicarea unor tranformări Lorentz, se obține:

$$\left\| \bar{p}_4^T \right\|^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \left(\frac{i}{c} E \right)^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = \left\| \bar{p}_{4,0}^T \right\|^2 = \left(\frac{i}{c} E_0 \right)^2 = -m_0^2 c^2, \quad (3B.2.13)$$

unde:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (3B.2.14)$$

este energia de repaus a punctului material considerat. Din relația (3B.2.13), se obține:

$$E(v) = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad \text{si:} \quad p(v) = \frac{1}{c} \sqrt{E^2(v) - m_0^2 c^4}, \quad (3B.2.15)$$

care sunt relațiile relativiste “impuls – energie”.

b2) Deducerea expresiilor transformării generale a lui Lorentz, cu ajutorul metodei matriciale

Folosind bine-cunoscuta (v. §3A.3) alegere a coordonatelor carteziene ale referențialului inerțial considerat, astfel încât viteza relativă de transport a acestor referențiale este:

$$\bar{v} = v \cdot \bar{1}_x \quad (3B.2.16)$$

și ținând seamă că în acest caz:

$$\bar{r} \cdot \bar{v} = x \cdot v, \quad (3B.2.16')$$

este posibil să se transcrie ecuațiile transformării (speciale) a lui Lorentz (v. partea 3A a acestui capitol) în forma:

$$\bar{r}' = \bar{r} + \bar{v} \left[\left(\frac{\bar{r} \cdot \bar{v}}{v^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) - \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] \quad \text{si:} \quad t' = \frac{t - \frac{\bar{r} \cdot \bar{v}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3B.2.17)$$

Să considerăm acum o alegere arbitrară a axelor $OXYZ$ ale referențialului inerțial R și să presupunem că axele $O'x'y'z'$ ale referențialului inerțial R' sunt alese în direcții paralele cu axele corespunzătoare ale referențialului R (v. figura 3B.2.1):

$$O'x'' \parallel OX, \quad O'y'' \parallel OY \quad \text{si:} \quad O'z'' \parallel OZ. \quad (3B.2.18)$$

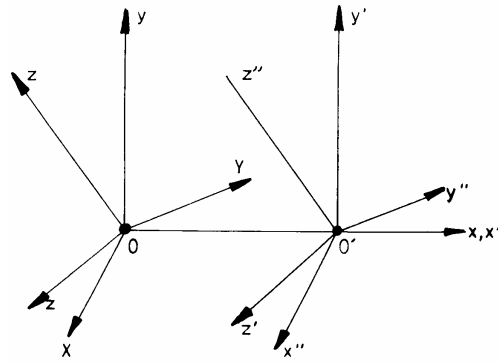


Fig. 3B.2.1

Ținând seamă că vectorii \mathbf{r}' , \mathbf{r} și \mathbf{v} se modifică în același mod la aplicarea rotației spațiale (3D) de mai sus:

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\bar{R}}_3 \cdot \bar{\mathbf{r}}, \quad \bar{\mathbf{V}} = \bar{\bar{R}}_3 \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad \text{și:} \quad \bar{\mathbf{r}}'' = \bar{\bar{R}}_3 \cdot \bar{\mathbf{r}}', \quad (3B.2.19)$$

iar produsul scalar al 2 vectori este invariant la această rotație spațială (3D):

$$\bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{V}} \quad \text{și:} \quad \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{V}}, \quad (3B.2.19')$$

rezultă că relațiile (3B.2.17) devin:

$$\bar{\mathbf{r}}'' = \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{V}} \left[\frac{\gamma}{v^2} (\bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{V}}) - \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] \quad \text{și:} \quad t' = \frac{t - \frac{\bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{V}}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (3B.2.20)$$

unde al treilea criteriu (γ) de similitudine al lui Einstein este:

$$\gamma = \alpha - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1. \quad (3B.2.21)$$

Să considerăm acum o alegere arbitrară a axelor $O'X'Y'Z'$ ale referențialului R' , obținută printr-o rotație spațială (în general, 3-dimensională), pornind de la axele $O'x''y''z''$ (v. figura 3B.2.2 și relația (3B.2.19)):

$$\bar{\mathbf{R}}' = \bar{\bar{R}}_3^{-1} \cdot \bar{\mathbf{r}}'', \quad \text{deci:} \quad \bar{\mathbf{r}}'' = \bar{\bar{R}}_3 \cdot \bar{\mathbf{R}}'. \quad (3B.2.22)$$

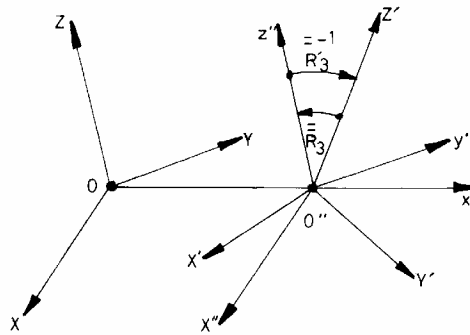


Fig. 3B.2.2

Rezultă că prima dintre relațiile (3B.2.20) conduce la prima expresie a transformării generale a lui Lorentz:

$$\bar{\bar{R}}_3 \cdot \bar{\mathbf{R}}' = \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{V}} \left[\frac{\gamma}{v^2} \left(\bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{V}} - \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right], \quad (3B.2.23)$$

A doua expresie a transformării generale a lui Lorentz coincide cu cea de a doua ecuație (3B.2.20).

§3B.3. Metoda Simulării Interacțiunilor Locale (Local Interaction Simulation Approach, LISA) și Metoda Diferențelor Finite

a) Elemente introductive

În timp ce pentru medii ideale și unele medii neomogene continuu variabile ecuația (3A.1.8) a propagării pulsurilor (undelor) admite unele soluții analitice, prezența unor caracteristici particulare, precum defectele sau unele neomogenități **arbitrare** împiedică orice încercare de a obține o soluție analitică. În asemenea situații sunt adesea necesare proceduri complet numerice, fie pentru a rezolva probleme care nu pot fi abordate analitic, fie pentru a testa soluții aproximative.

Progresul recent al calculatoarelor masiv paralele [10] sugerează totuși [11]-[13] o abordare complet diferită: metoda Simulării Interacțiunilor Locale (Local Interaction Simulation Approach), în care materialul sau structura studiată este divizată într-un număr foarte mare de părți elementare, numite “*celule*”. Fiecare celulă, presupusă ca având proprietăți fizice constante în interiorul său, este pusă într-o corespondență biunivocă cu un microprocesor al unui calculator paralel. Astfel, este creată o rețea în care interacțiunea fiecărei celule cu vecinii săi este simulată de interacțiunea dintre microprocesoarele corespunzătoare.

Metoda simulării interacțiunilor locale (Local Interaction Simulation Approach, LISA) are trei avantaje de bază [14]:

(i) este extrem de rapidă; în fapt, deoarece multe mii (sau chiar milioane, dacă sunt incluse și microprocesoarele virtuale) de microprocesoare lucrează simultan, timpul de calcul este redus de un număr corespunzător de ori (egal cu numărul de microprocesoare, dacă creșterea vitezei de calcul (“*speed up*”) este perfectă [10]);

(ii) deoarece fiecare microprocesor este independent de celelalte, celulele pot fi de asemenea independente; în consecință, interacțiunile dintre microprocesoare pot varia arbitrar. În acest mod, pot fi studiate ușor cazuri extrem de complexe.

(iii) deoarece problema poate fi redusă, după cum vom vedea în secțiunea următoare la anumite relații de recurență (iterație), care coincid (exceptând coeficienții) pentru multe clase de cazuri complet diferite, același program de calcul poate fi folosit pentru a aborda o largă varietate de probleme complet diferite. Desigur, parametrii specifici problemei trebuie introdusi ca date inițiale.

În ceea ce privește aplicarea efectivă pentru studiul problemei propagării undelor (pulsurilor) în diferite medii, metoda LISA este legată de unele metode numerice specifice, bazate pe tehnicile procedurilor de calcul cu diferențe finite [15]-[17] sau folosind metoda elementului finit [18].

b) Elemente privind Metoda Diferențelor Finite [19]

Pentru a simplifica studiul aplicării Metodei Diferențelor Finite (MDF) pentru simularea propagării undelor (pulsurilor), vom considera cazul propagării unidimensionale și – în consecință – al dezvoltării în serie Mc Laurin a funcțiilor de o singură variabilă:

$$f(\varepsilon) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \varepsilon + \frac{f''(0)}{2!} \varepsilon^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \varepsilon^3 + \frac{f^{iv}(0)}{4!} \varepsilon^4 + \dots \quad (3B.3.1)$$

și:

$$f(-\varepsilon) = f(0) - \frac{f'(0)}{1!} \varepsilon + \frac{f''(0)}{2!} \varepsilon^2 - \frac{f'''(0)}{3!} \varepsilon^3 + \frac{f^{iv}(0)}{4!} \varepsilon^4 + \dots \quad (3B.3.2)$$

Din relațiile (3B.3.1) și (3B.3.2), rezultă că - **în aproximația de ordinul 2** (și pentru o schemă centrată cu diferențe finite):

$$f'(0) = \frac{f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)}{2\varepsilon} - \frac{1}{3!} f'''(0) \cdot \varepsilon^2 \quad \text{și}$$

$$f''(0) = \frac{f(\varepsilon) - 2f(0) + f(-\varepsilon)}{\varepsilon^2} - 2 \frac{f^{iv}(0)}{4!} \varepsilon^2 \quad (3B.3.3)$$

În continuare, timpul și spațiul sunt discretizate cu ajutorul unităților elementare de diferențe finite (DF) δ și – respectiv - ε , astfel încât:

$$\tilde{t} = t \cdot \delta \quad \text{și} \quad \text{respectiv} : \quad x = i \cdot \varepsilon \quad (3B.3.4)$$

Înlocuind expresiile DF (3B.3.3) în ecuația propagării undei (pulsului):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{v_\Phi^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{t}^2} \quad (3B.3.5)$$

se constată că – în primă aproximație:

$$\frac{w_{i+1,t} - 2w_{i,t} + w_{i-1,t}}{\varepsilon^2} = \frac{1}{v_\Phi^2} \cdot \frac{w_{i,t+1} - 2w_{i,t} + w_{i,t-1}}{\delta^2} ,$$

deci:

$$w_{i,t+1} = c(w_{i+1,t} + w_{i-1,t}) + 2(1-c)w_{i,t} - w_{i,t-1} \quad (3B.3.6)$$

unde:

$$c = \left(\frac{v_\Phi}{v_{FD}} \right)^2 = C^2 \quad (3B.3.7)$$

în timp ce $w_{i,t}$ este elongația undei corespunzând nodului DF i la momentul t , $v_{FD} = \varepsilon / \delta$ este viteza DF, iar $C = v_\Phi / v_{FD}$ este așa-numitul **număr** (al lui) **Courant**.

După cum este bine-cunoscut (v. și rezolvarea ecuațiilor lui Lagrange, capitolul 4), determinarea soluțiilor unei ecuații diferențiale de ordinul 2 (în particular, a ecuației (3B.3.3) a propagării undelor) necesită cunoașterea a 2 condiții inițiale sau/și finale arbitrare. Aceste condiții pot fi alese drept corespunzând stării de oscilație din domeniul studiat la momentele inițiale $t=0$: $w(x,0) = w_0(x)$ și $t=\delta$: $w(x,\delta) = w_I(x)$.

În continuare, vom considera o rețea de diferențe finite (DF) dreptunghiulară cu perioada egală cu δ (“pasul” în timp) în direcția axei t , respectiv cu perioada egală cu ε (“pasul” spațial) în direcția axei x (v. Fig.3B.3.1). Din ecuația de recurență (iterație) (3B.3.5) reiese că starea pulsului (de oscilație) din nodul $S(I, T+1)$ este determinată de stările corespunzătoare (de oscilație) din cele 4 noduri vecine: $(I\pm 1, T)$, (I, T) și $(I, T-1)$.

Se constată astfel că determinarea prin metoda diferențelor finite (DF) a stării pulsului (de oscilație) din nodul DF: $S(I, T+1)$ necesită (doar) cunoașterea stărilor pulsului din nodurile DF aflate în interiorul sau pe laturile liniei frânte pentagonale $(I-T+1, 0)$, $(I-T, 1)$, $(I, T+1)$, $(I+T, 1)$, $(I+T-1, 0)$ – așa numita *linie a determinării prin metoda diferențelor finite (DF)* [10].

În realitate, interacțiunea care corespunde evoluției pulsului (în lungul axei Ox) descrise de ecuația diferențială de ordinul doi (3B.3.5) se propagă cu vitezele $v_x = \pm v_\Phi$, deci punctele reprezentative asociate perechilor de coordonate spațiu-timp ale nodurilor DF care determină starea pulsului (de oscilație) în nodul de coordonată x_I la momentul t_{T+1} sunt situate în interiorul sau pe laturile triunghiului determinat de drepte de ecuații:

Acest triunghi este numit *conul (triunghiul) propagării interacțiunii*.

$$x = x_I + v_\Phi(\tilde{t} - \tilde{t}_{T+1}), \quad x = x_I - v_\Phi(\tilde{t} - \tilde{t}_{T+1})$$

Ținând seamă că:

$$x = i\varepsilon, \quad x_I = I \cdot \varepsilon, \quad \tilde{t} = t \cdot \delta \quad \text{și} : \quad \tilde{t}_{T+1} = (T+1)\delta$$

se obțin următoarele expresii DF ale ecuațiilor dreptelor care delimitează triunghiul propagării interacțiunilor:

$$i = I \pm C(t - T - 1) \quad (3B.3.8)$$

Fie α și β segmentele dintre intersecțiile dreptelor de interacțiune (3B.3.8) cu dreptele $t=0$ și – respectiv: $t=I$ (v. Fig.3B.3.1). Desigur, rezolvarea corectă a ecuației cu derivate parțiale (3B.3.5) necesită cunoașterea tuturor datelor inițiale dintre segmentele α și β (din interiorul triunghiului (conului) propagării interacțiunilor).

Dacă numărul lui Courant $C > 1$, triunghiul propagării interacțiunilor cuprinde linia frântă pentagonală a determinării prin metoda diferențelor finite (v. Fig.3B.3.1).

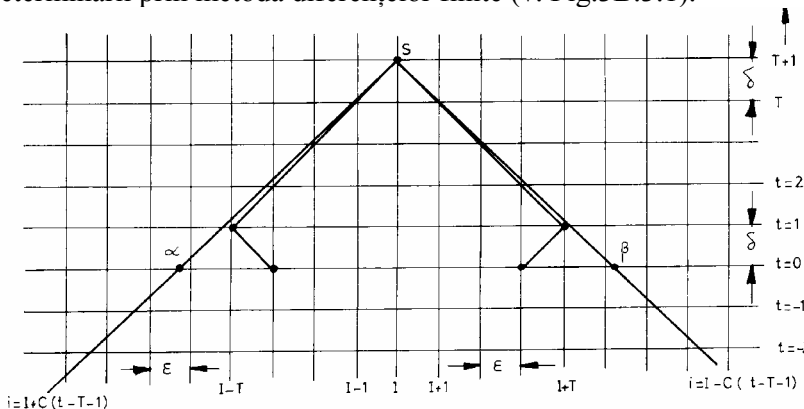


Fig. 3B.3.1

Din aceasta, rezultă o consecință importantă: dacă în cazul $C > 1$ se trece la limita $\delta \rightarrow 0$, atunci soluția ecuației DF nu poate converge către soluția ecuației diferențiale. Într-adevăr, în acest caz o modificare a valorilor inițiale necesare pentru rezolvarea ecuației diferențiale, în apropierea segmentelor marginale α și β ale domeniului propagării interacțiunilor produce o modificare a însăși soluției din nodul $S(1, T+1)$, care nu este prezentată și de soluția ecuației cu diferențe finite DF, deoarece aceste segmente sunt situate în afara domeniului de determinare (dependență) al ecuației DF. În practică, *acumularea acestor erori ale ecuației cu diferențe finite (DF) pentru valori foarte mari ale numărului de "pași" DF va conduce la divergența (instabilitatea) soluției ecuației DF în cazul $C > 1$.*

Invers, dacă $C < 1$ linia frântă pentagonală a determinării prin metoda diferențelor finite (DF) include și triunghiul propagării interacțiunilor. În acest caz, soluția ecuației cu diferențe finite (DF) ia în considerație toate datele inițiale necesare (ceace asigură convergența sa către soluția ecuației cu derivate parțiale [19]), însă include în plus unele date suplimentare pseudo-inițiale (care nu sunt necesare), ceace conduce la unele distorsiuni ale soluțiilor DF față de soluțiile ecuației cu derivate parțiale (v. Secțiunea care urmează).

c) Distorsiuni ale Pulsurilor în Simulările cu Diferențe Finite ($C < 1$) ale Propagării Undelor Elastice [20]

În cazul alegerii ideale: $C < 1$, triunghiul propagării interacțiunilor interaction coincide exact cu domeniul de determinare (al soluțiilor prin metoda) DF, ceace asigură atât stabilitatea schemei DF cât și evitarea distorsiunilor.

Din păcate, în multe cazuri – precum cele ale mediilor neomogene sau al mediilor nelineare (când viteza de fază depinde de amplitudinea pulsului) – alegerea $v_{FD} = \varepsilon / \delta = v_{\phi}$ nu este posibilă. Deoarece valorile $C > 1$ conduc (v. Secțiunea anterioară) la instabilitatea schemei DF, este necesar să se utilizeze valori $C < 1$ ale numărului lui Courant C . Din acest motiv, studiul distorsiunilor pulsurilor simulate - în cazul valorilor $C < 1$ - este util și necesar.

(i). Descrierea Analitică a Distorsiunilor Pulsurilor

Să considerăm o discretizare a pulsului incident în N componente cu amplitudinile $w_{i,-1} = a_i$ (la momentul $t = -1$) și $w_{i,0} = b_i$ (la momentul $t = 0$). Vom presupune în plus că – în afara intervalului $1 \leq i \leq N$ - elongațiile sunt nule: $w_{i,1} = w_{i,0} = 0$.

Aplicând repetat ecuația (3B.3.6), se constată că pentru $-t \leq I \leq t+N$:

$$w_{i,t} = \sum_{j=-t}^t p_{j,t} b_{i+j} - \sum_{j=-t+1}^{t+1} q_{j,t} a_{i+j} \tag{3B.3.9}$$

unde $j_{min} = \max(-t, -i)$, $j_{max} = \min(t, N-i)$, $j'_{min} = \max(-t+1, -i)$ and $j'_{max} = \min(t-1, N-i)$.

Coeficienții de transfer $p_{j,t}$ și $q_{j,t}$ depind numai de structura ecuației (3B.3.6) și nu de alegerea condițiilor inițiale (a_i și b_i). În consecință, considerând 2 variante de alegere a condițiilor inițiale: una cu toate elementele $a_i=0$, iar cealaltă cu toate elementele $b_i=0$, în timp ce în acest caz elementele a_i sunt alese egale cu amplitudinile b_i din alegerea precedentă, se obține:

$$q_{j,t} = p_{j,t-1} \quad (3B.3.11)$$

Se constată de asemenea că: $p_{j,t} = p_{-j,t}$.

În mod asemănător, alegând toate elementele $a_i=0$, iar elementele $b_i=\delta_{ij}$ (pentru un indice j arbitrar) și înlocuind ecuația (3B.3.10) în relația (3B.3.6), se obține:

$$p_{j,t+1} = c(p_{j-1,t} + p_{j+1,t}) + 2(1-c)p_{j,t} - p_{j,t-1} \quad (3B.3.12)$$

În concluzie, coeficienții de transfer satisfac aceleași relații de recurență (iterație) ca și pulsul care se propagă. Ecuația (3B.3.9) satisface condițiile inițiale la momentul $t=0$, dacă sunt alese următoarele condiții inițiale pentru coeficienții $p_{j,t}$:

$$p_{j,-1}=0, \quad p_{0,0}=1, \quad p_{j \neq 0,0}=0 \quad (3B.3.13)$$

Ecuația (3B.3.12) prezintă unele asemănări cu ecuația care generează distribuția trinomială [12]. Diferențele existente sunt:

- a) ecuația (3B.3.12) generează o distribuție tetranomială, deoarece ea cuprinde 4 termeni;
- b) al patrulea coeficient generator (corespunzând momentului $t-1$) este negativ și – în consecință – nu poate fi asociat unei probabilități ca în cazul coeficienților schemei care generează o distribuție trinomială; cu toate acestea, este totuși posibilă o interpretare formal asemănătoare cu cea prin intermediul probabilităților, deoarece suma celor 4 coeficienți este egală cu 1 (ca și în cazul distribuțiilor multinomiale),
- c) termenul negativ poate fi interpretat ca datorându-se acțiunii unui coeficient generator de tipul $2(1-c)$, însă egal cu $(-1)^{1/2}$ și aplicat repetat (de două ori).

Ținând seamă de asemănările și deosebirile cu schema generatoare a distribuției trinomială, se poate scrie expresia generală a coeficienților $p_{j,t}$ în forma:

$$p_{j,t} = \sum_{m,n,p,q} (t-q)! \frac{c^{m+n}}{m!n!} \frac{(2(1-c))^p}{p!} \frac{(\sqrt{-1})^{2q}}{q!} \quad (3B.3.14)$$

unde m, n, p, q sunt întregi, astfel încât: $m+n+p+2q=t$ și: $m-n=|j|$.

Incluzând condițiile de mai sus privind indicii de sumare, se poate obține o expresie echivalentă, dar mai compactă a coeficienților de transfer:

$$p_{j,t} = c^t \sum_{m=0}^{int(s)} \sum_{q=0}^{int(s-m)} \frac{(-1)^q (t-q)! c^{2(m-s)} (2(1-c))^{2(s-m-q)}}{m!(m+|j|)!(t-|j|-2m-2q)!q!} \quad (3B.3.15)$$

unde $s=(t-|j|)/2$.

În figura 3B.3.2 sunt prezentați coeficienții de transfer în funcție de indicele j , pentru mai multe valori ale C și t . Valorile obținute din ecuația (3B.3.15) concordă perfect cu acelea obținute prin aplicarea repetată a relației de recurență (3B.3.12). Figura 3B.3.2 arată că dependențele $p_{j,t}=f(C,t)$ a coeficienților de transfer se schimbă considerabil doar într-un mic interval în jurul valorii $C=1$, în timp ce forma generală a dependențelor de mai sus se schimbă foarte puțin pentru $0.1 < C < 0.99$.

Valabilitatea relației pentru coeficienții de transfer a fost verificată considerând pulsuri rectangulare și sinusoidale, definite prin următoarele condiții inițiale:

(i). Pulsul rectangular

$$\begin{aligned} w(i,0) &= 1, \quad w(i+1) = 1, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad w(0,0) = \frac{C}{2}, \\ w(N,0) &= \frac{2-C}{2}, \quad w(1,1) = \frac{2-C}{2}, \quad w(N+1,1) = \frac{C}{2}, \end{aligned} \quad (3B.3.16)$$

(ii). Pulsul sinusoidal

$$w(i,t) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}\left(i - \frac{1-C}{2} - Ct\right)\right), \quad t=0,1, \quad 1 \leq i \leq N \quad (3B.3.17)$$

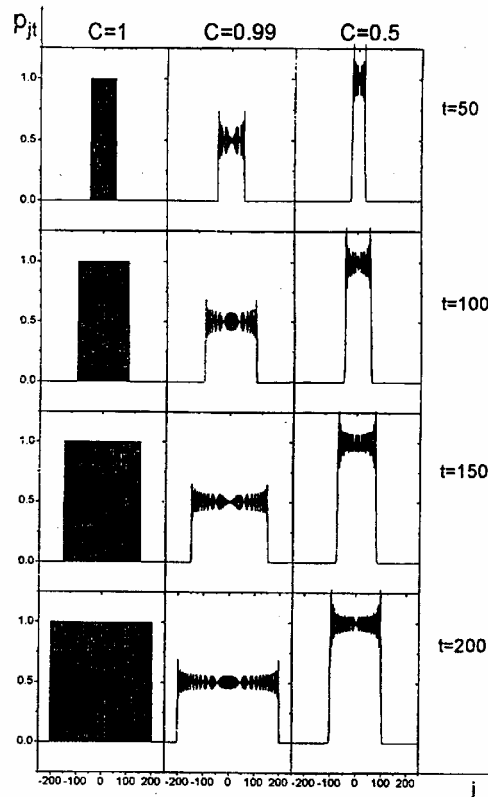


Fig. 3B.3.2

Rezultatele obținute analitic (ecuațiile (3B.3.10) și (3B.3.15)) au fost comparate cu acelea obținute cu ajutorul simulărilor numerice (ecuația (3B.3.6)). Figura 3B.3.3 prezintă această comparație pentru $C=0.5$ și $t=200$ în cazul unui puls rectangular, respectiv pentru $t=400$ în cazul unui puls sinusoidal. Concordanța dintre rezultatele teoretice (graficele din stânga) și cele numerice (graficele din dreapta) este foarte bună.

(ii) Comportarea asimptotică

Relația (3B.3. 16) care dă coeficienții $p_{j,t}$ este destul de complicată. De asemenea, operațiile de însumare durează foarte mult pentru calculele numerice corespunzând unor valori mari ale t . Deoarece calculul analitic al distorsiunilor este util doar pentru valori mari ale numărului t de pași DF, este necesar să fie studiată problema aproximațiilor asimptotice pentru coeficienții de transfer. În acest sens, oscilațiile care apar în graficele din Figura 3B.3.3 sugerează că aproximațiile asimptotice pot fi exprimate cu ajutorul integralelor Airy [22].

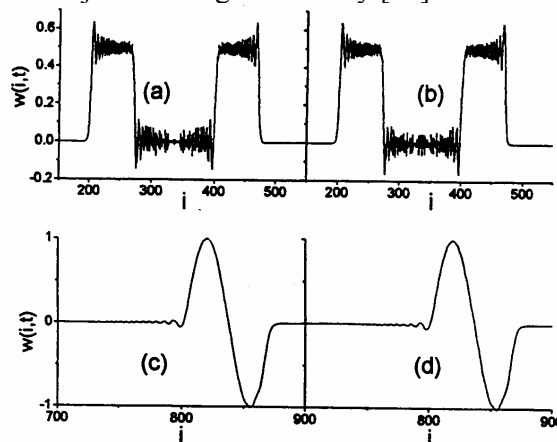


Fig. 3B.3.3

Observând că nivelul mediu al oscilațiilor coeficienților $p_{j,t}$ este egal cu $1/2C$, este posibil să scriem:

$$p_{j,t} = \frac{1}{2C} \cdot \begin{cases} \frac{1}{3} - \int_0^S Ai(z) dz & , \text{ pentru } S \geq 0, \\ \frac{1}{3} - \int_0^{|S|} Ai(-z) dz & , \text{ pentru } S \leq 0, \end{cases} \quad (3B.3.18)$$

unde $Ai(\pm)$ sunt funcțiile lui Airy, iar $S = S(j,t)$ reprezintă limita de sus a integralei, care trebuie să fie determinată.

Funcția $S(j,t)$ trebuie să fie evaluată numeric pentru diferite valori ale C și t . Considerând că soluția trebuie să fie simetrică în jurul valorii $j=0$, precum și faptul că soluția trebuie să se anuleze pentru $j < -Ct$ și $j > Ct$, am adoptat expresia:

$$S(j,t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{C(1-t) - 1 - |j|}{m - n(0.55 - C)^2} \quad (3B.3.19)$$

cu doi parametri “liberi” m și n , care pot fi evaluați prin metoda gradientului, impunând condiția “fitării” optime a primelor 5 maxime ale coeficienților de transfer simulați. Rezultatele obținute pentru acești parametri sunt:

$$m \approx 0,362 \text{ și } n \approx 0,553 \quad (3B.3.20)$$

Compararea valorilor exacte (date de relația (3B.3.16)) și a celor date de aproximația asimptotică (relațiile (3B.3.18) și (3B.3.19)) ale coeficienților de transfer conduce la următoarele rezultate:

(i) concordanța dintre valorile date de aproximația asimptotică și cele exacte este foarte bună și crește în timp, după cum este de așteptat. Comportarea asimptotică este atinsă întotdeauna pentru $t > 4000$, cu erori relative mai mici decât $\leq 0,6\%$;

(ii) amplitudinile oscilațiilor coeficienților de transfer $p_{j,t}$ - evaluate pe baza aproximației asimptotice – sunt mai mici decât cele reale;

(iii) erorile relative cresc sistematic cu distanța de la regiunea $t(1-C) \leq j \leq t(1+C)$ (corespunzând limitelor de propagare) și cu diferența $|C - 0,5|$.

(iii) Evaluarea Distorsiunilor Pulsurilor

Pentru a evalua distorsiunile pulsurilor, trebuie utilizate unele expresii aproximative ale elongației pulsului simulat. Se obține:

$$a_{j-1} \approx b_j + (C-1) \left. \frac{\partial b_k}{\partial j} \right|_{k=j} \quad (3B.3.21)$$

În consecință, ecuațiile (3B.3.9) devin:

$$w_{it} = \sum_{j=-t}^t \Delta p_{j,t} b_{i+j} - (C-1) \sum_{j=-t+1}^{t+1} p_{j-1,t-1} \left. \frac{\partial b_k}{\partial k} \right|_{k=j+i} \quad (3B.3.22)$$

unde:

$$\Delta p_{j,t} = p_{j,t} - p_{j-1,t-1} \approx (2-C) \left. \frac{\partial p_{j,t}}{\partial j} \right|_{t, j+C/2} \quad (3B.3.23)$$

Dacă $t > N \gg 1$, ecuația (3B.3.22) poate fi scrisă cu ajutorul integralelor Riemann, presupunând că indicii j și b pot avea valori continue:

$$w_{it} \approx \int_{i+x=0.5}^{N+0.5} \left((2-C) \frac{\partial p_{x,t}}{\partial x} b_{i+x} + (1-C) \cdot p(x-1, t-1) \frac{\partial b}{\partial x'} \Big|_{i+x} \right) dx \quad (3B.3.24)$$

Figura 3B.3.4 prezintă dependența cantității $\Delta p_{j,t}$ de indicele j pentru $t=200$, $C=1$ și $C=0.5$.

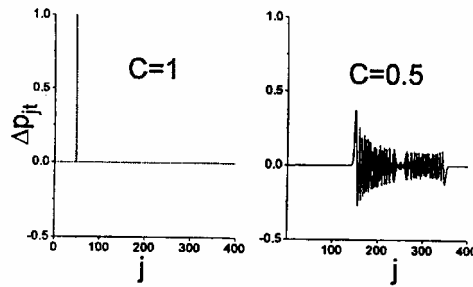


Fig. 3B.3.4

Această reprezentare grafică și ecuația (3B.3.24) permit să se dea o descriere calitativă a distorsiunilor. Cel de al doilea termen din ecuația (3B.3.24) este un termen pur de distorsiune, care dispare pentru $C=1$ și depinde puternic de panta pulsului inițial. Prin compararea reprezentărilor grafice pentru $C=1$ și $C=0.5$, poate fi evidențiat efectul distorsiunilor produse de primul termen din ecuația (3B.3.24). Amplitudinea pulsului real (dată de amplitudinea primului maxim al $\Delta p_{j,t}$) este mai mică decât cea așteptată, în plus apărând câteva distorsiuni suplimentare. Astfel, primul extrem negativ din stânga poate fi înțeles în funcție de pulsul de semn opus care-l urmează pe cel real, după cum se arată în secțiunea următoare.

În general, evaluarea distorsiunii unui puls bazată pe ecuația (3B.3.24) este destul de dificilă și poate fi obținută doar cu ajutorul unor calcule numerice. Cu toate acestea, în unele cazuri particulare, pot fi obținute relații semiempirice specifice pentru a descrie amplitudinea primului extrem (vârf) al distorsiunii.

Fie d raportul (măsurat în procente) amplitudinilor pulsului de semn opus, respectiv pulsului real. Pentru pulsurile Gaussiene, respectiv sinusoidal se găsește:

$$d \cong -5,7 + 1.4 \times 10^{-3} t, \quad \text{pentru } 5000 \leq t \leq 10000,$$

$$\text{respectiv: } d \cong -7.7 + 5.14 \times \log(t), \quad \text{pentru } 200 \leq t \leq 3000.$$

Valabilitatea acestor relații semiempirice poate fi verificată numeric, constatându-se o concordanță satisfăcătoare cu rezultatele simulărilor numerice (erori $\leq 2\%$ pentru un domeniu larg de valori ale t).

Deosebit de interesant este cazul pulsului rectangular. În acest caz, deoarece:

$$\frac{\partial b}{\partial j} \Big|_{i+j} = 0$$

aproximația asimptotică a ecuației (3B.3.24) conduce la:

$$w_{i,t} \approx (2-C)(p_{N+0.5-i,t} - p_{0.5-i,t}) \quad (3B.3.25)$$

Din ecuația (3B.3.18), reiese atunci că:

$$w_{i,t} \approx (2-C) \left(\frac{1}{3} - \int_0^{|S(j=N+0.5-i)|} Ai(-z) dz \right) \quad (3B.3.26)$$

expresie care concordă bine (erori $\leq 1\%$) cu rezultatele simulărilor numerice.

d) Fenomene Numerice intervenind în Simulările DF ale Propagării Undelor [20]

Simulările prin Metoda Diferențelor Finite (DF) sunt totuși supuse anumitor erori, datorate unor fenomene numerice specifice. Principalele fenomene numerice (instabilitate, dispersie, ne-convergență) specifice simulărilor propagării undelor prin medii ideale au fost observate încă din

anii 1920, când R. Courant, H. Friedrichs și W. Lewy [19a] au stabilit condițiile în care apar instabilitățile ($C = \tau v_{\Phi} / \varepsilon > 1$, unde C este criteriul de similitudine al lui Courant, τ , ε sunt pașii DF temporal, respectiv spațial), respectiv dispersia ($C = \tau v_{\Phi} / \varepsilon < 1$) pulsului simulat în cursul propagării printr-un mediu ideal (în asemenea medii, viteza propagării fazei v_{Φ} este aceeași pentru toate componentele armonice ale unui puls arbitrar). Mai târziu, profesorul P.P. Delsanto (Politecnico di Torino) și colaboratorii săi au evidențiat [13] apariția unor distorsiuni specifice în cazul simulărilor care folosesc valori mai mici decât 1 ale criteriului de similitudine al lui Courant, cea mai importantă constând în apariția unei distorsiuni opuse față de pulsul simulat, care urmează imediat acest puls (simulat).

Secțiunea de față prezintă rezultatele obținute [20] cu privire la principalele fenomene numerice specifice simulărilor cu diferențe finite (DF) ale propagării pulsurilor (în particular, ultrasonore) prin medii ideale.

(i) *Rezultate Numerice*

Ecuția (3B.3.6) a fost utilizată pentru a studia propagarea pulsurilor pentru diferite alegeri ale formei pulsurilor inițiale și diferite valori ale numărului lui Courant C . În figurile care urmează, numărul de pași în timp t a fost ales astfel ca să avem același timp real (fizic):

$$\tilde{t} = t \cdot \delta$$

pentru simulările cu diferite valori ale C , presupunând că pasul spațial ε este independent de numărul lui Courant ($\varepsilon=1$).

Considerând că, pentru aplicații, lungimea fizică poate fi măsurată (scalată) prin lățimea pulsului, distanța fizică poate fi definită prin unități alese egale cu lățimea pulsului inițial. În cazurile de interes practic (spre exemplu, în tomografie sau evaluări nedistructive), lungimile de undă caracteristice pulsurilor sunt uzual de ordinul milimetrilor, în timp ce dimensiunile probelor (eșantioanelor) sunt de ordinul de mărime al câtorva centimetri. În consecință, este necesar – în mod uzual – să se considere propagările doar pe distanțe egale cu cca. 100 ori lățimea pulsului.

Rezultatele obținute pentru propagarea unor pulsuri având inițial forme rectangulare, sinusoidale sau Gaussiene sunt prezentate - pentru diferite valori ale C – în Figura 3B.3.5. Numărul pașilor în timp a fost ales: $t = 4500$ și 1500 pentru $C=0.3$, respectiv $C=0.9$. Cele trei cazuri corespund unei deplasări a pulsului cu aproximativ 15-20 lățimi ale pulsului inițial (70 noduri ale rețelei de diferențe finite pentru pulsuri rectangulare și sinusoidale, respectiv 50 noduri DF pentru pulsurile Gaussiene).

După cum era de așteptat, distorsiunile numerice cresc odată cu scăderea valorilor numărului lui Courant C . În general, există o strânsă dependență a distorsiunilor de panta pulsului (după cum s-a arătat deja în secțiunea 3B.3.c.(iii)). Acest lucru explică și comportarea foarte neplăcută a pulsurilor rectangulare sau sinusoidale modulate Gaussian (rezultatele corespunzând ultimului caz nefiind prezentate aici din motive de spațiu limitat). Analiza numerică efectuată arată că distorsiunile scad dacă pulsurile inițiale sunt discretizate printr-un număr mai mare de componente (peste un număr mai mare de noduri ale rețelei DF de diferențe finite). Cu toate acestea, în cazul unei asemenea îmbunătățiri (echivalentă cu o lățime mai mare a pulsului), va fi necesar un număr mai mare de iterații pentru a descrie propagarea pulsului pe aceeași distanță fizică.

Figura 3B.3.6 prezintă amplitudinea primului vârf al distorsiunii în funcție de timp pentru pulsuri sinusoidale și – respectiv - Gaussiene.

Comparația dintre cele două reprezentări grafice conduce la câteva constatări de interes practic. Pentru durate scurte ale propagării, distorsiunile sunt mai mari pentru pulsurile sinusoidale și aproape nesemnificative pentru pulsurile Gaussiene. În cazul duratelor mai mari de propagare, distorsiunile pulsurilor sinusoidale se stabilizează (la ceva mai puțin de 10% din amplitudinea pulsului simulat), în timp ce pentru pulsurile Gaussiene distorsiunile continuă să crească (până la 20% sau chiar mai mult din amplitudinea pulsului simulat). În concluzie, din punctul de vedere numeric, pulsurile Gaussiene par să fie cele mai convenabile pentru aplicații, atunci când numărul de iterații este suficient de mic.

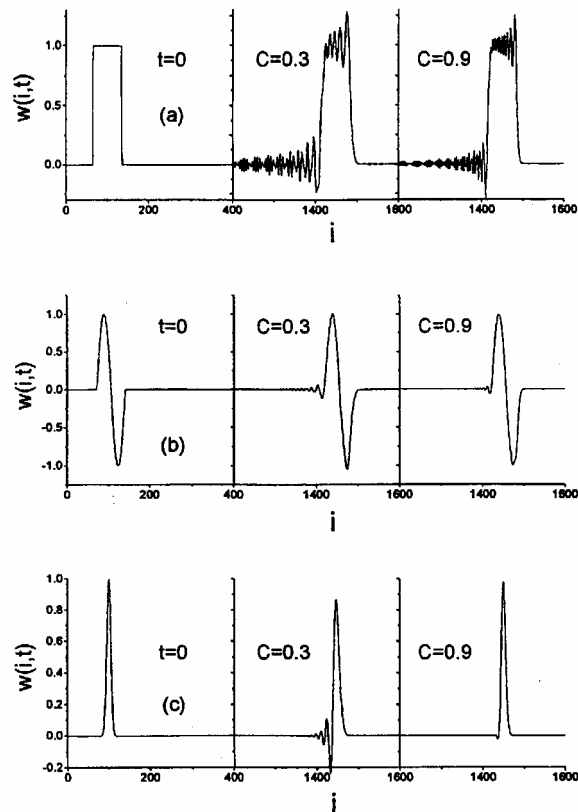


Fig. 3B.3.5

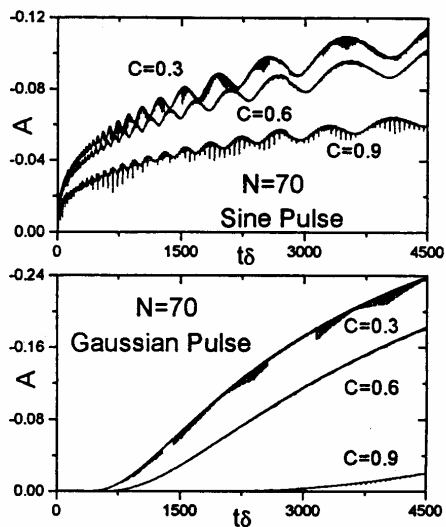


Fig. 3B.3.6

În Figura 3B.3.7 este prezentată o analiză similară aceleia din Figura 3B.3.6, în scopul testării dependenței primului vârf al distorsiunii de numărul componentelor care descriu pulsul inițial. Amplitudinea vârfului distorsiunii corespunzând unui puls sinusoidal descris de $N= 50, 75$ și – respectiv - 100 componente DF este prezentată în funcție de timpul fizic:

$$\tilde{t} = t \cdot \delta$$

pentru $C= 0.3$. După cum este de așteptat, această amplitudine scade considerabil odată cu creșterea numărului N de componente DF ale pulsului simulat.

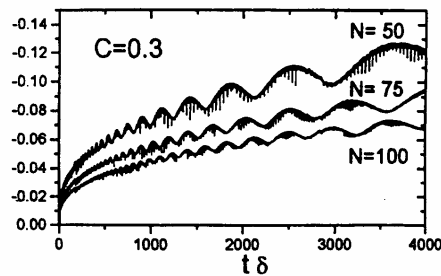


Fig. 3B.3.7

Studiul numeric detaliat efectuat permite o descriere a structurii pulsului propagat, cu caracteristici dependente calitativ de forma pulsului inițial, de numărul pașilor temporali efectuați și – respectiv – de numărul componentelor DF ale pulsului simulat, precum și de numărul lui Courant C , în bună concordanță cu prezicerile teoretice ale Secțiunii 3B.3.c.

(ii) *Fenomene Numerice specifice Simulărilor DF (cu valori mai mici decât 1 ale numărului lui Courant) ale Propagării Undelor*

Rezultatele obținute indică faptul că simulările DF adaugă (în durata simulării propagării pulsului real, în plus față de acesta) câteva “pseudo pulsuri”. Dacă pulsul original este localizat inițial între $i=1$ și $i=N$, după t pași temporali, el va fi localizat în regiunea $1+C(t-1) \leq i \leq N+C(t-1)$. În afara acestei regiuni, apar câteva pseudopulsuri, care pot fi clasificate după cum urmează:

(a) **Distorsiunea (pulsul parazit) în sens opus:** care apare în imediata continuare a simulării pulsului real. Amplitudinea acestei distorsiuni, opusă ca sens față de pulsul real, este la început direct proporțională cu panta ultimei părți a pulsului incident. Pentru valori mari ale t , o asemenea distorsiune poate atinge amplitudini mai mari decât 10% din amplitudinea pulsului real, pe care-l urmează.

(b) **Un domeniu de distorsiuni cuasi-nule:** localizat între pulsul “ecou” (vezi în continuare) și distorsiunea de sens opus care urmează simularea pulsului real. Este greu (practic imposibil) să se recunoască forma acestor distorsiuni, deoarece amplitudinea lor este foarte mică (aproximativ 10^{-3} din amplitudinea pulsului real).

(c) **Un domeniu de distorsiuni practic nule:** localizat în regiunea exterioară față de pulsul real și – respectiv – “ecou”:

$$i \leq -C \cdot t - 2\sqrt[3]{t} \quad \text{și} \quad i \geq C \cdot t + N + 2\sqrt[3]{t}$$

Distorsiunile din această regiune sunt mai mici decât 10^{-6} din amplitudinea pulsului real.

(d) **Un puls “ecou”,** datorat imposibilității de a satisface exact concomitent (pentru $C < 1$) cerințele de formă simetrică (respectiv antisimetrică) ale pulsului simulat, pentru cele două condiții inițiale. Pulsul “ecou” este asemănător ca formă cu pulsul real și se propagă în sens opus, cu aproximativ aceeași viteză. Acest puls prezintă un maxim, aproximativ în poziția:

$$i = -C \cdot t + \sqrt[3]{t} \quad (\text{pentru } C = 0.5)$$

iar semilățimea sa crește în timp, devenind stabilă pentru durate mari ale simulării propagării și având aproximativ aceeași lungime N ca și pulsul real. Amplitudinea relativă a pulsului “ecou” față de cel real depinde de panta părții frontale a pulsului: până la 10% pentru pulsurile rectangulare, 1% pentru pulsurile sinusoidale, respectiv cca. 0,1% pentru pulsurile Gaussiene.

Concluzii

Analiza distorsiunilor care intervin în simulările numerice este o problemă interesantă din punct de vedere matematic și este utilă pentru diferite aplicații practice. În fapt, este necesar să existe certitudinea că orice efect sau rezultat care este obținut prin simularea numerică are într-adevăr caracter fizic, nefiind datorat unor probleme numerice (spre exemplu, absenței convergenței sau stabilității).

Se constată că există o foarte bună concordanță între distorsiunile evaluate în baza abordării analitice prezentate mai sus și rezultatele numerice. Analiza efectuată a simulărilor utilizând scheme cu diferențe finite (cu valori $C < 1$) ale propagării undelor evidențiază următoarele principale rezultate:

(i) abordarea statistică bazată pe proprietățile momentelor pulsurilor sugerează existența distorsiunilor, care – în general – micșorează întrucâtva viteza de propagare a pulsurilor;

(ii) folosirea unor “coeficienți de transfer” $p_{i,t}$ permite descrierea componentelor pulsurilor simulate; pentru valori uzuale ale numerelor de pași din schemele cu diferențe finite (DF) acești coeficienți de transfer pot fi calculați cu ajutorul unei distribuții tetranomiale, în timp ce comportarea lor asimptotică poate fi descrisă precis cu ajutorul integralelor Airy;

(iii) a fost evidențiată existența – în afara pulsului real – a următoarelor distorsiuni caracteristice: “semnalul (pulsul) opus” care urmează după pulsul real, “pulsul ecou” care se deplasează în sensul opus deplasării pulsului real (această distorsiune este generată de imposibilitatea de a satisface concomitent – pentru $C < 1$ – condițiile inițiale), domeniile “quasi-nul” și – respectiv “nul”, caracterizate de amplitudini extrem de mici ale oscilațiilor locale simulate;

(iv) existența unor diferențe remarcabile între distorsiunile unor pulsuri de forme diferite; în unele cazuri (spre exemplu, al pulsurilor sinusoidale) distorsiunile apar după un număr relativ mic de iterații, dar ceva mai târziu se stabilizează ca dimensiune, în timp ce în alte cazuri (spre exemplu, al pulsurilor Gaussiene), distorsiunile devin sensibile abia după mulți pași în timp, dar ele cresc apoi până la valori mai mari; în toate cazurile, vitezele de propagare sunt foarte puțin afectate, deoarece forma părții din față a pulsului este – în general – bine păstrată;

(v) în timp ce există o diferență deosebit de mare (“dramatică”) între comportările corespunzând valorilor $C=0,99$ și $C=1$, diferențele care apar între simulările corespunzând unor valori mai mici ale C (spre exemplu, între cele corespunzând valorilor $C=0,1$ și $C=0,99$) sunt relativ mici. În concluzie, în condițiile în care nu poate fi asigurată întotdeauna (spre exemplu, pentru medii neliniare sau 2-D, respectiv 3-dimensionale) alegerea valorii $C=1$, alegerea valorii numărului Courant nu mai este importantă.

REFERENCES

1. A.A.Michelson, E.W.Morley, Amer.J.Sci.,**31**,377(1886);
ibid., Amer.J.Sci.,**34**(203)333-45(1887).
2. a) W.Kaufmann, Gött. Nachr. Math.Nat.Klasse **143**(1901);
b) A.H.Bücherer, Vern.Deutsch.Phys. Ges. **6**,688(1908);
c) G.Neumann, Ann.d.Phys., **45**,529(1914);
d) Ch.E.Guye,Ch.Lavanchy, Arch.Sc.Phys.Nat.Genève, **41**,286(1916);
e) M.Nacken, Ann.d.Phys., **25**, 313(1935).
3. W.Bertozzi, Am.J.Physics, **32**,551(1964).
4. A.Einstein, Ann.d.Phys., **17**,891(1905).
5. a) Williams, Roberts, Nature **145**,102(1940);
b) P.Auger, Maze, Compt.Rend., **213**,38(1941);
c) Maze, Chaminade, Compt.Rend., **214**,266(1942);
d) Chaminade, Fréon, Maze, Compt. Rend., **218**,402(1944);
e) Cacciapuoti, Riccioni, Ricerca Sci., **12**,874(1941);
f) Nereson, Rossi, Phys.Rev., **64**,199(1943).
6. a) H.E.Ives, G.R.Stilwell, Journ.Opt.Soc.Amer.,**28**,215(1938);
ibid.,**31**,369(1941);
b) R. Lennuier, Rev.Sci., **85**,740(1947).
7. M.A.Tonnelat “Les Principes de la Théorie Électromagnétique et de la Relativité”,
Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1959.
8. a) A. Einstein, M. Grossmann, Z. Math. u. Physik, **62**,225-61(1913);
ibid., **63**,215-25(1914);
b) A. Einstein, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., Berlin, II, 1030-35(1914), 778-801(1915),

- 831-39 (1915), 844-47(1915), 688-96(1916), 154-67(1918).
9. a) K. Schwarzschild, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., Berlin, 189-96(1916);
b) L.D. Landau, E.M. Lifschitz "Théorie du champ", Édit.Mir, Moscow, 1966.
 10. a) D.W. Hills "The Connection Machine", Proc. Conf. on Sci. Appl. of the Connection Machine (edit.by H. D. Simon), World Sci. 1989 (and MIT Press, 1985);
b) P.J. Denning, W.F. Tichy "Highly parallel computation", Science, **250**,1222(1990).
 11. P.P. Delsanto, H.H. Chaskelis, T. Whitcombe, R.B. Mignogna "Connection machine simulation of boundary effects in ultrasonic NDE", in Nondestructive Characterization of Materials (edit. by C.O.Ruud, R.E.Green and J.F.Bussière), vol.4, p.215, Plenum Press, 1991.
 12. P.P. Delsanto, T. Whitcombe, N.K. Batra, H.H. Chaskelis, R.B. Mignogna "Connection Machine Simulation of Ultrasonic Wave Propagation in Attenuative Materials", in Review of Progress on QNDE (edit.by D.O. Thompson and D. E. Chimenti), vol.10A, p.241, Plenum Press, 1991.
 13. P.P. Delsanto, T. Whitcombe, H.H. Chaskelis, R.B. Mignogna "Connection Machine Simulation of Ultrasonic Wave Propagation in Materials I: the One-Dimensional Case", Wave Motion, **15**,65 (1992).
 14. G. Kaniadakis, P.P. Delsanto, C.A. Condat, Mathl. Comput. Modelling, **17**(10)31-42(1993).
 15. B. Carnahan, H.A. Luther, J.O. Wilkes "Applied Numerical Methods", J.Wiley, 1969.
 16. W.F. Ames "Numerical Methods for Partial Differential Equations", Academic Press, 1977.
 17. W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling "Numerical Recipes", Cambridge Univ. Press, 1986.
 18. A.K. Noor "Bibliography of books and monographs on finite element technology", Appl. Mech. Res., **44**,307(1991).
 19. a) R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy "On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics", Math. Annalen **100**,32-78(1928);
b) ibid., IBM Journal, p.215-38(1967).
 20. D. Iordache, P.P. Delsanto, M. Scalerandi, Mathl. Comput. Modelling, **25**(6)31-43(1997).
 21. P.P. Delsanto, G. Kaniadakis, M. Scalerandi, D. Iordache "Time Scaling in the parallel processing simulation of diffusion processes", Computers Math. Applic., **27**(6)51-62(1994).
 22. M. Abramowitz, I. A. Stegun "Handbook of Mathematical Functions", National Bureau of Standards – Applied Mathematical Series no.**55**, p.475-78(1972).
 23. M.A.Tonnelat "Les Principes de la Théorie Électromagnétique et de la Relativité", Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1959.
 24. D.Iordache "Fundamentele Fizicii moderne", Atelierele poligrafice ale Institutului Politehnic din București, 1985.