7. Propagarea undelor electromagnetice în medii anizotrope

7.1. Ipoteze de bază

Considerăm un mediu dielectric ($\sigma = 0$), neutru din punct de vedere electric ($\rho_{lib} = 0$), nemagnetic ($\mu_r = 1 \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$), care prezintă anizotropie electrică (proprietățile optice ale mediului depind de direcția de propagare a luminii). Într-un mediu anizotrop direcția vectorului de undă nu coincide cu aceea a razei luminoase. Ecuațiile lui Maxwell sunt valabile şi în medii anizotrope (anizotropia mediului intervine în legile de material).

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{7.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \tag{7.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \tag{7.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \tag{7.4}$$

Pentru un mediu liniar neabsorbant, relația dintre $\vec{D}$ şi $\vec{E}$ este de forma:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \overline{\overline{\chi_e}} \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \overline{\overline{\varepsilon_r}} \vec{E} \;\Rightarrow\; \vec{D} = \overline{\overline{\varepsilon}} \vec{E} \tag{7.5}$$

unde $\overline{\overline{\chi_e}}$ este tensorul susceptibilitate electrică, iar $\overline{\overline{\varepsilon}}$ este tensorul permitivitate electrică absolută. Relația (7.5) poate fi scrisă sub formă matricială:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

Această relație arată că în general $\vec{D}$ nu este paralel cu $\vec{E}$.

Pe baza legii conservării energiei electromagnetice se poate demonstra că tensorul $\overline{\overline{\varepsilon}}$ este simetric ($\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}$). Astfel în loc de 9 componente apar 6 componente independente. O matrice simetrică poate fi adusă întotdeauna la forma diagonală printr-o transformare ortogonală, căreia îi corespunde o rotație a axelor de coordonate. Sistemul de referință în care matricea este diagonală se numeşte sistemul axelor principale. În acest caz relația (7.6) devine:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

sau:

$$D_x = \varepsilon_x E_x, \; D_y = \varepsilon_y E_y, \; D_z = \varepsilon_z E_z \tag{7.8}$$

Cele trei axe particulare alese se numesc <u>axe principale</u> sau axe de simetrie electrică a mediului, iar constantele $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ sunt <u>permitivitățile principale</u>. Se constată că <u>vectorii $\vec{D}$ şi $\vec{E}$ sunt paraleli numai de-a lungul axelor principale</u>. Această legătură dintre $\vec{E}$ şi $\vec{D}$ ne arată că atunci când o sursă de radiație emite lumină în toate direcțiile viteza de fază depinde de direcția de propagare, iar locul geometric al punctelor cu aceeaşi fază (aceeaşi suprafață de undă) nu mai este în general o sferă (de regulă razele nu mai sunt normale la suprafețele de undă).

Din relația (5.36) ($n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$) rezultă că avem trei viteze principale de fază v_x, v_y, v_z şi trei indici de refracție principali n_x, n_y, n_z:

$$n_x = \frac{c}{v_x} = \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_0}},\ (\mu = \mu_0) \Rightarrow \varepsilon_x = \varepsilon_0 n_x^2 \tag{7.9}$$

$$n_y = \frac{c}{v_y} \Rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_0 n_y^2 \tag{7.9'}$$

$$n_z = \frac{c}{v_z} \Rightarrow \varepsilon_z = \varepsilon_0 n_z^2 \tag{7.9''}$$

$$v_x \overset{(7.9)}{=} \frac{c}{\sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_0}}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_x}} \Rightarrow v_x^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_x} \tag{7.10}$$

$$(7.9') \Rightarrow v_y^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_y} \tag{7.10'}$$

$$(7.9'') \Rightarrow v_z^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_z} \tag{7.10''}$$

7.2. Structura unei unde electromagnetice plane într-un mediu anizotrop

Considerăm o undă monocromatică plană care se propagă în mediul anizotrop.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)} = \vec{E}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{v}\cdot\vec{u}_k\cdot\vec{r}\right)} \\ \vec{D} &= \vec{D}_0 e^{i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)} = \vec{D}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{u}_k\cdot\vec{r}}{v}\right)} \end{aligned} \tag{7.11}$$

Înlocuind $\frac{\partial}{\partial t}$ cu $i\omega$ şi ∇ cu $-i\vec{k}$ în ecuațiile lui Maxwell (7.1) – (7.4) obținem:

$$-i\vec{k}\times\vec{H} = i\omega\vec{D} \Rightarrow \vec{D}\perp\vec{k},\ \vec{D}\perp\vec{H} \tag{7.12}$$

$$-i\vec{k}\times\vec{E} = -\mu_0 i\omega\vec{H} \Rightarrow \vec{H}\perp\vec{k},\ \vec{H}\perp\vec{E} \tag{7.13}$$

$$-i\vec{k}\cdot\vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H}\perp\vec{k} \tag{7.14}$$

$$-i\vec{k}\cdot\vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{D}\perp\vec{k} \tag{7.15}$$

Se constată că vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ sunt perpendiculari între ei. De asemenea $\vec{D}$ şi $\vec{H}$ oscilează perpendicular pe direcția de propagare determinată de vectorul de undă $\vec{k}$. Vactorii $\vec{D}$, $\vec{H}$ şi $\vec{k}$ formează un triedru tridreptunghic. Planul determinat de vectorii $\vec{D}$şi $\vec{k}$ se numeşte plan de polarizare a undei, iar planul format de vectorii $\vec{D}$ şi $\vec{H}$ (perpendiculari pe $\vec{k}$) este planul undei. Vectorul $\vec{E}$ nu este perpendicular pe $\vec{k}$ deoarece:

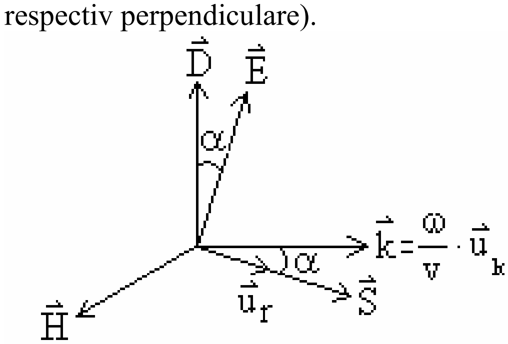
$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\overset{(7.8)}{=}\frac{1}{\varepsilon_x}\cdot\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon_y}\cdot\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{1}{\varepsilon_z}\cdot\frac{\partial D_z}{\partial z}\neq 0 \qquad (7.16)$$

$$\nabla\cdot\vec{E}\neq 0 \;\Rightarrow\; -i\,\vec{k}\cdot\vec{E}\neq 0 \;\Rightarrow\; \vec{E}\text{ şi }\vec{k}\text{ neperpendiculari} \qquad (7.17)$$

(deoarece în general $\varepsilon_x\neq\varepsilon_y\neq\varepsilon_z$).

Vectorul $\vec{E}$ este perpendicular pe $\vec{k}$ numai atunci când $\vec{k}$ se confundă cu una din cele trei axe principale. Deoarece $\vec{H}\perp\vec{k}$, $\vec{H}\perp\vec{E},\vec{H}\perp\vec{D}$ rezultă că vectorii $\vec{D}$, $\vec{E}$ şi $\vec{k}$ sunt coplanari.

Vectorul Poynting $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ arată sensul de propagare a energiei electromagnetice. Vectorii $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{S}$ formează un alt triedru tridreptunghic ($\vec{S}\perp\vec{E}$, $\vec{S}\perp\vec{H}$). Deoarece $\vec{H}\perp\vec{S}$ rezultă că vectorii $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{k}$ şi $\vec{S}$ sunt coplanari. $\vec{S}$ se află în planul de polarizare ($\vec{D},\vec{k}$) iar direcţia sa este cea a razei de lumină. Vectorii $\vec{S}$ şi $\vec{k}$ sunt coliniari numai în cazul unui mediu izotrop. Unghiul format de vectorii $\vec{D}$ şi $\vec{E}$ este egal cu unghiul dintre $\vec{S}$ şi $\vec{k}$ (unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare).



Folosind relaţiile (7.12) , (7.13) şi proprietatea produsului mixt $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=$ $=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$ putem scrie densitatea volumică de energie electromagnetică ρ_E sub forma:

$$(7.12)\;\Rightarrow\;\vec{k}\times\vec{H}=-\omega\vec{D}\;;\;(7.13)\;\Rightarrow\;\vec{k}\times\vec{E}=\omega\mu_0\vec{H}=\omega\vec{B}$$

$$\rho_E=\frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2}+\frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2}=\frac{1}{2}\left[\vec{E}\cdot\left(-\frac{\vec{k}\times\vec{H}}{\omega}\right)+\vec{H}\cdot\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}\right]=\frac{1}{2\omega}\left[-\underset{A}{\vec{E}}\big(\underset{B}{\vec{k}}\times\underset{C}{\vec{H}}\big)+\underset{A}{\vec{H}}\big(\underset{B}{\vec{k}}\times\underset{C}{\vec{E}}\big)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\omega}\left[-\vec{k}\left(\vec{H}\times\vec{E}\right)+\vec{k}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\right]\;\Rightarrow\;\rho_E=\frac{\vec{k}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)}{\omega}\;\Rightarrow\;\boxed{\rho_E=\frac{\vec{k}\cdot\vec{S}}{\omega}} \qquad (7.18)$$

sau:

$$\vec{k}=\frac{\omega}{v}\cdot\vec{u}_k\;\Rightarrow\;\rho_E=\frac{\vec{u}_k\cdot\vec{S}}{v}=\frac{S\cdot\cos\alpha}{v} \qquad (7.19)$$

În cazul în care unda electromagnetică se propagă într-un mediu izotrop $(\alpha=0)$ obţinem relaţia cunoscută [(5.71) sau (5.114)] :

$$\rho_E=\frac{S}{v_i}\;\Rightarrow\;S=v_i\cdot\rho_E \qquad (7.20)$$

Din relațiile (7.19) și (7.20) obținem:

$$\frac{S}{v_i} = \frac{S \cdot \cos\alpha}{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = v_i \cdot \cos\alpha} \tag{7.21}$$

Diferențiind $\rho_E = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right)$ și folosind relația (7.5) obținem:

$$d\rho_E = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot d\vec{D} + \vec{D}\cdot d\vec{E} + \vec{H}\cdot d\vec{B} + \vec{B}\cdot d\vec{H}\right),\ \vec{D} = \bar{\bar{\varepsilon}}\,\vec{E},\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H}.\ d\left(\bar{\bar{\varepsilon}}\,\vec{E}\right) = \bar{\bar{\varepsilon}}\, d\vec{E} \ \Rightarrow$$

$$d\rho_E = \vec{E}\cdot d\vec{D} + \vec{H}\cdot d\vec{B} \tag{7.22}$$

Diferențiind (7.12) și (7.13) obținem:

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{k}\times\vec{H} + \vec{k}\times d\vec{H} = -\,\omega\, d\vec{D} \quad /\cdot(-\vec{E}) \\ d\vec{k}\times\vec{E} + \vec{k}\times d\vec{E} = \omega\, d\vec{B} \quad /\cdot\vec{H} \end{array}\right. \quad \text{adunăm membru cu membru} \ \Rightarrow$$

$$\omega\left(\vec{E}\cdot d\vec{D} + \vec{H}\cdot d\vec{B}\right) = -\,\vec{E}\left(d\vec{k}\times\vec{H}\right) - \vec{E}\left(\vec{k}\times d\vec{H}\right) + \vec{H}\left(d\vec{k}\times\vec{E}\right) + \vec{H}\left(\vec{k}\times d\vec{E}\right) =$$

$$= -\,d\vec{k}\left(\vec{H}\times\vec{E}\right) - \vec{k}\left(d\vec{H}\times\vec{E}\right) + d\vec{k}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) + \vec{k}\left(d\vec{E}\times\vec{H}\right) =$$

$$= d\vec{k}\cdot\vec{S} + \vec{k}\left(\underline{\vec{E}\times d\vec{H}}\right) + d\vec{k}\cdot\vec{S} + \vec{k}\left(\underline{d\vec{E}\times\vec{H}}\right)\ ,$$

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \ \Rightarrow \ d\vec{S} = d\vec{E}\times\vec{H} + \vec{E}\times d\vec{H} \ \Rightarrow$$

$$\omega\, d\rho_E = 2\, d\vec{k}\cdot\vec{S} + \vec{k}\cdot d\vec{S} \tag{7.23}$$

Diferențiind și relația (7.18) obținem.

$$\omega\, d\rho_E = d\vec{k}\cdot\vec{S} + \vec{k}\cdot d\vec{S} \tag{7.24}$$

Comparând (7.23) și (7.24) rezultă:

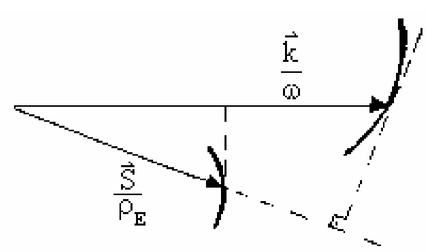
$$\boxed{d\vec{k}\cdot\vec{S} = 0} \quad \Rightarrow \quad \vec{S}\perp d\vec{k} \tag{7.25}$$

Pe baza relațiilor (7.18) și (7.25) putem scrie următoarele relații de ortogonalitate:

$$(7.25) \ \Rightarrow \ d\vec{k}\cdot\vec{S} = 0 \ \Rightarrow \ d\left(\frac{\vec{k}}{\omega}\right)\cdot\frac{\vec{S}}{\rho_E} = 0 \tag{7.26}$$

$$(7.18) \ \Rightarrow \ \frac{\vec{k}}{\omega}\cdot\frac{\vec{S}}{\rho_E} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{\vec{k}}{\omega}\cdot d\left(\frac{\vec{S}}{\rho_E}\right) + d\left(\frac{\vec{k}}{\omega}\right)\cdot\frac{\vec{S}}{\rho_E} = 0 \ \overset{(7.26)}{\Rightarrow} \ \frac{\vec{k}}{\omega}\cdot d\left(\frac{\vec{S}}{\rho_E}\right) = 0 \tag{7.27}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\vec{S}}{\rho_E}\perp d\left(\frac{\vec{k}}{\omega}\right) \quad , \quad \frac{\vec{k}}{\omega}\perp d\left(\frac{\vec{S}}{\rho_E}\right) \tag{7.28}$$



Se constată că fiecare din vectorii relației (7.28) este perpendicular pe planul tangent corespunzător celuilalt vector.

7.3. Ecuația lui Fresnel a vitezelor normale

Din ecuațiile lui Maxwell (7.1) şi (7.2) rezultă:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\mu_0\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{H}\right)\underset{(7.1)}{\Rightarrow}\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\mu_0\cdot\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}\tag{7.29}$$

Înlocuind ∇ cu $-i\vec{k}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ cu $i\omega$, iar $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ cu $-\omega^2$ în (7.29) obținem:

$$-i\vec{k}\times\left(-i\vec{k}\times\vec{E}\right)=-\mu_0\left(-\omega^2\right)\vec{D}\quad\Rightarrow\quad\vec{k}\times\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)=-\mu_0\omega^2\,\vec{D}\tag{7.30}$$

sau:

$$k\,\vec{u}_k\times\left(k\,\vec{u}_k\times\vec{E}\right)=-\mu_0\omega^2\,\vec{D}\ ,\ k=\frac{\omega}{v}\ \Rightarrow\ \frac{\omega^2}{v^2}\cdot\vec{u}_k\times\left(\vec{u}_k\times\vec{E}\right)=-\mu_0\omega^2\,\vec{D}\ \Rightarrow$$

$$\underset{a}{\vec{u}_k}\times\left(\underset{b}{\vec{u}_k}\times\underset{c}{\vec{E}}\right)=-\mu_0 v^2\,\vec{D}\ \Rightarrow\ \vec{u}_k\left(\vec{u}_k\cdot\vec{E}\right)-\vec{E}\underbrace{\left(\vec{u}_k\cdot\vec{u}_k\right)}_{=1}=-\mu_0 v^2\,\vec{D}\ \Rightarrow$$

$$\vec{D}=\frac{1}{\mu_0 v^2}\left[\vec{E}-\vec{u}_k\left(\vec{u}_k\cdot\vec{E}\right)\right]\tag{7.31}$$

(În cazul unui mediu izotrop $\vec{E}\perp\vec{u}_k\ \Rightarrow\ \vec{u}_k\cdot\vec{E}=0\ \Rightarrow\ \vec{D}=\frac{1}{\mu_0 v^2}\vec{E}=\frac{1}{\mu_0\cdot\frac{1}{\varepsilon\mu_0}}\cdot\vec{E}\ \Rightarrow$

$$\vec{D}=\varepsilon\,\vec{E}\quad\left(v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}\ ,\ \mu_r=1\right))$$

Scriem relația (7.31) pe componente, utilizând axele principale ca axe de coordonate:

$$D_j=\varepsilon_j\underline{E_j}=\frac{1}{\mu_0 v^2}\left[\underline{E_j}-u_{kj}\left(\vec{u}_k\cdot\vec{E}\right)\right]\quad,\ (j=x,y,z)\ \Rightarrow$$

$$E_j\left(1-\mu_0 v^2\varepsilon_j\right)=u_{kj}\left(\vec{u}_k\cdot\vec{E}\right)\ \Rightarrow\ E_j=\frac{u_{kj}\left(\vec{u}_k\cdot\vec{E}\right)}{\left(1-\mu_0 v^2\varepsilon_j\right)}\tag{7.32}$$

$$E_x=\frac{u_{kx}\left(\vec{u}_k\cdot\vec{E}\right)}{\left(1-\mu_0 v^2\varepsilon_x\right)}\ ;\qquad E_y=\frac{u_{ky}\left(\vec{u}_k\cdot\vec{E}\right)}{\left(1-\mu_0 v^2\varepsilon_y\right)}\ ;\qquad E_z=\frac{u_{kz}\left(\vec{u}_k\cdot\vec{E}\right)}{\left(1-\mu_0 v^2\varepsilon_z\right)}\tag{7.33}$$

Înmulțim E_x cu u_{kx} , E_y cu u_{ky} , E_z cu u_{kz} şi adunăm relațiile rezultate:

$$\underbrace{u_{kx}E_x+u_{ky}E_y+u_{kz}E_z}_{(\vec{u}_k\cdot\vec{E})}=\left[\frac{u_{kx}^2}{1-\mu_0 v^2\varepsilon_x}+\frac{u_{ky}^2}{1-\mu_0 v^2\varepsilon_y}+\frac{u_{kz}^2}{1-\mu_0 v^2\varepsilon_z}\right](\vec{u}_k\cdot\vec{E})\ \Rightarrow$$

$$\frac{u_{kx}^2}{1-\frac{v^2}{v_x^2}} + \frac{u_{ky}^2}{1-\frac{v^2}{v_y^2}} + \frac{u_{kz}^2}{1-\frac{v^2}{v_z^2}} = 1 = u_{kx}^2 + u_{ky}^2 + u_{kz}^2 \quad \Rightarrow$$

(v_x, v_y şi v_z fiind vitezele principale de fază (7.10) – (7.10''))

$$u_{kx}^2 \left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{v_x^2}} - 1\right) + u_{ky}^2 \left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{v_y^2}} - 1\right) + u_{kz}^2 \left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{v_z^2}} - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u_{kx}^2 \cdot \frac{\frac{v^2}{v_x^2}}{1-\frac{v^2}{v_x^2}} + u_{ky}^2 \cdot \frac{\frac{v^2}{v_y^2}}{1-\frac{v^2}{v_y^2}} + u_{kz}^2 \cdot \frac{\frac{v^2}{v_z^2}}{1-\frac{v^2}{v_z^2}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{u_{kx}^2}{\frac{v_x^2}{v^2} - 1} + \frac{u_{ky}^2}{\frac{v_y^2}{v^2} - 1} + \frac{u_{kz}^2}{\frac{v_z^2}{v^2} - 1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{u_{kx}^2}{v_x^2 - v^2} + \frac{u_{ky}^2}{v_y^2 - v^2} + \frac{u_{kz}^2}{v_z^2 - v^2}\right) v^2 = 0 \;,\; v \neq 0 \;,\; \cdot(-1) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{u_{kx}^2}{v^2 - v_x^2} + \frac{u_{ky}^2}{v^2 - v_y^2} + \frac{u_{kz}^2}{v^2 - v_z^2} = 0} \qquad (7.34)$$

(7.34) este <u>ecuația lui Fresnel a vitezelor normale</u>. Această ecuație permite determinarea vitezei de fază a unei unde plane în direcția $\vec{u}_k$ (direcția normalei la suprafața de undă). Fiind o ecuație bipătrată (de gradul doi în v^2) vom acea soluțiile $\pm v_1$ şi $\pm v_2$ (semnele $\pm$ arată că o undă produsă într-un punct se poate propaga în ambele sensuri pe o direcție de propagare). Astfel fiecărei direcții de propagare determinate de vectorul de undă $\vec{k}$ îi corespund două valori absolute diferite ale vitezei de fază v_1 şi v_2. Conform relației (7.31) lui v_1 îi corespunde $\vec{D}_1$, iar lui v_2 îi corespunde $\vec{D}_2$.

Din (7.33) putem scrie:

$$D_x = \varepsilon_x E_x = \frac{u_{kx}\varepsilon_x(\vec{u}_k \cdot \vec{E})}{1 - \frac{v^2}{v_x^2}} = \frac{u_{kx}\varepsilon_x v_x^2(\vec{u}_k \cdot \vec{E})}{v_x^2 - v^2} = -\frac{u_{kx}}{v^2 - v_x^2} \cdot \frac{(\vec{u}_k \cdot \vec{E})}{\mu_0} \quad \Rightarrow$$

$$D_{1x} D_{2x} = \frac{u_{kx}^2}{(v_1^2 - v_x^2)(v_2^2 - v_x^2)} \cdot \frac{(\vec{u}_k \cdot \vec{E})^2}{\mu_0^2} \quad \Rightarrow$$

$$\mu_0^2\,\vec{D}_1\cdot\vec{D}_2=(\vec{u}_k\cdot\vec{E})^2\left[\frac{u_{kx}^2}{(v_1^2-v_x^2)(v_2^2-v_x^2)}+\frac{u_{ky}^2}{(v_1^2-v_y^2)(v_2^2-v_y^2)}+\frac{u_{kz}^2}{(v_1^2-v_z^2)(v_2^2-v_z^2)}\right]\Rightarrow$$

$$\mu_0^2\vec{D}_1\cdot\vec{D}_2=\frac{(\vec{u}_k\cdot\vec{E})^2}{(v_1^2-v_2^2)}\left[\frac{u_{kx}^2}{(v_2^2-v_x^2)}-\frac{u_{kx}^2}{(v_1^2-v_x^2)}+\frac{u_{ky}^2}{(v_2^2-v_y^2)}-\frac{u_{ky}^2}{(v_1^2-v_y^2)}+\frac{u_{kz}^2}{(v_2^2-v_z^2)}-\frac{u_{kz}^2}{(v_1^2-v_z^2)}\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad \vec{D}_1\cdot\vec{D}_2=0\,.$$

Am folosit faptul că v_1 şi v_2 sunt soluţii ale ecuaţiei (7.34).

Deoarece $\vec{D}_1\cdot\vec{D}_2=0$ rezultă că vectorii $\vec{D}_1$ şi $\vec{D}_2$ sunt <u>ortogonali</u>. Avem două plane de polarizare $(\vec{D}_1,\vec{k})$ şi $(\vec{D}_2,\vec{k})$. Din (7.15) rezultă că $\vec{D}_1\perp\vec{k}$, $\vec{D}_2\perp\vec{k}$. Dacă, plecând din originea O (sursa de oscilaţie), pe direcţia $\vec{u}_k$ se iau două lungimi egale cu v_1 şi v_2, locul extremităţilor celor două lungimi este o suprafaţă numită suprafaţa vitezelor normale sau <u>suprafaţa vitezelor de fază</u>. În mod similar se defineşte <u>suprafaţa vectorilor de undă</u> (suprafaţa descrisă de extremităţile vectorului $\vec{k}$) şi <u>suprafaţa indicilor de refracţie</u> (suprafaţa descrisă de extremităţile vectorului $\vec{n}=\vec{k}/k_0$, $k_0=\omega/c$).

Pentru a obţine ecuaţia suprafeţei vectorilor de undă vom înmulţi (7.34) cu $-1/\mu_0$, unde:

$$\mu_0\overset{(7.10)-(7.10")}{=}\frac{1}{v_x^2\varepsilon_x}=\frac{1}{v_y^2\varepsilon_y}=\frac{1}{v_z^2\varepsilon_z}\tag{7.35}$$

şi vom folosi relaţiile:

$$u_{kx}=\frac{k_{\tilde{x}}}{k}\ ,\ u_{ky}=\frac{k_{\tilde{y}}}{k}\ ,\ u_{kz}=\frac{k_{\tilde{z}}}{k}\ ;\tag{7.36}$$

$$v^2=\frac{\omega^2}{k^2}\ ,\ v_x^2=\frac{\omega^2}{k_x^2}\ \Rightarrow\ \frac{v^2}{v_x^2}=\frac{k_x^2}{k^2}\tag{7.37}$$

$$-\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{u_{kx}^2}{v^2-v_x^2}-\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{u_{ky}^2}{v^2-v_y^2}-\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{u_{kz}^2}{v^2-v_z^2}=0\quad\Rightarrow$$

$$-v_x^2\varepsilon_x\cdot\frac{u_{kx}^2}{v^2-v_x^2}--v_y^2\varepsilon_y\cdot\frac{u_{ky}^2}{v^2-v_y^2}-v_z^2\varepsilon_z\cdot\frac{u_{kz}^2}{v^2-v_z^2}=0\quad\Rightarrow$$

$$\varepsilon_x\cdot\frac{u_{kx}^2}{1-\frac{v^2}{v_x^2}}+\varepsilon_y\cdot\frac{u_{ky}^2}{1-\frac{v^2}{v_y^2}}+\varepsilon_z\cdot\frac{u_{kz}^2}{1-\frac{v^2}{v_z^2}}=0\quad\Rightarrow$$

$$\varepsilon_x\cdot\frac{\frac{k_{\tilde{x}}^2}{k^2}}{1-\frac{k_x^2}{k^2}}+\varepsilon_y\cdot\frac{\frac{k_{\tilde{y}}^2}{k^2}}{1-\frac{k_y^2}{k^2}}+\varepsilon_z\cdot\frac{\frac{k_{\tilde{z}}^2}{k^2}}{1-\frac{k_z^2}{k^2}}=0\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon_x \cdot \frac{k_{\tilde{x}}^2}{k^2 - k_x^2} + \varepsilon_y \cdot \frac{k_{\tilde{y}}^2}{k^2 - k_y^2} + \varepsilon_z \cdot \frac{k_{\tilde{z}}^2}{k^2 - k_z^2} = 0} \tag{7.38}$$

(7.38) este <u>ecuația suprafeței vectorilor de undă</u>.

7.4. <u>Ecuația suprafeței indicilor</u>. <u>Ecuația vectorilor $\vec{D}$. Elipsoidul indicilor</u>

În ecuația (7.34) înlocuim $v = \frac{c}{n}$, $v_x = \frac{c}{n_x}$, $v_y = \frac{c}{n_y}$, $v_z = \frac{c}{n_z}$. Obținem:

$$\frac{u_{kx}^2}{\frac{c^2}{n^2} - \frac{c^2}{n_x^2}} + \frac{u_{ky}^2}{\frac{c^2}{n^2} - \frac{c^2}{n_y^2}} + \frac{u_{kz}^2}{\frac{c^2}{n^2} - \frac{c^2}{n_z^2}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{u_{kx}^2 n^2 n_x^2}{n_x^2 - n^2} + \frac{u_{ky}^2 n^2 n_y^2}{n_y^2 - n^2} + \frac{u_{kz}^2 n^2 n_z^2}{n_z^2 - n^2} = 0 \qquad \cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{n_x^2 \cdot \frac{u_{kx}^2}{n^2 - n_x^2} + n_y^2 \cdot \frac{u_{ky}^2}{n^2 - n_y^2} + n_z^2 \cdot \frac{u_{kz}^2}{n^2 - n_z^2} = 0} \tag{7.39}$$

Aceasta este <u>ecuația suprafeței indicilor de refracție</u>. Pentru o direcție de propagare dată, determinată de cosinuşii directori u_{kx}, u_{ky}, u_{kz}, putem calcula indicele de refracție n în funcție de indicii de refracție principali (n_x, n_y, n_z) . Înlocuind

$$u_{kx} = \frac{k_{\tilde{x}}}{k} \quad , \quad u_{ky} = \frac{k_{\tilde{y}}}{k} \quad , \quad u_{kz} = \frac{k_{\tilde{z}}}{k}$$

$$\left(u_{kx}^2 + u_{ky}^2 + u_{kz}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad k_{\tilde{x}}^2 + k_{\tilde{y}}^2 + k_{\tilde{z}}^2 \equiv k^2 \right) \tag{7.40}$$

în (7.39) , obținem o altă formă a ecuației suprafeței indicilor:

$$n_x^2 \cdot \frac{k_{\tilde{x}}^2}{n^2 - n_x^2} + n_y^2 \cdot \frac{k_{\tilde{y}}^2}{n^2 - n_y^2} + n_z^2 \cdot \frac{k_{\tilde{z}}^2}{n^2 - n_z^2} = 0 \tag{7.41}$$

Deoarece:

$n = \frac{c}{v}$, $c = \frac{\omega}{k_0}$, $v = \frac{\omega}{k}$ $\Rightarrow$ $n = \frac{\frac{\omega}{k_0}}{\frac{\omega}{k}} = \frac{k}{k_0}$, $k^2 = k_{\tilde{x}}^2 + k_{\tilde{y}}^2 + k_{\tilde{z}}^2$ (indicele ~ se referă la mărimi variabile, pentru a le distinge de valorile principale care sunt constante) , rezultă:

$$n^2 = \frac{k^2}{k_0^2} = \frac{1}{k_0^2}\left(k_{\tilde{x}}^2 + k_{\tilde{y}}^2 + k_{\tilde{z}}^2\right) \quad \Rightarrow \quad n^2 = n_{\tilde{x}}^2 + n_{\tilde{y}}^2 + n_{\tilde{z}}^2 \tag{7.42}$$

$$n_{\tilde{x}} = \frac{k_{\tilde{x}}}{k_0} \; , \quad n_{\tilde{y}} = \frac{k_{\tilde{y}}}{k_0} \; , \quad n_{\tilde{z}} = \frac{k_{\tilde{z}}}{k_0} \tag{7.43}$$

putem scrie relația (7.41) sub forma:

$$n_x^2 \cdot \frac{n_{\tilde{x}}^2}{n^2 - n_x^2} + n_y^2 \cdot \frac{n_{\tilde{y}}^2}{n^2 - n_y^2} + n_z^2 \cdot \frac{n_{\tilde{z}}^2}{n^2 - n_z^2} = 0 \qquad (7.44)$$

Intersectând suprafața indicilor desceisă de ecuația (7.44) cu planul $n_{\tilde{x}} = 0$ $(n_{\tilde{y}} O n_{\tilde{z}})$ obținem o elipsă şi un cerc:

$$n_{\tilde{x}} = 0 \;, \quad n^2 - n_x^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n_{\tilde{y}}^2}{n_z^2}\left(n^2 - n_z^2\right) + \frac{n_{\tilde{z}}^2}{n_y^2}\left(n^2 - n_y^2\right) = 0$$

$$n^2 \underset{(7.42)}{=} n_{\tilde{y}}^2 + n_{\tilde{z}}^2 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{n_{\tilde{y}}^2}{n_z^2}\left(n_{\tilde{y}}^2 + n_{\tilde{z}}^2\right) + \frac{n_{\tilde{z}}^2}{n_z^2}\left(n_{\tilde{y}}^2 + n_{\tilde{z}}^2\right) - \left(n_{\tilde{y}}^2 + n_{\tilde{z}}^2\right) = 0 \qquad \Big| \;:\; \left(n_{\tilde{y}}^2 + n_{\tilde{z}}^2\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{n_{\tilde{y}}^2}{n_z^2} + \frac{n_{\tilde{z}}^2}{n_y^2} = 1 \;=\; \text{elipsă} \qquad (7.45)$$

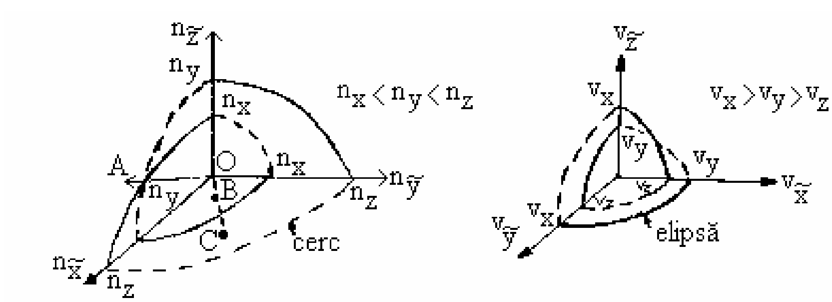
$$\left.\begin{array}{l} n^2 - n_x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad n^2 = n_x^2 \\ n_{\tilde{x}} = 0 \;,\; n^2 = n_{\tilde{x}}^2 + n_{\tilde{y}}^2 + n_{\tilde{z}}^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = n_{\tilde{y}}^2 + n_{\tilde{z}}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \; n_{\tilde{y}}^2 + n_{\tilde{z}}^2 = n_x^2 \;=\; \text{cerc} \qquad (7.46)$$

Rezultatul intersecțiilor suprafeței indicilor cu celelalte două plane ($n_{\tilde{x}} O n_{\tilde{z}}$, $n_{\tilde{x}} O n_{\tilde{y}}$) se poate scrie prin permutări circulare:

$$n_{\tilde{y}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{n_{\tilde{z}}^2}{n_x^2} + \frac{n_{\tilde{x}}^2}{n_z^2} = 1 \quad , \quad n_{\tilde{z}}^2 + n_{\tilde{x}}^2 = n_y^2 \qquad (7.47)$$

$$n_{\tilde{z}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{n_{\tilde{x}}^2}{n_y^2} + \frac{n_{\tilde{y}}^2}{n_x^2} = 1 \quad , \quad n_{\tilde{x}}^2 + n_{\tilde{y}}^2 = n_z^2 \qquad (7.48)$$

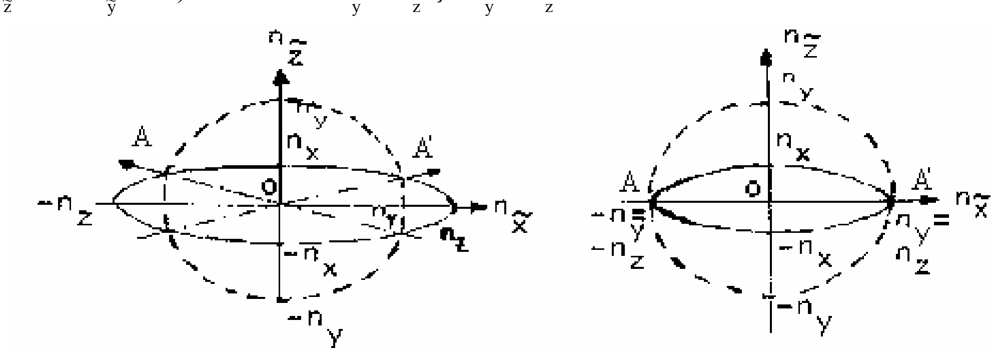
Similar se determină intersecțiile suprafeței vitezelor de fază cu planele definite de $v_{\tilde{x}} = 0$, $v_{\tilde{y}} = 0$ şi $v_{\tilde{z}} = 0$ (v şi n sunt invers proporționale , $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{n\,k_0}$, lucru evidențiat în graficele de mai jos).



Se constată că pentru o direcţie de propagare definită de $\vec{k} = k_0 \vec{n}$ există două valori ale lui n şi deci două valori ale lui $\vec{k}$ (punctele B şi C din figură corespund celor două valori distincte). Există în general două direcţii particulare numite <u>axe optice</u> (OA şi OA’) pentru care indicele de refracţie n are o singură valoare (ecuaţia (7.44) , de gradul doi în n^2, admite în general două direcţii pentru care cei doi indici de refracţie n_1 şi n_2, care corespund lui v_1 şi v_2 din ecuaţia lui Fresnel, se confundă). Mediile cu două axe optice se numesc medii <u>biaxe</u>. Axele optice sunt dispuse simetric în raport cu axele principale.

În cazul particular în care simetria mediului este atât de înaltă încât două din constantele dielectrice sunt egale, de exemplu $\varepsilon_y = \varepsilon_z \Rightarrow v_x = v_z \Rightarrow n_x = n_z$, cele două axe optice se confundă între ele şi cu axa principală. Aceste medii se numesc <u>uniaxe</u>.

Reprezentarea grafică a ecuaţiilor (7.47) (intersecţia suprafeţei indicilor cu planul $n_{\tilde{x}} O n_{\tilde{z}} \Rightarrow n_{\tilde{y}} = 0$) în cazurile $n_y \neq n_z$ şi $n_y = n_z$ este următoarea:



Dacă direcţia de propagare coincide cu una din axele principale, doi dintre cosinuşii directori sunt nuli, iar indicele de refracţie este egal cu indicele de refracţie corespunzător axei respective.

Pentru a obţine ecuaţia vectorilor $\vec{D}$ vom folosi (7.9) – (7.9’’) , (7.10) – (7.10’’) şi (7.33) :

$$E_x = \frac{u_{kx}(\vec{u}_k \cdot \vec{E})}{1 - \mu_0 v^2 \varepsilon_x} \;,\; D_x = \varepsilon_x E_x = \varepsilon_x \frac{u_{kx}(\vec{u}_k \cdot \vec{E})}{1 - \dfrac{v^2}{v_x^2}} \;,\; v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{k_0 n} \;,\; \frac{v^2}{v_x^2} = \frac{\dfrac{\omega^2}{k_0^2 n^2}}{\dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 n_x^2}} \;,$$

$$k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \;,\; \varepsilon_x = \varepsilon_0 n_x^2 \;\Rightarrow\; \frac{v^2}{v_x^2} = \frac{n_x^2}{n^2} \;,\; D_x = \varepsilon_0 n_x^2 \frac{u_{kx}(\vec{u}_k \cdot \vec{E})}{1 - \dfrac{n_x^2}{n^2}} \;\Rightarrow$$

$$D_x = \varepsilon_0 \frac{u_{kx}(\vec{u}_k \cdot \vec{E})}{\dfrac{1}{n_x^2} - \dfrac{1}{n^2}} \;\Rightarrow\; u_{kx} = \frac{D_x}{\varepsilon_0 (\vec{u}_k \cdot \vec{E})} \left(\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n^2} \right) \qquad (7.49)$$

u_{ky} se obţine din (7.49) schimbând indicele x cu y , iar u_{kz} se obţine punând z în locul lui x . Din (7.15) şi din relaţiile de forma (7.49) obţinem:

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \;\Rightarrow\; k \cdot \vec{u}_k \cdot \vec{D} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u}_k \cdot \vec{D} = 0 \;\Rightarrow\; u_{kx} D_x + u_{ky} D_y + u_{kz} D_z = 0 \qquad (7.50)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0(\vec{u}_k\cdot\vec{E})}\left(\frac{D_x^2}{n_x^2}-\frac{D_x^2}{n^2}+\frac{D_y^2}{n_y^2}-\frac{D_y^2}{n^2}+\frac{D_z^2}{n_z^2}-\frac{D_z^2}{n^2}\right)=0 \quad , \quad \vec{u}_k\cdot\vec{E}\neq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{D_x^2}{n_x^2}+\frac{D_y^2}{n_y^2}+\frac{D_z^2}{n_z^2}=\frac{D_x^2+D_y^2+D_z^2}{n^2} \quad , \quad D^2=D_x^2+D_y^2+D_z^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{D_x^2}{n_x^2}+\frac{D_y^2}{n_y^2}+\frac{D_z^2}{n_z^2}=\frac{D^2}{n^2}} \tag{7.51}$$

Relația (7.51) este ecuația vectorilor $\vec{D}$. În această relație n_x, n_y, n_z sunt indicii de refracție principali şi nu componentele lui n.

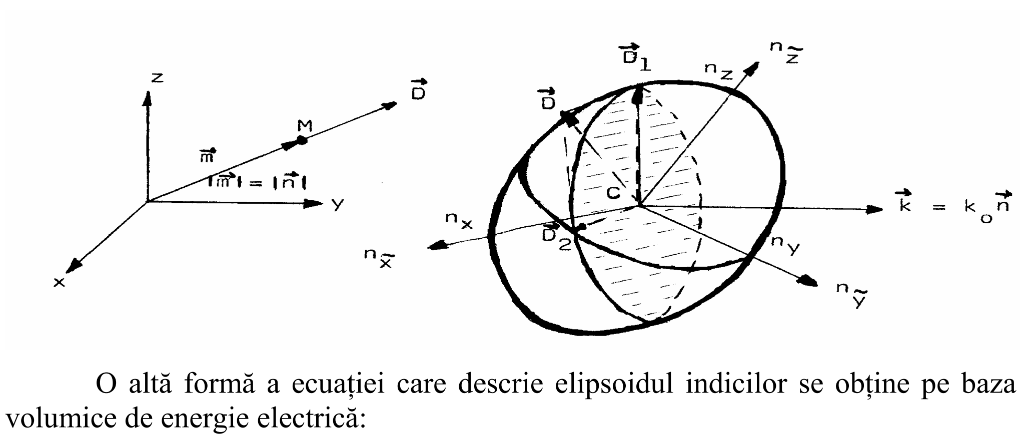
Împărțind (7.51) cu D^2/n^2 obținem:

$$\boxed{\frac{m_x^2}{n_x^2}+\frac{m_y^2}{n_y^2}+\frac{m_z^2}{n_z^2}=1} \tag{7.52}$$

unde

$$m_x=n\frac{D_x}{D} \;,\; m_y=n\frac{D_y}{D} \;,\; m_z=n\frac{D_z}{D} \quad \Rightarrow \quad \vec{m}=n\cdot\frac{\vec{D}}{D} \tag{7.53}$$

(7.52) reprezintă ecuația unui elipsoid descris în spațiu de vectorul $\vec{m}$, coliniar cu $\vec{D}$, de mărime egală cu n (vectorul $\vec{n}$ este coliniar cu $\vec{k}$ întrucât $\vec{k}=k_0\vec{n}$) , numit <u>elipsoidul indicilor</u>. Pentru a determina într-un punct C structura unei unde monocromatice plane cu vectorul de undă $\vec{k}$, construim un elipsoid de semiaxe n_x, n_y şi n_z pe care îl intersectăm cu un plan perpendicular pe $\vec{k}$. Intersecția celor două suprafețe va fi o elipsă. Vectorul $\vec{D}$ se află în planul construit, deoarece este perpendicular pe $\vec{k}$. La pătrunderea undei într-un mediu anizotrop vectorul $\vec{D}$ se descompune în vectorii $\vec{D}_1$ şi $\vec{D}_2$ dirijați după axele elipsei de intersecție. Deci unda incidentă este descompusă efectiv de către mediu în două unde caracterizate de vectorii $\vec{D}_1$ şi $\vec{D}_2$ ($\vec{D}_1\perp\vec{D}_2$) (fenomenul de birefringență).



O altă formă a ecuației care descrie elipsoidul indicilor se obține pe baza densității volumice de energie electrică:

$$\rho_E^e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\left(E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{D_x^2}{n_x^2} + \frac{D_y^2}{n_y^2} + \frac{D_z^2}{n_z^2}\right) \Rightarrow \frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \qquad (7.54)$$

unde

$$x^2 = \frac{D_x^2}{2\rho_E^e\varepsilon_0}\ ,\ y^2 = \frac{D_y^2}{2\rho_E^e\varepsilon_0}\ ,\ z^2 = \frac{D_z^2}{2\rho_E^e\varepsilon_0} \qquad (7.55)$$

Comparând componenta x din relațiile (7.52) și (7.54) se obține:

$$m_x^2 = n^2\frac{D_x^2}{D^2} = \frac{D_x^2}{2\rho_E^e\varepsilon_0} \Rightarrow \rho_E^e = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 n^2} \Rightarrow \rho_{E(x)}^e = \frac{D_x^2}{2\varepsilon_0 n_x^2} = \frac{D_x^2}{2\varepsilon_x}$$

Astfel cele două ecuații comparate sunt echivalente (am fixat componenta x a lui n, $n_{\tilde{x}} = n_x$).

7.5. Tipuri de anizotropie cristalină

Un mediu este izotrop dacă $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z \Rightarrow n_x = n_y = n_z \Rightarrow v_x = v_y = v_z$. În această clasă intră cristalele cubice.

Cristalele biaxe sunt caracterizate prin $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z \Rightarrow n_x \neq n_y \neq n_z$. Aceste cristale au două axe optice şi aparțin sistemelor ortorombic, monoclinic şi triclinic.

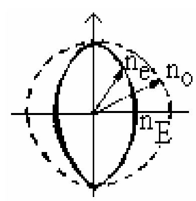
Cristalele uniaxă se caracterizează prin egalitatea a două constante dielectrice principale (de exemplu $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z \Rightarrow n_x = n_y = n_0, n_z = n_e \Rightarrow v_x = v_y = v_0, v_z = v_e$). Aceste cristale au o axă optică şi aparțin sistemelor hexagonal, tetragonal şi trigonal.

Carbonatul de calciu ($CaCO_3$) cristalizat (calcit), cunoscut sub numele de spat de Islanda, este un cristal uniax negativ (pentru λ = 5893 Å, n_0 = 1,658; $n_E = 1{,}486 \leq n_e \leq n_0$). În acest caz ecuația (7.54) care descrie elipsoidul indicilor se reduce la:

$$\frac{x^2 + y^2}{n_0^2} + \frac{z^2}{n_E^2} = 1 \qquad (7.56)$$

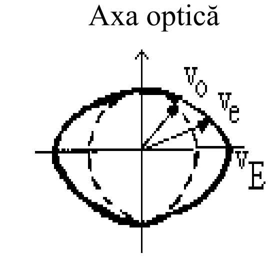
Intersecția elipsoidului indicilor cu un plan care trece prin centrul său este o elipsă a cărei semiaxă mare este aceeaşi ($n_x = n_y = n_0$) oricare ar fi orientarea planului, deci oricare ar fi direcția de propagare. Cealaltă semiaxă este dependentă de direcția de propagare şi ia valori între n_0 şi n_E. Planul secțiunii principale este planul determinat de axa optică şi de normala în punctul de intrare al razei pe fața de intrare (este planul de incidență care conține vectorul $\vec{k}$, normala la suprafața refringentă şi axa optică a cristalului). Unda caracterizată de vectorul $\vec{D}_0$, numită undă ordinară, are aceeaşi viteză oricare ar fi direcția de propagare, deci se propagă ca într-un mediu izotrop. Vectorul $\vec{D}_0$ este perpendicular pe planul secțiunii principale. Vectorul $\vec{D}_e$ caracterizează unda extraordinară, se află în planul secțiunii principale, iar viteza acestei unde este dependentă de direcţia de propagare a undei incidente. Dacă propagarea se face de-a lungul axei optice, elipsa de intersecţie devine un cerc de rază n_0, iar cele două unde se propagă cu aceeaşi viteză. Pentru unda ordinară $\vec{E}_0 || \vec{D}_0$, iar vectorul Poynting $\vec{S}_0$ are aceeaşi orientare ca într-un mediu izotrop. Pentru unda extraordinară vectorii $\vec{E}_e$ şi $\vec{D}_e$ nu sunt paraleli. Graficul suprafeţei sferice $n = n_0 =$ constant, corespunzătoare undei ordinare şi cel al elipsoidului de revoluţie în jurul axei optice (axa z), reprezentat de ecuaţia (7.56) au următorul aspect:

Axa optică



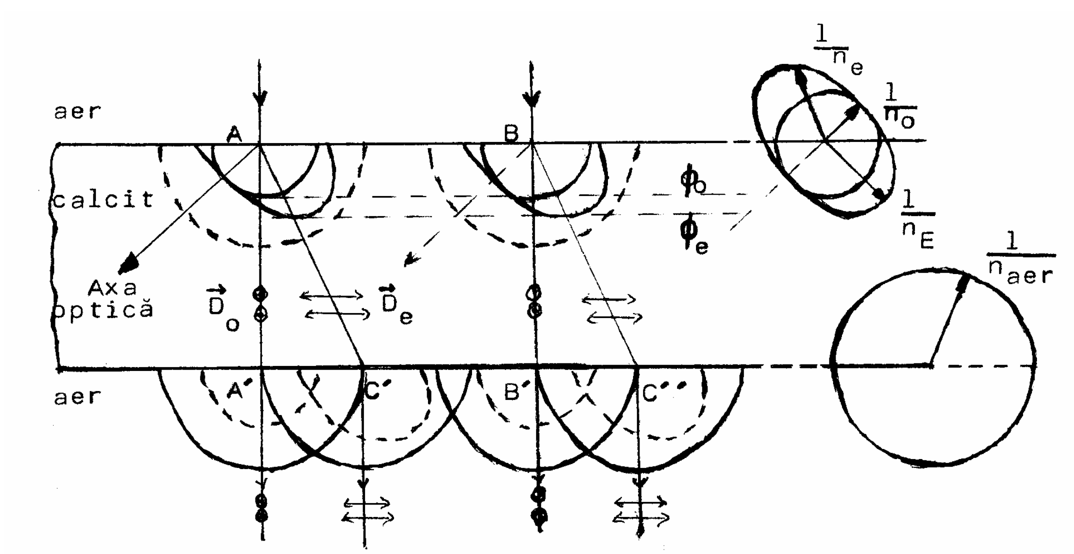
$n_e \leq n_0$ (calcit)

Axa optică



$v_e \geq v_0$ (calcit)

Considerăm o lamă cu feţe plan paralele din calcit, a cărei axă optică face un unghi ascuţit cu suprafaţa plană a cristalului.



Fie un fascicul luminos paralel, incident normal pe suprafaţa acestui dielectric anizotrop uniax. Razele incidente sunt în planul secţiunii principale (planul foii de hârtie) format de normala la suprafaţa de intrare şi axa optică a lamei. Oscilaţiile undei electromagnetice, care ajung la momentul t_0 în punctul de incidenţă A, se propagă în mediul anizotrop sub forma unei unde ordinare AA' şi a unei unde extraordinare AC' . La un moment ulterior t oscilaţiile undei ordinare se vor situa pe o familie de suprafeţe emisferice cu centrele în A , B , . . . , în timp ce oscilaţiile undei extraordinare se vor situa pe o familie de elipsoizi tangenţi la semisfere în puncte situate în lungul axei optice. În acest caz suprafeţele-înfăşurătoare ale familiei de emisfere, respectiv semielipsoizi, au forma unor plane Φ_0 , Φ_e, paralele cu suprafaţa de "intrare" a lamei. Conform principiului lui Huygens (vezi şi figura de la pagina 135), direcțiile propagării energiei (deci a "razelor") componentei ordinare, respectiv a celei extraordinare, pot fi găsite unind centrele A , B , . . . ale undelor secundare cu punctele de tangență ale respectivelor suprafețe (emisfere, elipsoizi) cu planele Φ_0 şi Φ_e. Noi am trasat în planul secțiunii principale un semicerc punctat de rază $1/n_{aer}$, corespunzător razei incidente care provine dintr-un mediu izotrop (aerul), un semicerc de rază $1/n_0$, corespunzător razei ordinare şi o semielipsă de semiaxe $1/n_0$ şi $1/n_E$, care corespunde undei extraordinare. Raza ordinară îşi păstrează direcția, iar raza extraordinară este deviată în direcția opusă axei optice. Vectorul $\vec{D}_0$ vibrează perpendicular pe planul secțiunii principale şi perpendicular pe raza ordinară, iar $\vec{D}_e$ oscilează în planul secțiunii principale, dar nu este perpendicular pe raza extraordinară.

La ieşirea din lamă, cele prezentate mai sus se repetă, dar în sens invers (tranziție de la mediu anizotrop la mediu izotrop). De aceea raza extraordinară care iese din lamă este paralelă cu raza incidentă, însă deplasată față de direcția fasciculului incident. La rotirea lamei în jurul direcției incidente a radiației, datorită rotației corespunzătoare a axei optice a lamei (solidar "legată" de aceasta), raza extraordinară se va roti în jurul aceleiaşi direcții (pentru o lamă de grosime convenabilă, fasciculele emergente ordinare şi extraordinare se suprapun parțial, astfel că se poate verifica perpendicularitatea polarizațiilor celor două tipuri de unde şi faptul că în porțiunea comună lumina este naturală). Un obiect privit printr-un cristal birefringent apare dublu.

Dacă <u>axa optică este paralelă cu suprafața cristalului</u> şi cu planul de incidență, o undă plană incidentă normal pe suprafața mediului va fi descompusă într-o rază ordinară şi una extraordinară care se propagă în <u>aceeaşi direcție</u>, dar cu viteze diferite şi deci fenomenul dedublării imaginii (birefringența) nu mai este observabil. Datorită vitezelor de propagare diferite, între cele două raze apare la ieşirea din cristal o diferență de fază, astfel încât compunerea lor va da o undă eliptic polarizată. Dacă diferența de fază este $\pi/2$ atunci diferența de drum este $\lambda/4$ şi lama se numeşte <u>lamă sfert de undă</u>. Modificând grosimea lamei putem obține şi o lamă jumătate de undă $\varphi = \pi \;\Rightarrow\; \delta = \lambda/2$).

Cuarțul (SiO_2) este un cristal uniax pozitiv (birefringența $B = n_e - n_0 \geq 0$, $n_0 = 1,544$; $n_e = 1,553$).

Turmalina este un cristal uniax care, pentru o grosime mai mare de 1 mm, absoarbe complet raza ordinară (fenomenul de dicroism), iar la ieşirea din lamă se obține numai raza extraordinară (turmalina este deci un dispozitiv de polarizare).

Eliminarea razei ordinare se poate face şi pe baza reflexiei totale, folosind două jumătăți de prismă din calcit care sunt lipite cu balsam de Canada. Indicele de refracție pentru balsamul de Canada (1,53) este mai mic decât indicele de refracție al razei ordinare în calcit (1,66) şi mai mare decât indicele de refracție al razei extraordinare în calcit (1,49).

Unele substanțe izotrope devin anizotrope la aplicarea unor solicitări mecanice ori a unor câmpuri electrice sau magnetice.

Substanțele optic active (de exemplu o soluție de zahăr în apă) au proprietatea de a roti planul de polarizare al unei unde incidente liniar polarizate.