

6. Interferența undelor

6.1. Introducere

Prin interferență se înțelege suprapunerea unor unde care provin de la un număr finit de surse coerente discrete, prin care se obține o distribuție a intensității unei rezultante caracterizate printr-o succesiune de maxime și minime numite franje de interferență. Franjele de maxim (luminoase) alternează cu franjele de minim (întunecate). Dacă undele care se suprapun provin de la o distribuție continuă de surse coerente se obțin franje de difracție. Astfel, pentru două surse cvasipunctuale coerente se obțin franje de interferență, pentru o sursă de dimensiuni finite (mari în comparație cu lungimea de undă a radiațiilor) se obțin franje de difracție, iar pentru două surse de dimensiuni finite se obține o combinație de franje de interferență și de difracție.

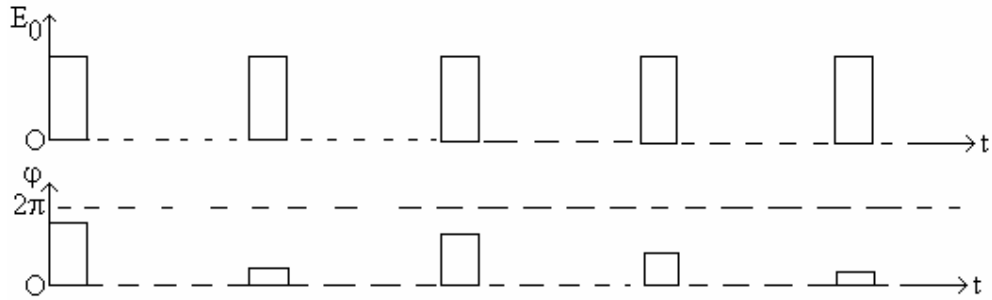
Pentru ca două sau mai multe unde electromagnetice să poată interfera, este necesar ca ele să posedă proprietatea de coerență. Prin coerență se înțelege corelația caracteristicilor oscilațiilor (de exemplu fazele undelor) considerate în diferite puncte ale spațiului și la diferite momente de timp. Uzual se spune că două unde sunt coerente dacă au aceeași pulsație, iar diferența de fază dintre ele este constantă în timp. Interferența undelor are loc numai dacă acestea au o componentă de polarizare comună (undele care se suprapun nu trebuie să fie polarizate în plane reciproc perpendiculare).

Studiul interferenței undelor luminoase emise de sursele termice clasice, a căror fază este nedefinită, este mai dificil decât studiul interferenței microundelor, deoarece se pot obține microunde a căror fază să fie bine definită.

Problema principală în studiul interferenței constă în determinarea intensității unei rezultante, deoarece detectoarele de lumină (ochiul, fotomultiplicatorul) sunt detectoare pătratic (înregistrează intensitatea). Proprietatea de inerție a detectoarelor face imposibilă detectarea instantanee a intensității. Cel mai rapid detector este fotomultiplicatorul, care înregistrează răspunsul pe o durată de ordinul a 10^{-10} s (durata persistenței imaginii pe retina ochiului este de ordinul $10^{-1} \div 10^{-2}$ s). Deoarece perioada undelor luminoase este de $\sim 10^{-15}$ s, rezultă că, în cel mai bun caz, un semnal este mediat pe 10^5 perioade.

Deoarece undele emise de o sursă clasică nu sunt monocromatice (nu există o coerență temporală perfectă) și întrucât nu există o sursă reală punctuală (coerența spațială nu este perfectă), pentru obținerea unor unde coerente se folosesc sisteme interferențiale care se bazează pe una din următoarele două metode: divizarea frontului unde primare (dispozitivul Young, oglinzile lui Fresnel), divizarea amplitudinii unde primare (lama cu fețe plan paralele, interferometrul Michelson).

O sursă emite lumină ca urmare a dezexcitării atomilor care au fost în prealabil excitați sub acțiunea unui câmp electric exterior. Datorită emisiei discontinue (emisă este întreruptă de ciocnirile dintre atomi), fiecare atom nu emite o undă strict monocromatică, ci trenuri de unde succesive, emise în mod aleator. În timpul emisiei, amplitudinea E_0 , faza φ și orientarea intensității câmpului electric $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$ sunt determinate pe o durată τ_c care este de ordinul de mărime a duratei medii între două ciocniri succesive ale atomilor ($\tau_c \sim 10^{-8}$ s). În figura de mai jos am reprezentat o emisie de trenuri de unde cu amplitudinea E_0 constantă și cu faze aleatorii. Dacă sursele S_1 și S_2 sunt independente, diferența de fază $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ a fazelor aleatorii φ_1 și φ_2 este de asemenea o funcție aleatoare.



O condiție necesară pentru obținerea interferenței constă în neutralizarea caracterului relativ aleatoriu al emisiei luminoase a celor două surse. În dispozitivul lui Young acest lucru este realizat prin faptul că trenurile de unde emise de sursele S_1 și S_2 prezintă în punctul de interferență P aceeași stare aleatoare ca și a sursei primare, iar diferența de fază $\Delta\varphi$ în P este staționară.

6.2. Interferența a două unde

Considerăm două surse S_1 și S_2 care emit unde electromagnetice cu pulsațiile ω_1 și ω_2 . Într-un punct P are loc suprapunerea celor două unde armonice plane:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (6.1)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (6.2)$$

Intensitatea câmpului electric rezultat este egală în P cu suma intensităților de câmp electric componente, întrucât acestea trebuie să satisfacă ecuațiile lui Maxwell care sunt liniare (principiul superpoziției se aplică atunci când intensitatea undelor este mică, pentru a putea neglija neliniaritățile mediului):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (6.3)$$

Intensitatea I a unei luminoase este definită ca media pe durata de observare a mărimii vectorului Poynting

$$I = |\overline{\vec{S}}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot E_0^2 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \overline{E^2} \quad (6.4)$$

Deoarece $I \sim \overline{E^2}$ vom putea considera drept măsură a intensității mărimea $\overline{E^2}$ (alegem unitățile de măsură astfel încât factorul de proporționalitate să fie egal cu 1).

Intensitatea I a unei rezultante este deci:

$$I = \overline{E^2} = \overline{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2} = \overline{E_1^2} + \overline{E_2^2} + 2 \cdot \overline{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2} = \frac{\overline{E_{10}^2}}{2} + \frac{\overline{E_{20}^2}}{2} + 2 \cdot \overline{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2}$$

sau

$$I = I_1 + I_2 + I_{12} \quad (6.5)$$

unde

$$I_1 = \overline{E_1^2} = \frac{\overline{E_{10}^2}}{2} \quad (6.6)$$

este intensitatea care s-ar observa în P dacă ar fi prezentă numai prima undă,

$$I_2 = \overline{E_2^2} = \frac{\overline{E_{20}^2}}{2} \quad (6.7)$$

este intensitatea luminii emise de sursa S_2 și ajunsă în punctul P , în absența sursei S_1 , iar

$$I_{12} = 2 \cdot \overline{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2} = 2 \cdot \overline{\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2)} \quad (6.8)$$

este termenul de interferență.

Se spune că cele două unde interferă dacă intensitatea unei rezultante nu este egală cu suma intensităților undelor componente ($I \neq I_1 + I_2$, $I_{12} \neq 0$). Dacă $I_{12} = 0$, atunci $I = I_1 + I_2$, adică undele nu interferă (cazul suprapunerii undelor care provin de la două becuri obișnuite).

Din relația (6.8) se constată că $I_{12} = 0$ dacă $\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} = 0$, caz în care vibrațiile vectorilor \vec{E}_1 și \vec{E}_2 au loc după direcții perpendiculare ($\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$).

Evaluăm termenul de interferență folosind relațiile trigonometrice

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]; \quad \sin u - \sin v = 2 \sin \frac{u-v}{2} \cdot \cos \frac{u+v}{2}$$

$$I_{12} = 2 \cdot \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \overline{\cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2]} + \overline{\cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2]} \right\} \Rightarrow$$

$$I_{12} = \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2] dt + \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2] dt$$

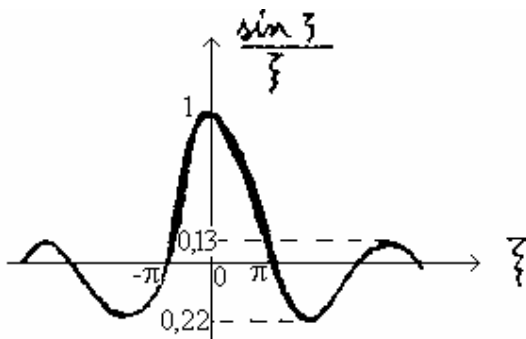
(6.9)

Termenul al doilea se scrie astfel (presupunând că $\varphi_1, \varphi_2 = \text{constant}$)

$$\begin{aligned} & \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \cdot \sin[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2] \Big|_0^T = \\ & = \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cdot \frac{1}{T(\omega_1 + \omega_2)} \left\{ \sin[(\omega_1 + \omega_2)T + \varphi_1 + \varphi_2] - \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right\} = \\ & = \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cdot \frac{\sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)T}{2}}{\frac{(\omega_1 + \omega_2)T}{2}} \cdot \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)T + 2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Deoarece în domeniul vizibil $\omega \approx 10^{15}$ rad/s, T (durata de observare) $\approx 10^{-10}$ s, rezultă:

$$\xi = \frac{(\omega_1 + \omega_2)T}{2} \approx \frac{2 \cdot 10^{15} \cdot 10^{-10}}{2} = 10^5 \gg 1 \Rightarrow \frac{\sin \xi}{\xi} \lll 1 \quad (\text{vezi graficul de mai jos})$$



Astfel al doilea termen din (6.9) este neglijabil. Acest termen poate fi considerat nul și datorită faptului că ω_1 și ω_2 au valori foarte mari, cosinusul variază rapid în timp și în decurs de o perioadă de timp egală cu durata de observare ia toate valorile posibile, atât pozitive, cât și negative, astfel că valoarea medie este nulă.

Primul termen din relația (6.9) diferă de al doilea prin faptul că $\omega_2 \rightarrow -\omega_2$, $\varphi_2 \rightarrow -\varphi_2$. Astfel I_{12} se poate scrie direct pe baza relației (6.10) în care modificăm semnele la ω_2 și φ_2 .

$$I_{12} = \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cdot \frac{\sin \frac{(\omega_1 - \omega_2)T}{2}}{(\omega_1 - \omega_2)T} \cdot \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)T + 2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} \quad (6.11)$$

$$I_{12} \text{ este maxim când } \frac{\sin \frac{(\omega_1 - \omega_2)T}{2}}{(\omega_1 - \omega_2)T} \rightarrow 1 \text{ adică atunci când } \omega_2 \rightarrow \omega_2$$

Așadar prima condiție necesară pentru înalta coerență a celor două unde cere ca pulsațiile lor să fie extrem de apropiate ($\omega_1 \approx \omega_2$). Considerând că această condiție este îndeplinită ($\omega_1 = \omega_2$), din relația (6.9) obținem (al doilea termen a fost neglijat):

$$I_{12} = \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cdot \overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (6.12)$$

Dacă sursele S_1 și S_2 sunt independente, diferența de fază $\varphi_1 - \varphi_2$ a fazelor aleatorii este de asemenea o funcție aleatoare. În acest caz diferența de fază variază mult pe durata de observare și valoarea medie din relația (6.12) se anulează. Astfel a doua condiție necesară pentru înalta coerență a celor două unde cere ca diferența de fază să fie constantă pe durata de observare. A treia condiție pentru înalta coerență cere ca pe durata de observare unghiul dintre \vec{E}_{10} și \vec{E}_{20} să fie egal cu 0° (pentru acest unghi I_{12} este maxim). Ultima condiție (a patra) necesară pentru înalta coerență cere ca oscilațiile câmpurilor electromagnetice ale celor două unde să se suprapună și în timp, nu numai în spațiu. Din (6.5) și (6.11), pentru $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, rezultă:

$$I = I_1 + I_2 + \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (6.6)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos(\Delta\varphi) \quad (6.7) \quad (6.13)$$

Valoarea maximă se obține pentru

$$\Delta\varphi = 0, \pm 2\pi, \dots, \pm 2n\pi \quad (6.14)$$

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 \quad (6.15)$$

În acest caz diferența de drum este un număr întreg de lungimi de undă

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta \quad (6.16)$$

$$\delta = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot 2n\pi \quad \Rightarrow \quad \delta = n\lambda \quad (6.17)$$

Valoarea minimă se obține pentru

$$\Delta\varphi = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm(2n + 1)\pi \quad (6.18)$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2 \quad (6.19)$$

În acest caz diferența de drum este un număr impar de semiunde

$$\delta = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot (2n+1)\pi \quad \Rightarrow \quad \delta = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \quad (6.20)$$

Se definește vizibilitatea (contrastul) franjelor prin

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (6.21)$$

Folosind (6.15) și (6.19), rezultă:

$$V = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)} = \frac{2\sqrt{I_2/I_1}}{1 + I_2/I_1} \leq 1 \quad (6.22)$$

Din această relație se constată că dacă $I_1 = I_2$ atunci $V = 1$, iar dacă $I_1 \ll I_2$ sau $I_1 \gg I_2$ atunci $V \rightarrow 0$. În practică vizibilitatea franjelor este întotdeauna mai mică decât 1 (chiar pentru $I_1 = I_2$), datorită dimensiunii finite a surselor și datorită lărgimii finite a liniilor spectrale.

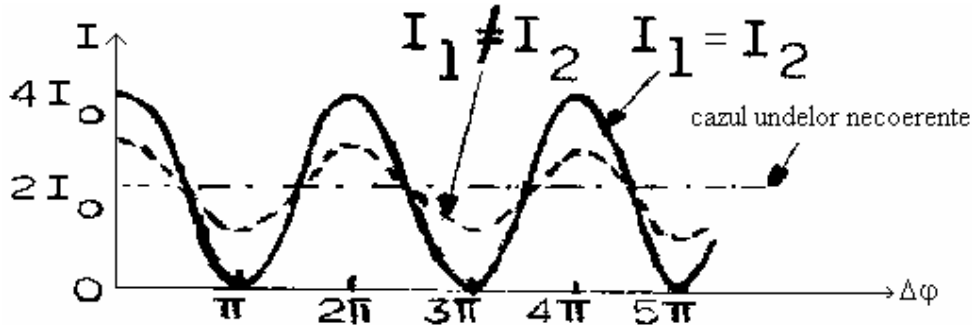
Dacă $I_1 = I_2 = I_0$ atunci relația (6.13) devine

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta\varphi) \quad (6.23)$$

sau

$$I = 4I_0 \cdot \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \quad (6.24)$$

În acest caz graficul lui I în funcție de $\Delta\varphi$ are forma

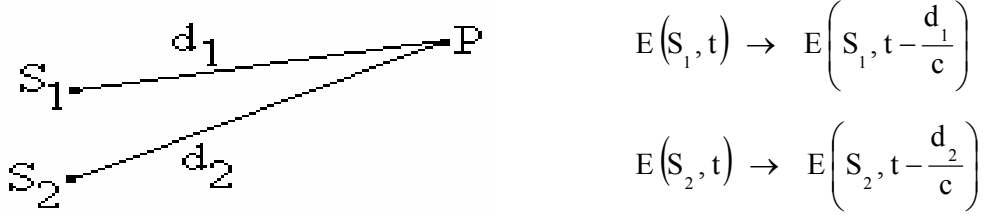


6.3. Funcția de coerență mutuală. Gradul de coerență

Presupunem că printr-un procedeu de divizare a frontului unei unde cvazimonocromatice (lărgimea de bandă $\delta\nu \ll \nu$) se obțin în două puncte S_1 și S_2 două unde care, la un moment ulterior t , interferează într-un punct P . Dacă neglijăm contribuția difracției, intensitatea câmpului electric în punctul P va fi

$$E(P, t) = E_1(P, t) + E_2(P, t) = E\left(S_1, t - \frac{d_1}{c}\right) + E\left(S_2, t - \frac{d_2}{c}\right) \quad (6.25)$$

unde d_1/c este timpul în care lumina se propagă de la S_1 la P pe distanța d_1 , d_2/c este timpul de întârziere în care lumina se propagă pe distanța d_2 .



Datorită caracterului statistic al procesului (fluctuațiile datorate emisie spontane (aleatoare), vibrațiile mecanice ale elementelor optice, fluctuațiile din atmosferă) trebuie să se determine media pe ansamblu

$$\langle I(P, t) \rangle = \langle E^*(P, t) \cdot E(P, t) \rangle \quad (6.26)$$

și apoi se ia media temporală

$$\overline{\langle I(P, t) \rangle} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \langle I(P, t + t') \rangle dt' \quad (6.27)$$

Am folosit pentru intensitatea undei aceeași unitate de măsură ca și în paragraful anterior ($\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = 1$).

Folosind relațiile (6.25) și (6.26), obținem:

$$\langle I(P, t) \rangle = \left\langle \left| E\left(S_1, t - \frac{d_1}{c}\right) \right|^2 \right\rangle + \left\langle \left| E\left(S_2, t - \frac{d_2}{c}\right) \right|^2 \right\rangle + 2 \operatorname{Re} \left\langle E^*\left(S_1, t - \frac{d_1}{c}\right) E\left(S_2, t - \frac{d_2}{c}\right) \right\rangle \quad (6.28)$$

sau

$$\langle I(P, t) \rangle = \langle I_1(P, t) \rangle + \langle I_2(P, t) \rangle + 2 \operatorname{Re} \Gamma\left(S_1, t - \frac{d_1}{c}; S_2, t - \frac{d_2}{c}\right) \quad (6.29)$$

unde

$$\Gamma\left(S_1, t - \frac{d_1}{c}; S_2, t - \frac{d_2}{c}\right) = \left\langle E^*\left(S_1, t - \frac{d_1}{c}\right) \cdot E\left(S_2, t - \frac{d_2}{c}\right) \right\rangle \quad (6.30)$$

este funcția de coerență mutuală, iar

$$\langle I_1(P, t) \rangle = \left\langle \left| E\left(S_1, t - \frac{d_1}{c}\right) \right|^2 \right\rangle \equiv \text{intensitatea măsurată în } P \text{ în absența sursei } S_2$$

$$\langle I_2(P, t) \rangle = \left\langle \left| E\left(S_2, t - \frac{d_2}{c}\right) \right|^2 \right\rangle = \left\langle I\left(S_2, t - \frac{d_2}{c}\right) \right\rangle \equiv \text{intensitatea măsurată în } P \text{ în absența sursei } S_1$$

Pentru un câmp staționar, funcția de coerență mutuală este independentă de originea timpului (depinde de t_1 și t_2 numai prin intermediul diferenței $\tau = t_2 - t_1$). Avem:

$$\Gamma\left(S_1, t - \frac{d_1}{c}; S_2, t - \frac{d_2}{c}\right) = \Gamma\left(S_1, S_2, \frac{d_2 - d_1}{c}\right) \quad (6.31)$$

$$I = \langle I(P, t) \rangle = \langle I(P) \rangle; I_1 = \langle I_1(P, t) \rangle = \langle I_1(P) \rangle = \langle I(S_1) \rangle; I_2 = \langle I_2(P, t) \rangle = \langle I_2(P) \rangle = \langle I(S_2) \rangle \quad (6.32)$$

În acest caz relația (6.29) devine

$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \text{Re} \Gamma\left(S_1, S_2, \frac{d}{c}\right), \quad d = d_2 - d_1 \quad (6.33)$$

sau

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cdot \text{Re} \gamma\left(S_1, S_2, \frac{d}{c}\right) \quad (6.34)$$

unde

$$\gamma\left(S_1, S_2, \frac{d}{c}\right) = \frac{\Gamma\left(S_1, S_2, \frac{d}{c}\right)}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (6.35)$$

este gradul de coerență.

Câmpul monocromatic este un exemplu de câmp staționar. În acest caz:

$$\begin{aligned} E\left(S_1, t - \frac{d_1}{c}\right) &= E_{10} \cdot e^{i\left[\omega\left(t - \frac{d_1}{c}\right) + \varphi_1\right]}; E\left(S_2, t - \frac{d_2}{c}\right) = E_{20} \cdot e^{i\left[\omega\left(t - \frac{d_2}{c}\right) + \varphi_2\right]} \\ \Gamma\left(S_1, t - \frac{d_1}{c}; S_2, t - \frac{d_2}{c}\right) &\stackrel{(6.30)}{=} \left\langle E^*\left(S_1, t - \frac{d_1}{c}\right) \cdot E\left(S_2, t - \frac{d_2}{c}\right) \right\rangle = \\ &= E_{10} E_{20} \cdot e^{-i\omega t + i\omega \frac{d_1}{c} - i\varphi_1 + i\omega t - i\omega \frac{d_2}{c} + i\varphi_2} = E_{10} E_{20} \cdot e^{-i\left(\omega \frac{d_2 - d_1}{c} + \varphi_1 - \varphi_2\right)} = \end{aligned}$$

$$= \Gamma\left(S_1, S_2, \frac{d_2 - d_1}{c}\right) = \Gamma\left(S_1, S_2, \frac{d}{c}\right)$$

$$I_1 = \left\langle \left| E\left(S_1, t - \frac{d_1}{c}\right) \right|^2 \right\rangle = E_{10}^2 \quad \Rightarrow \quad E_{10} = \sqrt{I_1}$$

$$I_2 = \left\langle \left| E\left(S_2, t - \frac{d_2}{c}\right) \right|^2 \right\rangle = E_{20}^2 \quad \Rightarrow \quad E_{20} = \sqrt{I_2}$$

$$\text{Re} \Gamma\left(S_1, S_2, \frac{d}{c}\right) = E_{10} E_{20} \cdot \cos\left(\frac{\omega d}{c} + \Delta\varphi\right), \quad d = d_2 - d_1, \quad \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega d}{c} = \frac{2\pi d}{\lambda} \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} \Gamma\left(S_1, S_2, \frac{d}{c}\right) = \sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda} + \Delta\varphi\right) \quad (6.36)$$

$$\operatorname{Re} \gamma\left(S_1, S_2, \frac{d}{c}\right) = \frac{\operatorname{Re} \Gamma\left(S_1, S_2, \frac{d}{c}\right)}{\sqrt{I_1 I_2}} = \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda} + \Delta\varphi\right) \quad (6.37)$$

$$I \stackrel{(6.34)}{=} I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda} + \Delta\varphi\right) \quad (6.38)$$

Dacă $d = 0$ regăsim relația (6.13). Dacă $\Delta\varphi = 0$, pentru $d = n\lambda$ obținem I_{\max} , iar pentru $d = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ obținem I_{\min} .

Dacă $\Delta\varphi \neq 0$, atunci I devine maxim pentru

$$\frac{2\pi d}{\lambda} + \Delta\varphi = \pm 2n\pi \quad \Rightarrow \quad d = n\lambda + \lambda \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \quad (6.39)$$

deoarece în acest caz cosinusul este egal cu 1. Valoarea minimă a lui I se obține dacă:

$$\frac{2\pi d}{\lambda} + \Delta\varphi = \pm(2n+1)\pi \quad \Rightarrow \quad d = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda + \lambda \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \quad (6.40)$$

Pentru un câmp perfect monocromatic

$$\gamma\left(S_1, S_2, \frac{d}{c}\right) = e^{-i\left(\frac{\omega d}{c} + \Delta\varphi\right)} = e^{-i\left(\frac{2\pi d}{\lambda} + \Delta\varphi\right)} \quad (6.41)$$

Pentru $\Delta\varphi = 0$,

$$\gamma\left(S_1, S_2, \frac{d}{c}\right) = e^{-i\frac{\omega d}{c}} = e^{-i\omega\tau}, \quad \tau = \frac{d}{c} \quad (6.42)$$

Pentru o undă cvazimonocromatică, putem presupune că

$$\gamma(S_1, S_2, \tau) = \left| \gamma(S_1, S_2, \tau) \right| \cdot e^{-i\omega\tau}, \quad \tau = \frac{d}{c} \quad (6.43)$$

unde ω este pulsația centrală, iar modulul lui γ variază foarte lent cu τ în comparație cu $e^{-i\omega\tau}$. În acest caz în locul relației (6.38) obținem

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \left| \gamma(S_1, S_2, \tau) \right| \cdot \cos \frac{2\pi d}{\lambda} \quad (6.44)$$

Pentru o regiune din jurul lui P mult mai mare decât λ , cosinusul din expresia de mai sus variază foarte rapid cu d , între -1 și $+1$, în timp ce modulul lui γ rămâne practic neschimbat, deoarece are o variație lentă. Astfel în vecinătatea lui P , putem determina I_{\max} , I_{\min} și V .

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot |\gamma| \quad (6.45)$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot |\gamma| \quad (6.46)$$

$$V \stackrel{(6.21)}{=} \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \cdot |\gamma| \quad (6.47)$$

Se constată că modulul $|\gamma|$ al gradului de coerență complex este o măsură a vizibilității franjelor de interferență. Pentru $I_1 = I_2$ se constată că $V = |\gamma|$. Dacă $I_{\max} = I_{\min}$ atunci $|\gamma| = 0$ (lumina necoerentă); pentru $|\gamma| = 1$ lumina este total coerentă, iar pentru $0 < |\gamma| < 1$ avem o coerență parțială. Pentru o undă monocromatică, din (6.42) rezultă $|\gamma| = 1$.

6.4. Coerența temporală

Funcția de coerență mutuală $\Gamma(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)$ determină coerența reciprocă a câmpurilor în două puncte diferite (\vec{r}_1 și \vec{r}_2) și la două momente de timp diferite (t_1 și t_2). Coerența temporală se referă la coerența undelor (corelația dintre fazele lor) într-un punct ($\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$) din câmpul de interferență la două momente de timp diferite. Coerența temporală a unei unde nu este perfectă dacă unda nu este monocromatică. Pentru o undă cvazimonocromatică, fiecare din componentele sale monocromatice va conduce la un sistem propriu de franje de interferență. Diferența de fază în punctul de observare depinde de frecvența componentei monocromatice considerate

$$\varphi = \frac{2\pi\ell}{\lambda} = 2\pi\nu\tau, \quad \tau = \frac{\ell}{c} \quad (6.48)$$

Asimilând distribuția de intensitate a liniei spectrale (caracteristică sursei primare care emite unda cvazimonocromatică incidentă pe un dispozitiv interferențial) cu un dreptunghi de lățime egală cu lățimea de bandă a liniei spectrale $\Delta\nu_{\frac{1}{2}}$, diferența de fază în punctul de observare P este cel mult

$$\Delta\varphi_{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot \Delta\nu_{\frac{1}{2}} \tau \quad (6.49)$$

Cu cât spectrul de frecvență este mai îngust ($\Delta\nu_{\frac{1}{2}}$ este mic), cu atât franjele de interferență care se suprapun contribuie mai puțin la neclaritatea imaginii de interferență. Dacă $\Delta\varphi_{\frac{1}{2}}$ este neglijabil față de π , atunci sistemul de franje de interferență corespunzător fiecărei frecvențe nu va fi distrus.

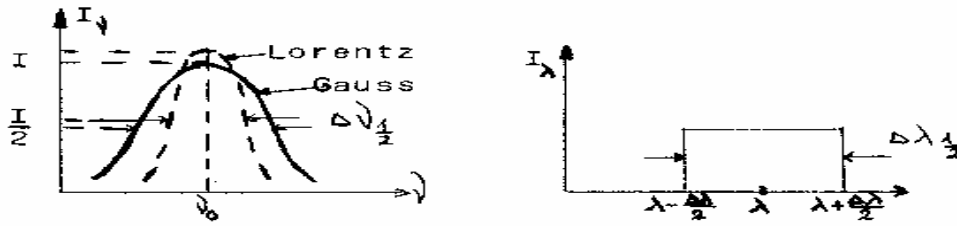
$$2\pi \cdot \Delta\nu_{\frac{1}{2}} \tau_c = \pi \Rightarrow \tau_c = \frac{1}{2\Delta\nu_{\frac{1}{2}}}, \quad \Delta\varphi < \pi \Rightarrow \tau \leq \tau_c = \frac{1}{2\Delta\nu_{\frac{1}{2}}} \quad (6.50)$$

Distanța străbătută de undă în timpul τ_c este

$$\left. \begin{aligned} \ell_c = c \cdot \tau_c = c \cdot \frac{1}{2\Delta\nu_{\frac{1}{2}}} \\ \nu = \frac{c}{\lambda}, \quad |d\nu| = \left| -\frac{c}{\lambda^2} \cdot d\lambda \right| \Rightarrow \Delta\nu_{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\lambda^2} \cdot \Delta\lambda_{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ell = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda_{\frac{1}{2}}} \quad (6.51)$$

Relațiile (6.50) și (6.51) nu pot fi considerate riguroase, datorită aproximației folosite pentru distribuția de intensitate a liniei spectrale. Dacă se impune condiția ca $\Delta\varphi_{\frac{1}{2}}$ fie neglijabil față de 2π , atunci în locul relațiilor (6.50) și (6.51) se obține:

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu_{\frac{1}{2}}}, \quad \ell = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda_{\frac{1}{2}}} \quad (6.52)$$



Uneori în locul relației (6.50) se definește un timp de coerență al radiației cvazimonocromatice de lărgime de bandă $\Delta\nu_{\frac{1}{2}}$

$$\tau_{\text{coerenta}} = \frac{1}{2\pi \cdot \Delta\nu_{\frac{1}{2}}} \quad (6.53)$$

iar lungimea de coerență (temporală) corespunzătoare este dată de relația

$$\ell_{\text{coerenta}} = c \cdot \tau_{\text{coerenta}} \quad (6.54)$$

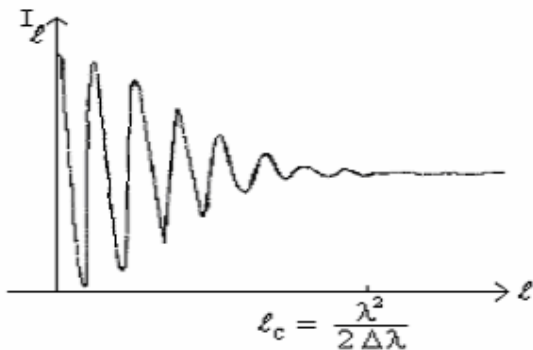
Pentru o lampă cu vapori de mercur ($\lambda_0 = 5461 \text{ \AA}$), $\tau_c = 10^{-12} \text{ s}$, $\ell_c = 0,3 \text{ mm}$, iar pentru un laser cu heliu-neon ($\lambda_0 = 6328 \text{ \AA}$), $\tau_c = 10^{-9} \text{ s}$, $\ell_c = 30 \text{ cm}$.

Putem obține relația (6.51) considerând că vizibilitatea franjelor este zero în punctul P pentru o diferență de drum $\ell = \ell_c$, astfel ca lungimea de undă $\lambda_1 = \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}$ să corespundă unui maxim de interferență, iar $\lambda_2 = \lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}$ să corespundă unui minim de interferență (sau invers). Am presupus, pentru simplitate, că intensitatea este constantă pentru λ_1 și λ_2 ca în figura de mai sus (intensitatea este presupusă constantă pentru lungimile de undă cuprinse între λ_2 și λ_1).

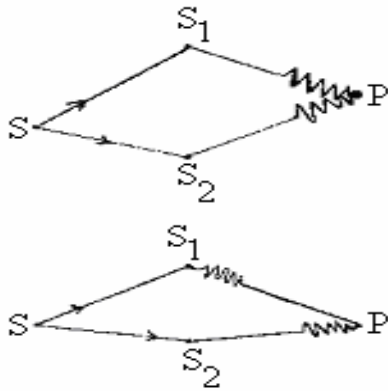
$$\ell_c = n\lambda_1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda_2, \quad \Delta\lambda^2 = \text{neglijabil} \quad (6.55)$$

Rezultă:

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \ell_c \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} \right) = \frac{\ell_c}{n(2n+1)} = \frac{\ell_c \lambda_1 \lambda_2}{\ell_c \cdot 2\ell_c} \approx \frac{\lambda^2}{2\ell_c} \Rightarrow \ell_c = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} \equiv (6.51)$$



Diferența de drum ℓ_c corespunde situației în care franjele de interferență dispar. Această valoare poate fi privită ca distanța pe care lumina emisă poate fi reprezentată de o singură undă sinusoidală.



Dacă $\tau \ll \tau_{\text{coerenta}}$ ($l \ll l_{\text{coerenta}}$) trenurile de undă care se întâlnesc în P provin de la același tren de undă emis de sursa punctiformă S. În acest caz undele care ajung în P interferă, deoarece diferența lor de fază este constantă în timp (nu este aleatoare).

Dacă $\tau > \tau_{\text{coerenta}}$ ($l > l_{\text{coerenta}}$), în punctul P nu are loc interferența undelor, deoarece diferența lor de fază este aleatoare (nu este staționară). Acest lucru se datorează faptului că trenurile de unde care ajung în P provin de la trenuri succesive emise de S.

Dacă undele care interferă au aceeași amplitudine, contribuția la intensitatea totală de la o bandă de frecvență dv a cărei intensitate spectrală este I_V , are forma (vezi relația (6.23))

$$2 I_V (1 + \cos \varphi) dv, \quad \varphi = 2 \pi \nu \tau \quad (6.56)$$

Rezultă:

$$I = \int 2 I_V (1 + \cos 2 \pi \nu \tau) dv = 2 I_0 \left[1 + \int I_V^n (\nu - \nu_0) \cos 2 \pi \nu \tau \cdot dv \right] \quad (6.57)$$

unde

$$I_0 = \int I_V dv, \quad I_V^n (\nu - \nu_0) = \frac{I_V(\nu)}{I_0} = \text{real}; \quad > 0 \quad (6.58)$$

$I_V^n (\nu - \nu_0)$ este intensitatea spectrală normalată și centrată.

Relația (6.57) poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned} I &= 2 I_0 \left\{ 1 + \text{Re} \left[e^{-i 2 \pi \nu_0 \tau} \int I_V^n (\nu - \nu_0) e^{-i 2 \pi (\nu - \nu_0) \tau} dv \right] \right\} = \\ &= 2 I_0 \left\{ 1 + \text{Re} \left[\gamma_t(\tau) e^{-i 2 \pi \nu_0 \tau} \right] \right\} = 2 I_0 \left\{ 1 + \text{Re} \left[|\gamma_t| e^{-i 2 \pi \nu_0 \tau} \cdot e^{-i \beta_t} \right] \right\} \Rightarrow \\ I &= 2 I_0 \left[1 + |\gamma_t| \cdot \cos(\omega_0 \tau + \beta_t) \right], \quad \omega_0 = 2 \pi \nu_0 \quad (6.59) \end{aligned}$$

Deoarece cosinusul variază cu τ mult mai rapid decât $|\gamma_t|$, atunci

$$I_{\max} = 2 I_0 (1 + |\gamma_t|), \quad I_{\min} = 2 I_0 (1 - |\gamma_t|) \Rightarrow V = |\gamma_t| \quad (6.60)$$

În cazul în care amplitudinile undelor care interferă sunt diferite, rezultă $V \neq |\gamma_t|$

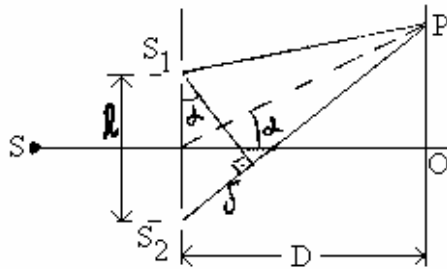
Relația dintre V și $I_V^n (\nu - \nu_0)$ constituie teorema Wiener-Kintchine. V se determină experimental pe baza franjelor de interferență. Astfel cunoscând vizibilitatea franjelor putem obține informații privind intensitatea spectrală I_V . Spectrometrul cu transformare Fourier permite obținerea spectrului cu rezoluție foarte înaltă al unor probe, în vederea determinării structurii și a interacțiunilor moleculare. Astfel studiul coerenței nu este o temă pur

academică. O problemă importantă o constituie determinarea fazei lui γ_t în prezența unor zgomote ale semnalului analizat.

6.5. Coerența spațială

Coerența spațială se referă la corelația dintre fazele undelor în două puncte diferite aflate într-un plan perpendicular pe direcția de propagare, la același moment de timp. Pentru surse staționare, coerența spațială este caracterizată de funcția de coerență mutuală $\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)$ și de gradul de coerență complex $\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)$.

Considerăm întâi un dispozitiv Young ideal în care sursa punctiformă S emite o undă monocromatică cu lungimea de undă λ . Această undă ajunge la un paravan prevăzut cu două orificii apropiate S_1 și S_2 de dimensiuni foarte mici. Conform principiului lui Huygens, în momentul în care cele două orificii sunt atinse de o suprafață de undă ele devin, la rândul lor, surse secundare coerente (deoarece provin de la aceeași sursă primară). Undele secundare emise de sursele S_1 și S_2 interferă pe un ecran, aflat la o distanță D destul de mare de paravan. Franjele de interferență sunt nelocalizate, deoarece ele apar în orice regiune din spațiu în care cele două unde se suprapun.



$$\sin \alpha = \frac{\delta}{\ell}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{x}{D}$$

Pentru unghiuri α foarte mici putem face aproximațiile $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \alpha$. Rezultă:

$$\frac{\delta}{\ell} = \frac{x}{D} \quad (6.61)$$

În punctul P se obține un maxim de interferență dacă diferența de drum este un număr întreg de lungimi de undă

$$\delta = n\lambda \Rightarrow \frac{n\lambda}{\ell} = \frac{x_n}{D} \Rightarrow x_n = n \frac{\lambda D}{\ell} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.62)$$

Pentru maximul de ordinul $n + 1$ se obține:

$$x_{n+1} = (n+1) \frac{\lambda D}{\ell} \quad (6.63)$$

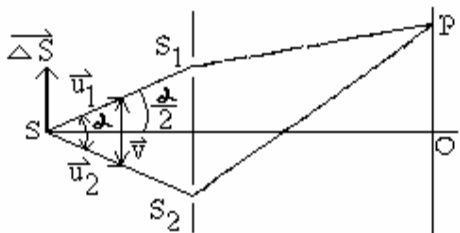
Interfranja este distanța dintre două maxime sau minime succesive

$$i = x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda D}{\ell} \quad (6.64)$$

Se constată că interfranja crește cu λ și D , fiind invers proporțională cu ℓ . Din (6.24) și (6.61) obținem:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \delta = \frac{\pi \ell x}{\lambda D} \quad (6.65)$$

$$I = 4I_0 \cdot \cos^2 \frac{\pi \ell x}{\lambda D} \quad (6.66)$$



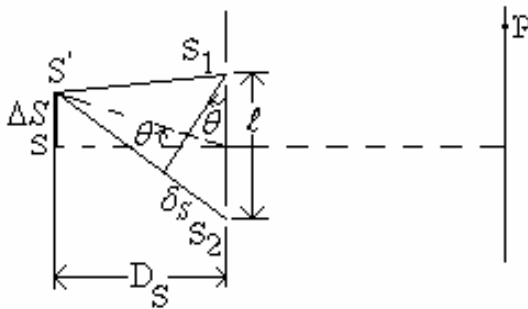
Pentru a studia coerența spațială vom urmări mai întâi care este influența unei deplasări a sursei S asupra diferenței de fază în punctul de observare P . Deoarece S_1 , S_2 și P sunt fixe, variația fazei în P la o deplasare a sursei primare este:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta[(SS_2P) - (SS_1P)] = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta[(SS_2) - (SS_1)] =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot \overline{\Delta S}$$

unde \vec{u}_1 și \vec{u}_2 sunt versorii din figura de mai sus. Se constată că nu există o variație a fazei dacă sursa S se deplasează perpendicular pe vectorul $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ (produsul scalar din (6.67) se anulează). De aceea nu apare o modificare a coerenței dacă în locul sursei punctuale S se pune o sursă sub forma unei fante perpendiculare la $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, lucru care se folosește în practică. Dacă însă deplasarea $\overline{\Delta S}$ se face paralel cu $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ atunci defazajul $\Delta\varphi$ din (6.67) este maxim:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta S \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta S \cdot \alpha$$



Fiecare din punctele sursei întinse va conduce la un sistem propriu de franje de interferență, independente unele de altele. De aceea intensitatea unei rezultante se exprimă ca suma intensităților componente (elementele sursei clasice întinse sunt considerate necoerente):

$$I = \sum_i 2 I_i (1 + \cos \Delta\varphi_i)$$

unde:

$$\Delta\varphi_i = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta [(S_i S_2 P) - (S_i S_1 P)]$$

Asimilând sursa primară cu o fantă dreptunghiulară de lățime ΔS , diferența de fază maximă care corespunde extremităților sursei nu contribuie la dispariția franjelor de interferență ca urmare a suprapunerii acestora dacă

$$\Delta\varphi \ll 2\pi \quad (6.68)$$

Pe baza figurii de mai sus obținem:

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\delta_s}{\ell} \\ \sin \theta &= \frac{\Delta S}{D_s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\delta_s}{\ell} = \frac{\Delta S}{D_s} \Rightarrow \delta_s = \frac{\ell \Delta S}{D_s}, \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta_s \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\ell \Delta S}{D_s} \quad (6.69)$$

Din (6.68) și (6.69) rezultă:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\ell \Delta S}{D_s} = 2\pi \Rightarrow \ell_s = \frac{\lambda D_s}{\Delta S}, \quad \sin \theta \approx \theta \approx \frac{\Delta S}{D_s} \Rightarrow \ell_s = \frac{\lambda}{\theta}$$

$$\Delta\varphi \ll 2\pi \quad \boxed{\ell < \ell_s = \frac{\lambda}{\theta}} \quad (6.70)$$

ℓ_s reprezintă lățimea de coerență spațială.

Obținem același rezultat dacă folosim relațiile (6.39), (6.61), (6.64) și (6.69)

$$d_{(\text{maxim})} = n\lambda + \lambda \cdot \frac{\Delta\varphi}{2\pi}, \quad x_{(\text{maxim})} = \frac{D\delta}{\ell} = \frac{Dd}{\ell} = n \cdot \frac{\lambda D}{\ell} + \frac{\Delta\varphi \cdot \lambda D}{2\pi \cdot \ell} \stackrel{(6.69)}{=} n \frac{\lambda D}{\ell} + \frac{D\Delta S}{D_s}$$

Termenul subliniat exprimă deplasarea sistemului de franje ca urmare a faptului că sursa S' nu este echidistantă față de S_1 și S_2 (datorită întinderii sursei primare). Franjele asociate unei surse punctiforme coincid practic cu franjele unor surse foarte apropiate, dacă termenul subliniat este mai mic decât interfranja:

$$\frac{D\Delta S}{D_s} < 1 \stackrel{(6.64)}{=} \frac{\lambda D}{\ell} \Rightarrow \ell < \frac{\lambda D_s}{\Delta S} = \frac{\lambda}{\sin\theta} \approx \frac{\lambda}{\theta} = \ell_s \equiv (6.70)$$

Dacă se impune condiția mai restrictivă $\Delta\varphi \ll \pi$, echivalentă cu inegalitatea $\frac{D\Delta S}{D_s} < \frac{1}{2}$, atunci lățimea de coerență spațială are expresia $\ell_{\text{coerenta spatiala}} = \frac{\lambda}{2\theta}$. Pentru Soare ($\theta \approx 32'$), $\ell_s \approx 6 \cdot 10^{-5}$ m, iar pentru o stea îndepărtată ($\theta \approx 1'$) $\ell_s \approx 2 \cdot 10^{-3}$ m.

Putem evalua intensitatea totală în punctul de observare P în același mod ca în paragraful anterior.

$$I = \iint 2 I_s [1 + \cos(\varphi_s + \varphi_p)] dS = 2 I_0 [1 + \iint I_s^n \cdot \cos(\varphi_s + \varphi_p) dS] \quad (6.71)$$

unde S este un punct curent în planul sursei primare, P este un punct curent de pe ecranul de observare,

$$\varphi_s = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\ell x_s}{D_s}, \quad \varphi_p = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\ell x_p}{D}, \quad (6.72)$$

$$I_0 = \iint I_s \cdot dS, \quad I_s^n = \frac{I_s}{I_0} \quad (6.73)$$

iar $I_s = I_s(S)$ este distribuția spațială de intensitate în planul sursei primare. Deoarece I_s^n este real și pozitiv, putem pune I sub forma:

$$I = 2 I_0 [1 + |\gamma_s| \cdot \cos(\varphi_p + \beta_s)] \quad (6.74)$$

unde

$$\gamma_s = \iint I_s^n \cdot e^{-i\varphi_s} \cdot dS = |\gamma_s| \cdot e^{-i\beta_s} \quad (6.75)$$

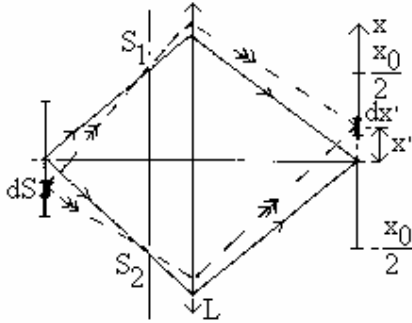
Deoarece cosinusul variază cu x_p (prin intermediul lui φ_p) mult mai rapid decât $|\gamma_s|$, atunci

$$I_{\max} = 2 I_0 (1 + |\gamma_s|), \quad I_{\min} = 2 I_0 (1 - |\gamma_s|) \Rightarrow V = |\gamma_s| \quad (6.76)$$

γ_s se numește grad de coerență spațială complex. Relația dintre V și I_s^n constituie teorema lui Van Cittert și Zernike. Vizibilitatea V se determină experimental pe baza franjelor de interferență. Astfel, cunoscând vizibilitatea franjelor putem obține informații privind intensitatea spațială normalată și centrată I_s^n și deci asupra diametrului aparent al

sursei primare. Această metodă este folosită pentru determinarea diametrului aparent al stelelor. Întrucât faza lui γ_s nu este accesibilă, se folosesc informații suplimentare. Cazul ideal în care sursa este punctuală corespunde lui $\gamma_s = 1$.

În continuare determinăm vizibilitatea franjelor de interferență în cazul unei surse liniare, simetrică față de axa sistemului.



Presupunem că: imaginea sursei este liniară (dimensiunea imaginii este x_0); intensitatea emisă de un element al sursei dS este proporțională cu lungimea elementului și deci cu lungimea imaginii dx' ; intensitățile datorate elementelor de aceeași mărime sunt egale (sursa este uniformă); putem aduna contribuțiile intensităților de la diferite elemente ale sursei în planul de observare (elementele dS ale sursei nu sunt surse coerente, lucru valabil pentru sursele termice, dar nu și pentru lasere).

În figura de mai sus L este o lentilă convergentă.

Pe baza relației (6.66) putem scrie:

$$dI = 4I_0 \cdot \cos^2 \left[\frac{\pi \ell}{\lambda D} (x - x') \right] dx' \quad (6.77)$$

Am considerat că dI este proporțional cu dx' , iar franjele sunt centrate față de punctul de coordonată x' care este imaginea centrului elementului dS . Integrând peste întreaga sursă (deci peste întreaga imagine) obținem:

$$\begin{aligned} I &= \int dI = \int_{-\frac{x_0}{2}}^{\frac{x_0}{2}} 4I_0 \cdot \cos^2 \left[\frac{\pi \ell}{\lambda D} (x - x') \right] dx' = 4I_0 \int_{-\frac{x_0}{2}}^{\frac{x_0}{2}} \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{2\pi \ell}{\lambda D} (x - x') \right] dx' = \\ &= 2I_0 \left[x_0 + \int_{-\frac{x_0}{2}}^{\frac{x_0}{2}} \cos \frac{2\pi \ell}{\lambda D} (x - x') dx' \right], \quad d(x - x') = -dx' \end{aligned}$$

(integrarea se face după variabila x').

$$I = 2I_0 \left[x_0 - \frac{2\pi \ell}{\lambda D} \cdot \sin \frac{2\pi \ell}{\lambda D} (x - x') \right]_{-\frac{x_0}{2}}^{\frac{x_0}{2}} = 2I_0 \left\{ x_0 - \frac{\lambda D}{2\pi \ell} \left[\sin \frac{2\pi \ell}{\lambda D} \left(x - \frac{x_0}{2} \right) - \sin \frac{2\pi \ell}{\lambda D} \left(x + \frac{x_0}{2} \right) \right] \right\}$$

Folosind relația: $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$,

$$I = 2I_0 \left[x_0 - \frac{\lambda D}{2\pi \ell} \cdot 2 \sin \frac{2\pi \ell}{\lambda D} \left(-\frac{x_0}{2} \right) \cos \frac{2\pi \ell}{\lambda D} \left(\frac{2x}{2} \right) \right] \Rightarrow$$

$$I = 2I_0 \left[x_0 + \frac{\lambda D}{\pi \ell} \cdot \sin \frac{\pi \ell x_0}{\lambda D} \cos \frac{2\pi \ell x}{\lambda D} \right] = 2I_0 \left[x_0 + \frac{\sin \frac{\pi \ell x_0}{\lambda D}}{\frac{\pi \ell x_0}{\lambda D}} \cdot \cos \frac{2\pi \ell x}{\lambda D} \right] \Rightarrow$$

$$I = 2 I_0 x_0 \left[1 + \frac{\sin \frac{\pi \ell x_0}{\lambda D}}{\frac{\pi \ell x_0}{\lambda D}} \cdot \cos \frac{2 \pi \ell x}{\lambda D} \right] \quad (6.78)$$

Se constată că dacă dublăm dimensiunea sursei (dublăm dimensiunea imaginii x_0) are loc o dublare a intensității, în acord cu proporționalitatea presupusă. Relațiile (6.77) și (6.78) nu sunt corecte din punct de vedere dimensional ($dI \sim dx'$; $I \sim x_0$). De aceea vom “norma” intensitatea astfel:

$$I^n = \frac{I}{x_0} \quad (6.79)$$

Obținem:

$$I^n = 2 I_0 \left[1 + \frac{\sin \frac{\pi \ell x_0}{\lambda D}}{\frac{\pi \ell x_0}{\lambda D}} \cdot \cos \frac{2 \pi \ell x}{\lambda D} \right] \quad (6.80)$$

Dacă particularizăm pentru cazul unei surse primare punctiforme ($x_0 \rightarrow 0$) obținem:

$$I^n = 2 I_0 \left[1 + \cos \frac{2 \pi \ell x}{\lambda D} \right] = 4 I_0 \cdot \cos^2 \frac{\pi \ell x}{\lambda D} \equiv (6.66)$$

Din relația (6.80) rezultă:

$$I_{\max}^n = 2 I_0 \left[1 + \frac{\sin \frac{\pi \ell x_0}{\lambda D}}{\frac{\pi \ell x_0}{\lambda D}} \right] \quad \text{pentru } \cos \frac{2 \pi \ell x}{\lambda D} = 1$$

$$I_{\min}^n = 2 I_0 \left[1 - \frac{\sin \frac{\pi \ell x_0}{\lambda D}}{\frac{\pi \ell x_0}{\lambda D}} \right] \quad \text{pentru } \cos \frac{2 \pi \ell x}{\lambda D} = -1$$

$$V = \frac{\sin \frac{\pi \ell x_0}{\lambda D}}{\frac{\pi \ell x_0}{\lambda D}} \quad (6.81)$$

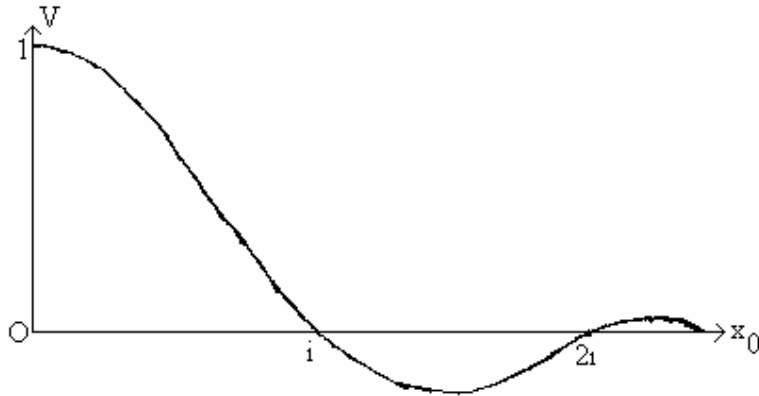
Pentru $x_0 \rightarrow 0 \Rightarrow V \rightarrow 1$ (cazul ideal)

$$x_0 = \frac{\lambda D}{\ell} = i \Rightarrow \sin 2\pi = 0, V = 0$$

$$x_0 < i \Rightarrow 0 < V < 1$$

$$i < x_0 < 2i \Rightarrow V < 0 \text{ (contrast invers)}$$

Graficul lui v în funcție de x_0 are următorul aspect:



6.6. Lama cu fețe plan paralele

Interferența în lame transparente cu fețe plan paralele se bazează pe metoda divizării amplitudinii unei incidente. Interferența pe o lamă suficient de subțire poate fi observată în lumină reflectată sau în lumină transmisă. Avantajul acestei metode constă în posibilitatea folosirii unor surse de lumină întinse în locul unor surse punctiforme (micșorând dimensiunile unei surse reale se pierde o parte din fluxul luminos emis de suprafața întregii surse). Din relația (6.67) se constată că $\Delta\varphi = 0$ dacă $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ (lama cu fețe plan paralele permite obținerea a două raze pornind de la o singură rază incidentă).

Considerăm o lamă cu fețe paralele având grosimea e și indicele de refracție n . Presupunem că lama se află în aer. În cazul incidenței normale, coeficienții de reflexie și de transmisie în amplitudine, pe prima față a lamei, sunt (vezi pagina 74):

$$\left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)_1 = r_1 = \frac{1-n}{1+n} < 0 \quad , \quad \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}}\right)_1 = t_1 = \frac{2}{1+n} > 0$$

(coeficienții de reflexie și de transmisie în intensitate au fost notați cu litere mari (R și T)).

Deoarece $r_1 < 0$ rezultă că unda reflectată de prima față este defazată cu π față de unda incidentă. Pe fața a doua nu există acest defazaj deoarece:

$$\left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)_2 = r_2 = \frac{n-1}{1+n} > 0 \quad , \quad \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}}\right)_2 = t_2 = \frac{2n}{1+n} > 0$$

	<p>Diferența de drum optic dintre razele corespunzătoare undelor care interferă în lumină reflectată este</p> $\delta_r = n(AB + BC) - (AD - \frac{\lambda}{2}) \quad , \quad AB = BC \quad ,$ $\cos r = \frac{e}{AB} \Rightarrow AB = BC = \frac{e}{\cos r}$ $\sin i = \frac{AD}{2QB} \quad , \quad \operatorname{tg} r = \frac{QB}{e} \Rightarrow$ $AD = 2QB \sin i = 2e \operatorname{tg} r \cdot \sin i \quad , \quad \sin i = n \sin r$ $\delta_r = 2n \cdot AB - AD + \frac{\lambda}{2} \quad \text{devine:}$
--	---

$$\delta_r = 2n \frac{e}{\cos r} - 2e \frac{\sin r}{\cos r} \cdot n \cdot \sin r + \frac{\lambda}{2} = \frac{2ne}{\cos r} (1 - \sin^2 r) + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\delta_r = 2ne \cdot \cos r + \frac{\lambda}{2}} \quad (6.82)$$

Diferența de fază corespunzătoare este:

$$\varphi_r = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta_r = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2ne \cdot \cos r + \pi \quad (6.83)$$

Adăugarea termenului $\frac{\lambda}{2}$ în (6.82) este necesară deoarece reflexia în A se face cu o modificare de fază egală cu π (reflexia la suprafața de separare dintre aer și un mediu cu indice de refracție mai mare).

Deoarece $BCG = ABC$ și $BF = AD$, diferența de drum optic dintre razele corespunzătoare undelor care interferă în lumina transmisă este:

$$\delta_t = 2ne \cdot \cos r \quad (6.84)$$

Franjele de interferență obținute în lumina transmisă sunt complementare cu cele obținute în lumina reflectată (apare diferența $\frac{\lambda}{2}$ între ele), primele prezentând un maxim acolo unde celelalte au un minim și invers. Deoarece toate razele care cad sub același unghi de incidență i au același unghi de refracție r și deci aceeași diferență de drum optic, franjele de interferență se numesc franje de egală înclinare (grosimea lamei fiind constantă, ansamblul punctelor de egală intensitate $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos \varphi$, $\varphi = \varphi_r$ sau $\varphi = \varphi_t$ și deci de egală diferență de fază este definit de $r = \text{constant}$, adică de $i = \text{constant}$). Toate razele care cad pe lamă sub același unghi de incidență determină o suprafață conică având vârful în S. De aceea franjele de interferență se prezintă sub forma unor inele luminoase și întunecoase concentrice. Deoarece undele care interferă au vectorii de undă paraleli, aceste franje sunt localizate la infinit. Pentru a le aduce la o distanță finită se folosește o lentilă convergentă. În practică cele două lentile sunt paralele cu fețele lamei (în cazul interferenței în lumină reflectată observarea franjelor de interferență necesită folosirea unei lame semitransparente).

Pentru o lamă de sticlă ($n = 1,5$), coeficienții de reflexie și de transmisie pe cele două fețe ale lamei sunt $r_1 = -0,2$; $r_2 = 0,2$; $t_1 = 0,8$; $t_2 = 1,2$, astfel că amplitudinile undelor reflectate sunt aproximativ egale ($|r_1| = 0,2$; $t_1 t_2 r_2 = 0,19$). Am luat în considerare numai primele două unde reflectate și am presupus că amplitudinea unei incidente este egală cu 1. Amplitudinile primelor două unde transmise sunt foarte diferite ($t_1 t_2 = 0,96$; $t_1 t_2 r_2^2 = 0,04$). Astfel, în timp ce fasciculele reflectate au intensități aproximativ egale și deci vor da naștere la franje de vizibilitate mare, primele două fascicule transmise având intensități diferite vor conduce la franje cu un contrast foarte slab. Pentru o lamă argintată pe ambele părți toate undele reflectate, exceptând-o pe prima, au practic aceeași amplitudine; în transmisie toate undele au practic aceeași amplitudine.

Instrumentele optice conțin un număr mare de suprafețe de separare aer-sticlă. Pentru un obiectiv fotografic de calitate, care conține opt suprafețe de separare, are loc o pierdere prin reflexie de 40% din fluxul luminos incident. Reducerea acestor pierderi se realizează prin depunerea pe suprafața pieselor de sticlă a unor straturi subțiri (MgF_2 , $n_s = 1,35$) din substanțe dielectrice transparente.

	<p>Pentru ca intensitatea reflectată să fie minimă se impune <u>condiția de minim de interferență</u></p> $2 n_s e \cdot \cos r = (2 m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, \dots$ <p>(deoarece $1 < n_s < n$ pe ambele suprafețe de trecere apare un drum suplimentar egal cu $\frac{\lambda}{2}$) și se cere ca</p> $\frac{1 - n_s}{1 + n_s} = \frac{n_s - n}{n_s + n} \Rightarrow n_s = \sqrt{n} < n$
--	---

(coeficienții de reflexie în amplitudine sunt egali la cele două suprafețe de separare). La incidență normală ($\cos r = 1$), grosimea minimă a stratului corespunde lui $m = 0$:

$$e_{\min} = \frac{\lambda}{4 n_s} \quad (6.85)$$

Se poate arăta că există o echivalență geometrică între interferometrul Michelson și o lamă subțire de aer în care se observă interferența în lumină reflectată.

6.7. Interferometrul Michelson

Interferometrul Michelson este format dintr-o lamă semitransparentă LS și din două oglinzi plane O_1 și O_2 perpendiculare una pe cealaltă. Lama semitransparentă LS este înclinată la 45° față de normalele la oglinzile O_1 și O_2 .

	<p>Dacă grosimea lamei semireflectante LS nu este neglijabilă, se folosește o a doua lamă LS' identică, numită compensatoare, care are rolul de a elimina diferențele dintre drumurile optice datorate lamei LS. Dacă imaginea O'_1 a oglinzii O_1 este paralelă cu O_2, atunci spațiul dintre O_2 și O'_1 este echivalent cu o lamă subțire de aer, astfel că în planul focal al lentilei L se obțin franje de interferență de egală înclinare (inele Haidinger).</p>
--	---

6.8. Interferența a N unde coerente

6.8.1. Cazul în care amplitudinile complexe succesive formează o serie geometrică de rație $e^{-i\varphi}$

Considerăm că într-un punct P se suprapun N unde coerente ale căror vectori intensitate de câmp electric sunt paraleli:

$$E_1 = E_0(t), E_2 = E_0(t)e^{-i\varphi}, E_3 = E_0(t)e^{-i2\varphi}, \dots, E_N = E_0(t)e^{-i(N-1)\varphi} \quad (6.86)$$

Se constată că amplitudinile complexe succesive formează o serie geometrică de rație $e^{-i\varphi}$. Intensitatea câmpului electric rezultat din punctul P are expresia:

$$E = E_0 \left(1 + e^{-i\varphi} + e^{-i2\varphi} + \dots + e^{-i(N-1)\varphi} \right) = E_0 \frac{1 - e^{-iN\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}} \quad (6.87)$$

(în cazul particular al unei serii geometrice infinite se obține:

$$E = E_0 \frac{1}{1 - e^{-i\varphi}} \quad (6.88)$$

Intensitatea undei în P este:

$$I = I_0 \left| \frac{1 - e^{-iN\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}} \right|^2 = I_0 \left(\frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2 \quad (6.89)$$

Am folosit o relație de forma

$$\begin{aligned} |1 - e^{-ix}|^2 &= (1 - e^{ix})(1 - e^{-ix}) = 1 - e^{-ix} - e^{ix} + 1 = 2 - (e^{ix} + e^{-ix}) = \\ &= 2 \left(1 - \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) = 2(1 - \cos x) = 4 \sin^2 \frac{x}{2} \quad \text{unde } x \rightarrow N\varphi \text{ sau } x \rightarrow \varphi. \end{aligned}$$

Pentru

$$\varphi = \pm 2m\pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (6.90)$$

se obțin maximele principale de interferență. Acest lucru poate fi demonstrat alegând un ε suficient de mic și luând limita raportului din (6.89) în care punem $\varphi = 2m\pi + 2\varepsilon$.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin N(m\pi + \varepsilon)}{\sin(m\pi + \varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin Nm\pi \cos N\varepsilon + \sin N\varepsilon \cos Nm\pi}{\sin m\pi \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \cos m\pi} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pm \sin N\varepsilon}{\pm \sin \varepsilon} = \frac{N\varepsilon}{\varepsilon} = N \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2} \right)^2 = N^2 \end{aligned}$$

Astfel intensitatea maximă a undei rezultante este mult mai mare decât în cazul suprapunerii a numai două unde ($4I_0$):

$$\boxed{I_{\max} = N^2 I_0} \quad (6.91)$$

Acest rezultat constituie unul din avantajele folosirii mai multor unde (amplificarea intensității nu se face printr-o creștere a energiei emise de surse, ci printr-o redistribuire spațială a sa). Funcția $I(\varphi)$ din (6.89) este pară, deoarece $I(\varphi) = I(-\varphi)$. Această funcție este periodică, întrucât $I(\varphi + 2\pi) = I(\varphi)$. De aceea este suficient să studiem funcția $I(\varphi)$ între 0 și 2π .

Derivând I în raport cu φ și egalând această derivată cu 0, obținem:

$$\frac{dI}{d\varphi} = 0 \Rightarrow I_0 \cdot 2 \frac{\sin \frac{N\varphi}{2} \cdot \frac{N}{2} \cos \frac{N\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} = 0 \Rightarrow$$

$$a) \quad \sin \frac{N\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{N\varphi}{2} = \ell\pi$$

Dacă $\ell = mN$ atunci reobținem condiția de maxim principal (6.90):

$$\ell = mN \Rightarrow \frac{N\varphi}{2} = mN\pi \Rightarrow \varphi = 2m\pi \equiv (6.90)$$

Dacă

$$\frac{N\varphi}{2} = \ell\pi ; \quad \ell = 1, 2, 3, \dots ; \quad \ell \neq mN \quad (6.92)$$

atunci intensitatea I se anulează (numărătorul din (6.89) este nul, iar numitorul este diferit de zero).

$$b) \quad N \cos \frac{N\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{N\varphi}{2} \Rightarrow N \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{N\varphi}{2}$$

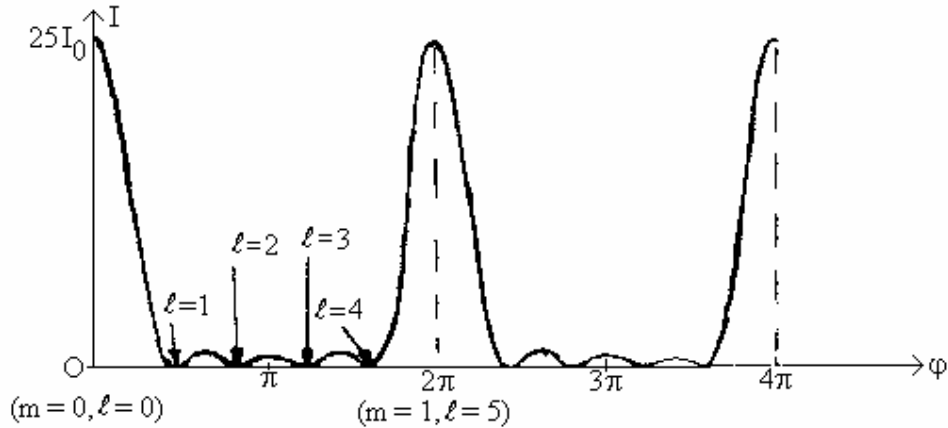
Această ecuație poate fi rezolvată pe cale grafică. Se obține:

$$\frac{\varphi}{2} \approx \frac{2\ell + 1}{N} \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi \approx (2\ell + 1) \frac{\pi}{N} ; \quad \ell = 1, 2, \dots \quad (6.93)$$

În acest caz se obțin maxime secundare.

Între maximul principal de ordinul zero ($m = 0$ în (6.90)) și de ordinul unu ($m = 1$ în (6.90)) , numărul ℓ din (6.92) poate lua valorile $\ell = 1, 2, 3, \dots, N-1$, realizându-se astfel $N - 1$ minime între care se află $N - 2$ maxime secundare. Lărgimea maximului principal este de $N/2$ ori mai mică decât în cazul interferenței a două fascicule coerente.

Reprezentând grafic intensitatea I în funcție de φ pentru $N = 5$ obținem figura următoare ($N = 5 \Rightarrow 4$ minime nule și 3 maxime secundare).



6.8.2. Cazul în care amplitudinile complexe succesive formează o serie geometrică de rație $Re^{-i\varphi}$, $R < 1$. Interferometrul Fabry-Pérot

Considerăm că într-un punct P se suprapun N unde coerente ale căror vectori intensitate de câmp electric sunt paraleli, dar se deosebesc de cei din relația (6.86):

$$E_1 = 0, \quad E_2 = E_0 R e^{-i\varphi}, \quad E_3 = E_0 R^2 e^{-i2\varphi}, \quad \dots, \quad E_N = E_0 R^{N-1} e^{-i(N-1)\varphi} \quad (6.94)$$

Se constată că amplitudinile complexe succesive formează o serie geometrică de rație $Re^{-i\varphi}$. Presupunând că $R < 1$ iar $N \gg 1$, obținem:

$$E = E_0 \left(1 + R e^{-i\varphi} + R^2 e^{-i2\varphi} + \dots + R^{N-1} e^{-i(N-1)\varphi} \right) = E_0 \frac{1 - R^N e^{-iN\varphi}}{1 - R e^{-i\varphi}} \Rightarrow$$

$$E \underset{R \leq 1}{\overset{N \gg 1}{\approx}} E_0 \frac{1}{1 - R e^{-i\varphi}} \quad (6.95)$$

(suma unei serii geometrice infinite).

Intensitatea unei rezultante în P este:

$$\begin{aligned}
 I &= I_0 \frac{1}{|1 - R e^{-i\varphi}|^2} = I_0 \frac{1}{1 - R e^{-i\varphi}} \cdot \frac{1}{1 - R e^{-i\varphi}} = I_0 \frac{1}{1 + R^2 - 2R \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}} = \\
 &= I_0 \frac{1}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} = \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{I_0}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \Rightarrow \\
 I &= \frac{I_0}{(1 - R)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (6.96)
 \end{aligned}$$

Pentru

$$\varphi = 2m\pi ; m = 0, 1, 2, \dots \quad (6.97)$$

obținem valoarea maximă a intensității:

$$I_{\max} = \frac{I_0}{(1 - R)^2} \quad (6.98)$$

Din relațiile (6.96) și (6.98) obținem:

$$I = \frac{I_{\max}}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (6.99)$$

Se definește funcția lui Airy $A(\varphi)$ prin relația:

$$A(\varphi) = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \text{funcție pară periodică} \quad (6.100)$$

unde

$$F = \frac{4R}{(1 - R)^2} = \text{fineața franjelor} \quad (6.101)$$

Valoarea minimă a intensității se obține pentru $\sin \frac{\varphi}{2} = 1$:

$$I_{\min} = \frac{I_{\max}}{1 + F} \quad (6.102)$$

Vizibilitatea franjelor se exprimă în funcție de fineța lor prin relația:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_{\max} - \frac{I_{\max}}{1 + F}}{I_{\max} + \frac{I_{\max}}{1 + F}} = \frac{F}{F + 2} \Rightarrow V = \frac{1}{1 + \frac{2}{F}} \quad (6.103)$$

Se constată că V crește cu F ($F \rightarrow \infty \Rightarrow V \rightarrow 1$). Din acest motiv F s-a numit fineța a franjelor. Din relația (6.101) rezultă că franjele sunt cu atât mai clare cu cât R este mai mare.

Pentru $I = I_{\max} / 2$, obținem:

$$\frac{I_{\max}}{2} = \frac{I_{\max}}{1 + F \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \Rightarrow 1 + F \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \Rightarrow F \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1, \varphi = \varphi_0 \pm \Delta\varphi, \varphi_0 = 2m\pi \Rightarrow$$

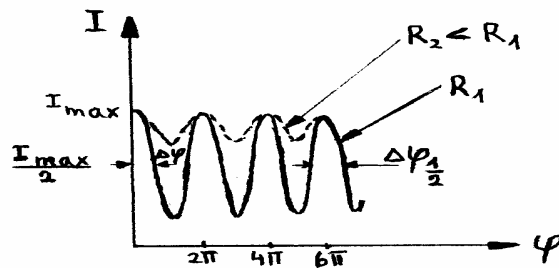
$$F \sin^2 \left(m\pi \pm \frac{\Delta\varphi}{2} \right) = 1 \Rightarrow F \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 1 \quad (\Delta\varphi \leq \pi) \quad F \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)^2 \approx 1 \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{1}{\sqrt{F}} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi \approx \frac{2}{\sqrt{F}} \quad (6.104)$$

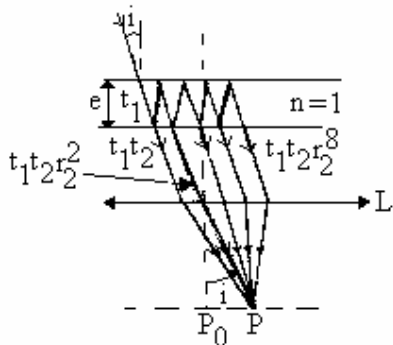
Lărgimea totală la semiînălțime este dublul acestei cantități:

$$\varphi = 2m\pi \pm \frac{\Delta\varphi_{\frac{1}{2}}}{2} \Rightarrow \Delta\varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{F}} \stackrel{(6.101)}{=} \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \quad (6.105)$$

Reprezentarea grafică a intensității rezultante $I(\varphi)$ este următoarea:



Interferometrul Fabry-Pérot este format din două plăci plane (precizia care asigură planeitatea trebuie să fie de cel puțin $\lambda/20$), paralele, cu suprafețe puternic reflectante, care delimitează o lamă de aer de grosime e . Franjele de interferență formate sunt asemănătoare celor obținute într-o lamă cu fețe plan paralele. Datorită fineții inelelor de interferență, acest interferometru se folosește pentru analiza distribuției spectrale a surselor.



Diferența de fază pentru undele care interferă în lumina transmisă se obține pe baza relației (6.84) în care se pune $n = 1$ (aer):

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2ne \cdot \cos r \quad (6.106)$$

Diferențiind și considerând incidența normală ($\cos r = 1$) obținem:

$$|\Delta\varphi| = \left| -\frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot e \cdot d\lambda \right| \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot e \cdot d\lambda$$

Criteriul de rezoluție al lui Rayleigh consideră că cea mai mică variație a lungimii de undă care poate fi detectată corespunde unei diferențe de fază superioare sau egale cu lărgimea totală la semiînălțime $\Delta\varphi_{\frac{1}{2}}$.

$$\Delta\varphi \geq \Delta\varphi_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot e \cdot d\lambda \geq \frac{4}{\sqrt{F}} \Rightarrow \Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{\pi e \sqrt{F}} \quad (6.107)$$

Se definește puterea de rezoluție

$$P = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} \stackrel{(6.107)}{=} \frac{\pi e \sqrt{F}}{\lambda} = \frac{\pi e \cdot 2\sqrt{R}}{\lambda(1-R)} \quad (6.108)$$

Dacă diferența de drum este un număr întreg de λ se obțin maxime de interferență:

$$2ne \cdot \cos r = k\lambda \Rightarrow 2e = k\lambda \Rightarrow k = \frac{2e}{\lambda} \quad (6.109)$$

(ordinul de interferență pentru maxime, la centru).

Din (6.108) și (6.109) obținem:

$$P = k \cdot N_{ef} \quad (6.110)$$

unde

$$N_{ef} = \frac{\pi \sqrt{R}}{1 - R} \quad (6.111)$$

joacă rolul unui număr efectiv de fascicule incidente, iar R este coeficientul de reflexie în intensitate:

$$R = r_2^2, T = 1 - R, T = t_1 t_2 \quad (\text{vezi pagina 123}) \quad (6.112)$$

Amplitudinile complexe ale undelor transmise sunt:

$$E_1 = E_0 t_1 t_2 = E_0 T, E_2 = E_0 t_1 t_2 r_2^2 e^{-i\varphi} = E_0 TR e^{-i\varphi}, E_3 = E_0 t_1 t_2 r_2^4 e^{-i2\varphi} = E_0 TR^2 e^{-i2\varphi}$$

În acest caz:

$$E = E_0 T \left(1 + R e^{-i\varphi} + R^2 e^{-i2\varphi} + \dots + R^{N-1} e^{-i(N-1)\varphi} + \dots \right) = E_0 T \frac{1}{1 - R e^{-i\varphi}} \Rightarrow$$

$$I = I_{\max} \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (6.113)$$

unde:

$$I_{\max} = \frac{I_0 \cdot T^2}{(1 - R)^2} \quad (6.114)$$

Se constată că dacă lipsește absorbția ($R + T = 1 \Rightarrow 1 - R = T$) atunci:

$$I_{\max} = I_0$$

(în cazul absorbției se introduce un coeficient de absorbție $A = 1 - (R + T)$, astfel că $I_{\max} \leq I_0$).

Un filtru interferențial este o lamă dielectrică cu fețe paralele parțial reflectante care transmite numai într-o anumită bandă spectrală. Astfel pentru a transmite o radiație de lungime de undă λ_1 se alege o lamă de o anumită grosime, pentru care se obțin maxime de interferență în lumină transmisă:

$$2ne = k\lambda_1 \quad (6.115)$$

Numărul întreg k este luat în general egal cu 1 astfel încât radiațiile cu lungimile de undă $\lambda_2, \lambda_3, \dots$, care verifică relația

$$k\lambda_1 = (k+1)\lambda_2 = (k+2)\lambda_3 = \dots \quad (6.116)$$

să fie mult distanțate în spectru față de λ_1 . Astfel pentru $n = 1$ și e cuprins între $2 \cdot 10^{-7}$ m și $6 \cdot 10^{-7}$ m interferometrul transmite în domeniul vizibil numai un maxim (pentru $e = 5 \cdot 10^{-7}$ m sunt transmise radiațiile cu lungimile de undă 1000 nm, 500 nm și 333,3 nm; dintre acestea numai cea cu $\lambda = 500$ nm se află în regiunea vizibilă a spectrului). Pentru $k = 2$ și $\lambda_1 = 5461 \text{ \AA}$ se obțin $\lambda_2 = 10922 \text{ \AA}$ și $\lambda_3 = 16383 \text{ \AA}$.