3. Ecuațiile lui Maxwell

3.1. Forma integrală a ecuațiilor lui Maxwell

Forma cea mai generală a legii lui Ampère (2.75) sau (2.77) reprezintă prima ecuație a lui Maxwell:

$$\oint_\Gamma \vec{H}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_{S_\Gamma} \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS} + \frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma}\vec{D}\cdot\overrightarrow{dS} \qquad (3.1)$$

sau:

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \mu_0\int_{S_\Gamma}\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\overrightarrow{dS} \qquad (3.1')$$

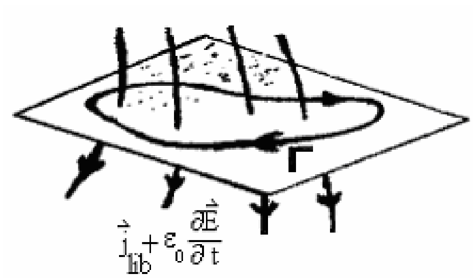
unde:

$$\vec{j} = \vec{j}_{lib} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \nabla\times\vec{M} \qquad (3.2)$$

este densitatea curentului total măsurată în A/m^2.

Trecerea de la relația (3.1') la (3.1) se face ținând seama de relațiile (2.110), (2.132) şi de teorema lui Stokes aplicată vectorului $\vec{M}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\ ,\ \ \vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right),\quad \oint_\Gamma \vec{M}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_{S_\Gamma}\left(\nabla\times\vec{M}\right)\cdot\overrightarrow{dS}$$



Curba închisă Γ din (3.1') limitează o suprafață de arie S_Γ prin care trece un curent cu densitatea:

$$\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Sensul de parcurs pe curba Γ este corelat cu sensul curentului prin suprafața S_Γ.

Legea inducției electromagnetice (legea lui Faraday), (2.83), reprezintă a doua ecuație a lui Maxwell:

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma}\vec{B}\cdot\overrightarrow{dS} = -\int_{S_\Gamma}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{dS} = -\frac{d}{dt}\Phi_{\vec{B}} \qquad (3.3)$$

Legea fluxului magnetic (2.60) reprezintă a treia ecuație a lui Maxwell:

$$\oiint_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{dA} = 0 \qquad (3.4)$$

Legea lui Gauss (2.23) reprezintă a patra ecuație a lui Maxwell:

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dA} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_\upsilon \rho\, d\upsilon = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_\upsilon\left(\rho_{lib} + \rho_{leg}\right)d\upsilon = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (3.5)$$

unde densitatea de sarcină legată este dată de relația (2.106) :

$$\rho_{leg} = -\nabla\cdot\vec{P} \qquad (3.6)$$

Cele patru ecuații ale lui Maxwell sunt relațiile fundamentale ale electromagnetismului. Se aplică numai la medii care sunt în repaus în raport cu axele de coordonate, iar aceste axe nu trebuie să fie în mişcare accelerată (nu trebuie să sufere nici rotații). Forma integrală a ecuațiilor lui Maxwell pentru câmpul electromagnetic este utilă pentru a rezolva problemele care au o simetrie sferică, cilindrică sau rectangulară unidimensională. Această limitare se datorează faptului că forma integrală a legilor se referă la o regiune întinsă a spațiului.

3.2. Forma diferențială (locală) a ecuațiilor lui Maxwell

Forma diferențială a ecuațiilor lui Maxwell se obține din forma integrală a acestora, folosind teorema lui Stokes şi teorema divergenței.

Generalizând legea lui Ampère (2.76) sau (2.78) obținem prima ecuație a lui Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{lib} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{3.7}$$

sau:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{3.8}$$

Legea inducției electromagnetice (2.84) reprezintă forma diferențială a ecuației a doua a lui Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3.9}$$

Legea fluxului magnetic (2.58) reprezintă forma diferențială a ecuației a treia a lui Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{3.10}$$

Legea lui Gauss (2.27) reprezintă a patra ecuație a lui Maxwell sub formă diferențială:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{lib} + \rho_{leg}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3.11}$$

Aceste ecuații sunt valabile şi în medii neomogene, neliniare şi anizotrope.

Dacă aplicăm operatorul ∇ ecuației (3.9) şi folosim faptul că divergența unui rotor este nulă, obținem:

$$\underbrace{\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right)}_{=0} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{B} = \text{ct.} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Am presupus că la un moment dat $\nabla \cdot \vec{B}$ este egal cu zero, astfel că această relație este valabilă la orice moment de timp, pentru fiecare punct din spațiu. Ecuațiile (3.9) şi (3.10) formează o pereche, deoarece pot fi obținute una din cealaltă.

Dacă luăm divergența ecuației (3.8) şi folosim legea conservării sarcinii electrice (2.37):

$$\text{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

obținem:

$$\underbrace{\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right)}_{=0} = \mu_0 \cdot \nabla \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) = \mu_0 c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \text{ct.}$$

Presupunând că pentru fiecare punct din spațiu, la un moment de timp arbitrar, $\nabla \cdot \vec{E}$ și ρ sunt simultan egale cu zero, atunci constanta este egală cu zero și obținem ecuația (3.11). Astfel ecuațiile (3.8) și (3.11) formează a doua pereche de ecuații ale lui Maxwell.

Pentru a descrie complet un câmp electromagnetic se completează ecuațiile lui Maxwell cu relații numite legi de material, care descriu proprietățile individuale ale mediului. Într-un mediu izotrop, liniar și staționar, legile de material se exprimă pe baza relațiilor (2.43), (2.100) sau (2.111) și (2.122) sau (2.133):

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_i\right) \tag{3.12}$$

$$\vec{P} = \chi_e \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \quad \text{sau} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} = \varepsilon \vec{E}, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e \tag{3.13}$$

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H} \quad \text{sau} \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = \mu \vec{H}, \quad \mu_r = 1 + \chi_m \tag{3.14}$$

Înlocuind (3.2) și (3.6) în (3.8) – (3.11), obținem ecuațiile lui Maxwell în funcție de vectorii $\vec{E}, \vec{B}, \vec{P}$ și $\vec{M}$:

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\left(\vec{j}_{lib} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}\right) \tag{3.15}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{3.16}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{3.17}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{lib} - \nabla \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} \tag{3.18}$$

Pentru a particulariza ecuațiile lui Maxwell la un mediu omogen, izotrop, liniar și staționar vom folosi relațiile (2.109), (2.111), (2.110), (3.6), (2.122), (2.133), (2.134) și $\rho = \rho_{lib} + \rho_{leg}$.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{lib}\ ,\ \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}\ ,\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\ ,\ \rho_{leg} = -\nabla \cdot \vec{P}\ ,\ \vec{M} = \chi_m \vec{H}\ ,\ \vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right),$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}\ ,\ \mu_r = 1 + \chi_m \qquad \Rightarrow$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\vec{D} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\vec{P} = \left(\varepsilon_r - 1\right)\varepsilon_0 \vec{E}} \tag{3.19}$$

$$\nabla \cdot \vec{P} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\nabla \cdot \vec{D} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\rho_{lib} \qquad \Rightarrow \qquad -\rho_{leg} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\rho_{lib} \qquad \Rightarrow$$

$$\rho = \rho_{lib} + \rho_{leg} = \rho_{lib} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\rho_{lib} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\rho = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon_r}} \tag{3.20}$$

$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\vec{M} = \frac{\left(\mu_r - 1\right)}{\mu_0 \mu_r} \cdot \vec{B}} \tag{3.21}$$

Înlocuind (3.19) – (3.21) în (3.15) – (3.18) obținem:

$$\nabla\times\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j}_{lib} + \mu_0(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\left(\nabla\times\frac{\mu_r - 1}{\mu_0\mu_r}\vec{B}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}_{lib} + \varepsilon_0\mu_0\varepsilon_r\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \nabla\times\vec{B} - \nabla\times\frac{\vec{B}}{\mu_r} \quad \Rightarrow$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_r\mu_0\vec{j}_{lib} + \mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla\times\vec{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu\vec{j}_{lib} \tag{3.22}$$

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{3.23}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \tag{3.24}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{lib} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\rho_{lib}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon} \tag{3.25}$$

Trecerea la forma generală a ecuațiilor lui Maxwell se face pe baza următoarelor înlocuiri:

$$\varepsilon \to \varepsilon_0 \quad , \quad \mu \to \mu_0 \quad , \quad \rho_{lib} \to \rho \quad , \quad \vec{j}_{lib} \to \vec{j} \tag{3.26}$$

Aceasta este o regulă generală de trecere de la ecuațiile (3.22) – (3.25) exprimate în funcție de $\varepsilon, \mu, \rho_{lib}, \vec{j}_{lib}$ la ecuațiile (3.8) – (3.11) exprimate în funcție de $\varepsilon_0, \mu_0, \rho, \vec{j}$. Ecuațiile (3.22) – (3.25) pot fi scrise în funcție de vectorii $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ şi $\vec{H}$:

$$\nabla\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{lib} \tag{3.27}$$

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{3.28}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \tag{3.29}$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_{lib} \tag{3.29'}$$

Aplicând vectorului $\vec{j}$ din (3.2) operatorul divergență, obținem:

$$\nabla\cdot\vec{j} = \nabla\cdot\vec{j}_{lib} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\vec{P}\right) + \underbrace{\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{M}\right)}_{=0} \quad \Rightarrow$$

$$\nabla\cdot\vec{j} = -\frac{\partial\rho_{lib}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\rho_{leg}\right) \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{lib} + \rho_{leg}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{3.30}$$

Am folosit legea conservării sarcinii libere ($\nabla\cdot\vec{j}_{lib} + \frac{\partial\rho_{lib}}{\partial t} = 0$) şi am obținut o generalizare a legii conservării sarcinii. Ecuația (3.30) mai poate fi obținută din relația (3.27) prin aplicarea operatorului divergență şi folosind relația (3.29'):

$$\nabla\left(\nabla\times\vec{H}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)=\nabla\cdot\vec{j}_{lib} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\cdot\vec{j}_{lib}+\frac{\partial\rho_{lib}}{\partial t}=0 \tag{3.30'}$$

Am obținut cazul particular al legii conservării sarcinii libere în acord cu relațiile (3.26).

Ecuațiile lui Maxwell sunt liniare, întrucât nu conțin produsul dintre două sau mai multe variabile ori derivate ale acestora. Rezultă că dacă $\vec{E}_1, \vec{B}_1$ satisfac ecuațiile lui Maxwell pentru $\rho=\rho_1$, $\vec{j}=\vec{j}_1$, iar $\vec{E}_2, \vec{B}_2$ satisfac ecuațiile lui Maxwell pentru $\rho=\rho_2$, $\vec{j}=\vec{j}_2$, atunci $\vec{E}_1+\vec{E}_2, \vec{B}_1+\vec{B}_2$ satisfac aceleaşi ecuații pentru $\rho=\rho_1+\rho_2$, $\vec{j}=\vec{j}_1+\vec{j}_2$, astfel că se verifică principiul superpoziției. În cazul mediilor neliniare, $\vec{P}$ şi $\vec{M}$ sunt funcții complicate de $\vec{E}$ şi $\vec{B}$, astfel că principiul superpoziției nu se aplică la ρ_{lib} şi $\vec{j}_{lib}$. Toate materialele devin neliniare la intensități mari ale câmpurilor.