3.4. Circuite de ordinul doi

3.4.1. Introducere

Circuitele care contin doua elemente dinamice (doua condensatoare, doua bobine sau un condensator si o bobina) se numesc circuite de ordinul doi. Un circuit liniar de ordinul doi contine rezistoare liniare, elemente dinamice liniare, surse comandate liniar si surse independente.

Un astfel de circuit poate fi caracterizat prin ecuatia de stare $\dot{x} = Ax + u(t)$ cu

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ vectorul variabilelor de stare (u_C pentru condensatoare si i_L pentru bobine)

$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$ – vectorul marimilor de intrare $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ – matricea de stare

Ecuatiei de stare $\dot{x} = Ax + u(t)$ ii corespund ecuatii diferentiale scalare de ordinul doi pentru x_1 si x_2:

$$\ddot{x}_1 = T\dot{x}_1 - \Delta x_1 + u_a(t) \text{ cu conditia } a_{12} \neq 0$$
$$\ddot{x}_2 = T\dot{x}_2 - \Delta x_2 + u_b(t) \text{ cu conditia } a_{21} \neq 0$$

unde: $T=a_{11}+a_{22}$ se numeste urma matricei A, $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ este determinantul matricei A si

$$u_a(t) = -a_{22}u_1(t) + a_{12}u_2(t) + \dot{u}_1(t)$$
$$u_b(t) = a_{22}u_1(t) - a_{11}u_2(t) + \dot{u}_2(t)$$

Daca $a_{12}=a_{21}=0$ ecuatia de stare se reduce la doua ecuatii diferentiale de ordinul intai. Pentru a deduce ecuatiile de ordinul II se considera $a_{12}\neq 0$, $a_{21}\neq 0$ si se deriveaza in raport cu timpul ecuatia de stare

$$\ddot{x}1 = a_{11}\dot{x}_1 + a_{12}\dot{x}_2 + \dot{u}1(t)$$

Se inlocuiesc $\dot{x}_1$ si $\dot{x}_2$ cu expresiile date de ecuatia de stare si rezulta:

$$\ddot{x}_1 = a_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u_1(t)) + a_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + u_2(t)) + \dot{u}_1(t)$$
$$\ddot{x}1 = (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})x_1 + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22})x_2 + a_{11}u_1(t) + a_{12}u_2(t) + \dot{u}_1 1(t)$$
$$dar\ a_{12}x_2 = \dot{x}_1 - a_{11}x_1 - u_1(t)$$

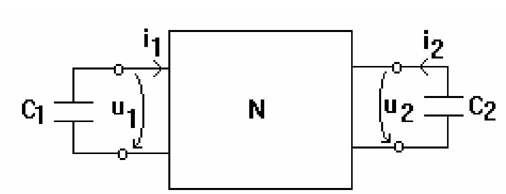
$$\ddot{x}_1 = (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})x_1 + (a_{11} + a_{22})(\dot{x}1 - a_{11}x_1 - u_1(t)) + a_{11}u_1(t) + a_{12}u_2(t) + \dot{u}_1(t)$$
$$\ddot{x}_1 = (a_{11} + a_{22})\dot{x}_1 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 - a_{22}u_1(t) + a_{12}u_2(t) + \dot{u}_1(t)$$

In mod similar se obtine si ecuatia de ordinul doi pentru x_2.

3.4.2. Scrierea ecuatiilor de stare ale circuitelor liniare

Orice circuit liniar invariant in timp de ordinul doi poate fi considerat ca un cuadripol diport rezistiv liniar N (care contine rezistoare liniare si surse independente) cu elementele dinamice conectate la porti. Se urmareste scrierea unui sistem de doua ecuatii diferentiale de ordinul intai avand ca necunoscute variabilele de stare (tensiunile condensatoarelor si curentii prin bobine).

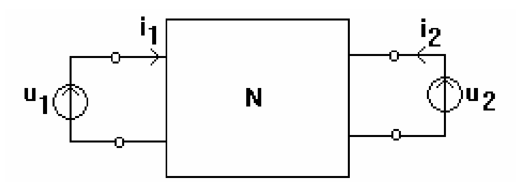
Circuitul cu doua condensatoare



Pentru fiecare condensator se poate scrie

$$\dot{u}_1 = \frac{-i_1}{C_1} \qquad \dot{u}_2 = -\frac{i_2}{C_2}$$

Daca N are o solutie unica pentru orice u_1, u_2



atunci N are o reprezentare controlata in tensiune (vezi paragraful 2.4.3.3.):

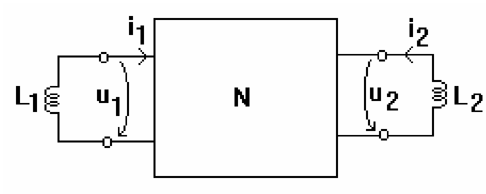
$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{s_1}(t) \\ i_{s_2}(t) \end{bmatrix}$$

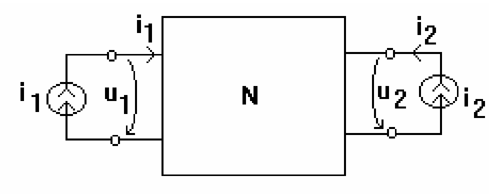
Se exprima i_1 si i_2 in functie de $\dot{u}_1$, C_1 si , $\dot{u}_2$, C_2 si se obtine:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-g_{11}}{C_1} & \frac{-g_{12}}{C_1} \\ \frac{-g_{21}}{C_2} & \frac{-g_{22}}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-i_{s_1}(t)}{C_1} \\ \frac{-i_{s_2}(t)}{C_2} \end{bmatrix}$$

ceeace reprezinta ecuatiile de stare pentru acest circuit.

Circuitul cu doua bobine



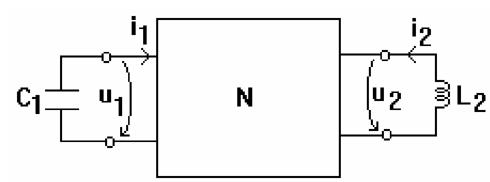


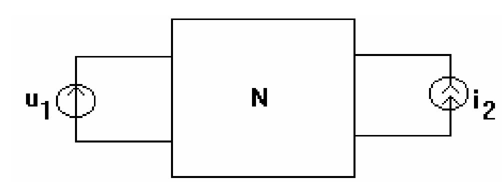
Pentru fiecare bobina se scrie: $u_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt}$, $u_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt}$

Daca N are o solutie unica pentru orice i_1, i_2 , atunci N are o reprezentare controlata in curent (vezi
paragraful 2.4.3.3.) si ecuatia de stare este:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-r_{11}}{L_1} & \frac{-r_{12}}{L_1} \\ \frac{-r_{21}}{L_2} & \frac{-r_{22}}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-u_{s_1}(t)}{L_1} \\ \frac{-u_{s_2}(t)}{L_2} \end{bmatrix}$$

Circuitul cu o bobina si un condensator





Tensiunea la bornele bobinei este $u_2 = -L\dot{i}_2$ si curentul prin condensator este $i_1 = -C\dot{u}_1$.

Daca N are o solutie unica pentru orice u_1 si i_2 atunci N are o reprezentare hibrida corespunzatoare (vezi capitolul 2) si ecuatia de stare este:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-h_{11}}{C_1} & \frac{-h_{12}}{C_1} \\ \frac{-h_{21}}{L_2} & \frac{-h_{22}}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-i_{s_1}(t)}{C_1} \\ \frac{-u_{s_2}(t)}{L_2} \end{bmatrix}$$

3.4.3. Raspunsul unui circuit liniar la excitatie nula

In cazul excitatiei nule u(t)=0 ecuatia de stare devine

$$\dot{x} = Ax \quad sau \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Primul pas pentru rezolvarea ecuatiei de mai sus este determinarea valorilor proprii λ_1 si λ_2 ale matricei A. λ_1 si λ_2 sunt solutiile ecuatiei.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$$

s_1 si s_2 sunt frecventele naturale ale circuitului (vezi capitolul 7). Daca $\Delta \neq \frac{1}{4}T^2$ atunci $s_1 \neq s_2$ sunt sau numere reale sau numere complex conjugate. Pasul urmator in rezolvarea ecuatiei de stare este determinarea unor vectori proprii η_1 si η_2 unde

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{bmatrix} \quad \text{si} \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} \eta_{21} \\ \eta_{22} \end{bmatrix}$$

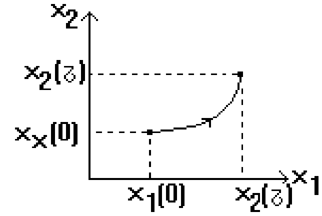
Prin definitie η_1 si η_2 sunt doi vectori nenuli care satisfac relatiile: $A\eta_1 = s_1\eta_1$ si $A\eta_2 = s_2\eta_2$.

Daca se cunosc valorile proprii $s_1 \neq s_2$ si vectorii asociati lor η_1 si η_2 solutia ecuatiei de stare poate fi scrisa $x(t) = (k_1 e^{s_1 t})\eta_1 + (k_2 e^{s_2 t})\eta_2$ unde k_1 si k_2 sunt constante arbitrare determinate de conditiile initiale x(0). Intr-adevar

$$\dot{x}(t) = (k_1 e^{s_1 t}) s_1 \eta_1 + (k_2 e^{s_2 t}) s_2 \eta_2 = (k_1 e^{s_1 t}) A\eta_1 + (k_2 e^{s_2 t}) A\eta_2 = Ax.$$

3.4.4. Comportarea calitativa a unui circuit liniar cu excitatie nula

Solutia *x(t)* are doua componente: $x_1(t)$ si $x_2(t)$. Evolutia circuitului plecand de la o stare initiala $(x_1(0), x_2(0))$ poate fi reprezentata printr-o curba in planul de coordonate x_1, x_2 (*planul fazelor*). Aceasta curba se numeste *traiectorie* si se obtine eliminand timpul din expresiile lui $x_1(t)$ si $x_2(t)$.



Evolutia circuitului corespunzatoare mai multor stari initiale poate fi reprezentata printr-o multime de traiectorii in planul fazelor. Aceste traiectorii formeaza un *portret de faza.*

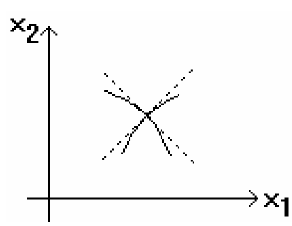
Starea de echilibru este o stare initiala care ramane nemodificata in cursul evolutiei circuitului. Aceasta stare corespunde unui *punct de echilibru* x_{1Q}, x_{2Q} din planul fazelor astfel incat daca $x_1(0)=x_{1Q}$ si $x_2(0)=x_{2Q}$ atunci $x_1(t)=x_{1Q}$ si $x_2(t)=x_{2Q}$. In consecinta, in punctul de echilibru avem $\dot{x}_1 = 0 \quad si \quad \dot{x}_2 = 0$.

Punctele de echilibru se pot determina rezolvand sistemul de ecuatii $Ax=0$ adica

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1Q} \\ x_{2Q} \end{bmatrix} = 0$$

Daca $\Delta \neq 0$ acest sistem admite numai solutia banala si originea este singurul punct de echilibru adica $x_{1Q} = x_{2Q} = 0$. Daca $\Delta=0$ atunci avem o infinitate de puncte de echilibru care satisfac ecuatia $a_{11}\, x_{1Q} + a_{12}\, x_{2Q} = 0$.

In continuare vom arata ca *doua traiectorii nu se pot intersecta intre ele* intr-un punct care nu este punct de echilibru. Fie un circuit neliniar de ordinul doi avand ecuatiile de stare $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad si \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$. Panta tangentei la traiectorie

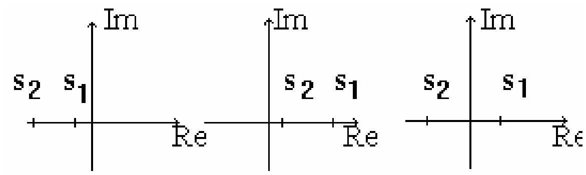


$\dfrac{dx_2}{dx_1}$ poate fi calculata ca $\dfrac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \dfrac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$ ceea ce reprezinta o valoare unica intr-un punct dat. Intr-un punct de intersectie a doua traiectorii ar exista, in mod evident, doua pante, deci traiectoriile nu se pot intersecta. De la aceasta regula fac exceptie punctele de echilibru in care $f_1(x_1, x_2) = 0 \quad si \quad f_2(x_1, x_2) = 0$ deci $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{0}{0}$ (nedeterminat) si deci pot exista mai multe pante.

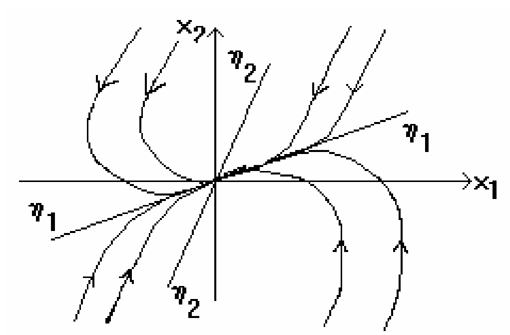
Asa cum se va vedea in continuare *portretul de faza*, in care este reprezentata evolutia circuitului pornind din orice stare initiala, *constituie o imagine sintetica a comportarii calitative a circuitului*.

Fie $x(t) = k_1 e^{s_1 t} \eta_1 + k_2 e^{s_2 t} \eta_2$ solutia ecuatiei de stare $\dot{x} = Ax$ cu valorile proprii s_1 si s_2 si vectorii proprii η_1 si η_2. Valorile proprii determina comportarea calitativa a circuitului. In continuare se discuta toate cazurile posibile pentru s_1 si s_2.

Cazul 1. Matricea A are valori proprii reale si distincte respectiv $\frac{T^2}{4} > \Delta \; si \; \Delta \neq 0$ si $s_1 = \frac{T}{2} + \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta} \; si \; s_2 = \frac{T}{2} - \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$. Exista trei posibilitati:

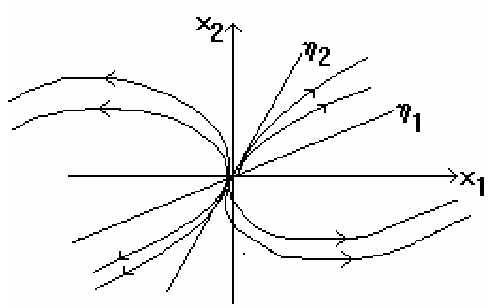


a) $s_2<s_1<0$ Din expresia lui $x(t) = k_1 e^{s_1 t} \eta_1 + k_2 e^{s_2 t} \eta_2$ se observa ca daca $t \to +\infty$ componenta $k_2 e^{s_2 t} \eta_2$ dispare rapid, iar $k_1 e^{s_1 t} \eta_1$ dispare mai lent si traiectoriile devin paralele cu η_1 si tind spre origine.

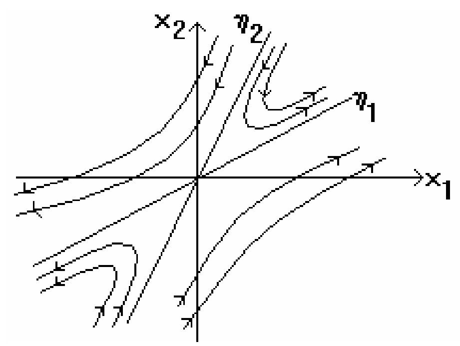


Daca $t \to -\infty$ atunci $k_2 e^{s_2 t} \eta_2$ domina si $k_1 e^{s_1 t} \eta_1$ dispare rapid si traiectoriile sunt paralele cu η_2. In acest caz se spune despre origine ca este un *nod stabil.*

b) $s_1 > s_2 > 0$ Cu un rationament asemanator rezulta ca daca $t \to +\infty, k_1 e^{s_1 t} \eta_1$ devine dominant si traiectoriile tind catre ∞ si sunt paralele cu η_1 si daca $t \to -\infty, k_2 e^{s_2 t} \eta_2$ devine dominant si traiectoriile pleaca din origine tangente la η_2. In acest caz se spune despre origine ca este un *nod instabil.*



c) $s_2<0<s_1$ Daca $t \to \infty$, componenta $k_1 e^{s_1 t} \eta_1$ este dominanta si traiectoriile tind catre ∞ paralele cu η_1. Daca $t \to -\infty$, componenta $k_2 e^{s_2 t} \eta_2$ este dominanta si traiectoriile vin de la $-\infty$. paralel cu η_2. In acest caz se spune despre origine ca este un *punct sa*



Cazul 2 $\Delta > \dfrac{T^2}{4}$ si deci matricea A are valori proprii complex conjugate $s_1 = s_2{}^*$.

Deoarece A este o matrice cu elemente reale si vectorii η_1 *si* η_2 rezulta din relatiile $A\eta_1 = s_1\eta_1$ *si* $A\eta_2 = s_2\eta_2$ avem $\eta_1 = \eta_2{}^*$.

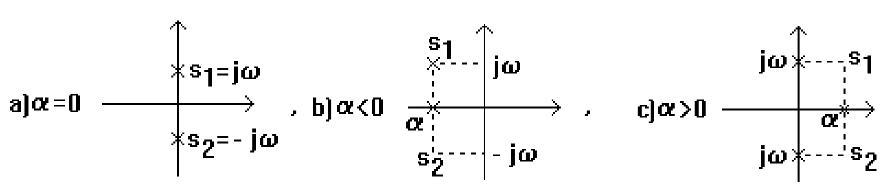
Deoarece *x(0)* este un numar real rezulta $x(0) = k_1\eta_1 + k_2\eta_2{}^* \in$ R si deci $k_1 = k_2{}^*$.

Notam $\begin{cases} k_1 = ke^{j\varphi} \; si \; k_2 = ke^{-j\varphi}, \eta_1 = \eta_r + j\eta_i \; si \; \eta_2 = \eta_1{}^* = \eta_r - j\eta_i, \\ s_1 = \alpha + j\omega \; si \; s_2 = \alpha - j\omega = s_1{}^* \end{cases}$

Rezulta:

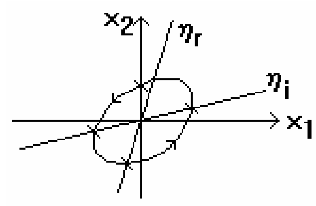
$$x(t) = k\, e^{j\varphi} e^{(\alpha + j\omega)t} (\eta_r + j\eta_i) + k\, e^{-j\varphi} e^{(\alpha - j\omega t)} (\eta_r - j\eta_i) =$$
$$= k\, e^{\alpha t}\left[\eta_r (e^{j(\varphi + \omega t)} + e^{-j(\varphi + \omega t)}) + j\eta_i (e^{j(\varphi + \omega t)} - e^{-j(\varphi + \omega t)})\right] =$$
$$= 2k\, e^{\alpha t}\left[\eta_r \cos(\varphi + \omega t) - \eta_i \sin(\varphi + \omega t)\right]$$

Comportarea calitativa a circuitului in cazul valorilor proprii complex conjugate depinde de valoarea lui α care se numeste *constanta de atenuare.* Exista trei posibilitati:



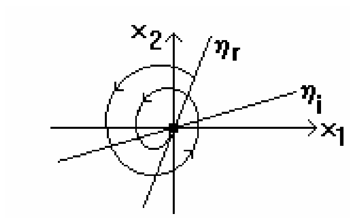
a) pentru α=0 solutia ecuatiei de stare devine

$$x(t) = 2k(\eta_r \cos(\varphi + \omega t) - \eta_i \sin(\varphi + \omega t) \quad cu \quad \eta_r = \begin{bmatrix} \eta_{r1} \\ \eta_{r2} \end{bmatrix} si\ \eta_i = \begin{bmatrix} \eta_{i1} \\ \eta_{i2} \end{bmatrix}$$



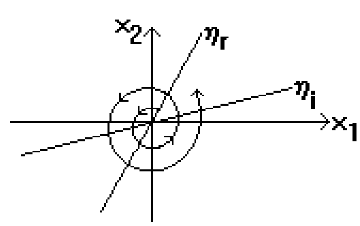
si portretul de faza este o elipsa care are pe η_i *si* η_r drept directii conjugate. In acest caz starea de echilibru x=0 se numeste *centru* si corespunde raspunsului fara pierderi. Cele doua variabile de stare vor fi: $x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \theta_1)$, $x_2(t) = A_2 \cos(\omega\ t + \theta_2)$, unde $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ sunt constante.

b)daca α<0 atunci solutia ecuatiei de stare este $x(t) = 2k\, e^{-\alpha t}\left[\eta_r \cos(\varphi + \omega t) - \eta_i \sin(\varphi + \omega t)\right]$ si se observa ca la $t \to \infty, e^{-\alpha t}$ tinde exponential la zero si toate traiectoriile vor fi spirale logaritmice care tind spre origine cand $t \to \infty$.



Starea de echilibru *x=0* se numeste, in acest caz, *focar stabil* si corespunde raspunsului periodic amortizat. Cele doua variabile de stare vor fi de forma $x_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta_1)$, $x_2(t) = A_2 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta_2)$, unde $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ sunt constante.

c) daca $\alpha > 0$ x(t) are aceeasi expresie ca la punctul b iar portretul de faza contine spirale logaritmice care tind spre infinit cand $t \to \infty$.



In acest caz, starea de echilibru *x=0* este un *focar instabil.*

3.4.5. Ecuatiile de stare ale circuitelor neliniare

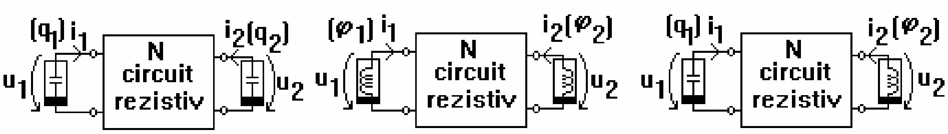
Ecuatiile de stare pentru un circuit neliniar de ordinul doi scrise sub forma

$\dot{x} = f(x,t) sau \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) \end{cases}$ se numesc ecuatii de stare in *forma normala*.

Scrierea ecuatiilor de stare in forma normala rezulta pentru orice circuit neliniar corect modelat. Multe metode numerice de rezolvare a ecuatiilor diferentiale neliniare sunt formulate pentru forma normala a ecuatiilor.

In cazul in care circuitul contine numai elemente invariante in timp si surse independente de curent continuu, variabila timp nu mai apare explicit in ecuatii si acestea sunt de forma $\dot{x} = f(x) sau \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$ si se numesc *ecuatii de stare autonome*, iar circuitul se numeste *circuit autonom.* Un circuit in care parametrii surselor independente sunt functii neconstante de timp se numeste *circuit neautonom.*

Pentru scrierea ecuatiilor de stare se iau in considerare cele trei configuratii posibile:



Alegerea variabilelor de stare se face in functie de tipurile condensatoarelor si bobinelor neliniare:

- pentru condensatoare controlate in tensiune, variabila de stare este tensiunea;
- pentru condensatoare controlate in sarcina, variabila de stare este sarcina;
- pentru bobinele controlate in curent, variabila de stare este curentul;
- pentru bobinele controlate in flux, fluxul magnetic este variabila de stare.

In continuare se procedeaza la fel ca in cazul circuitelor liniare. Daca presupunem ca diportul rezistiv N are o solutie unica pentru orice valori ale parametrilor surselor independente de la porti alese corespunzator, atunci exista urmatoarele reprezentari ale lui N:

- reprezentarea controlata in tensiune (circuitul cu doua condensatoare)

$$i_1 = \hat{i}_1(u_1, u_2, t)$$
$$i_2 = \hat{i}_2(u_1, u_2, t)$$

- reprezentarea controlata in curent (circuitul cu doua bobine)

$$u_1 = \hat{u}_1(i_1, i_2, t)$$
$$u_2 = \hat{u}_2(i_1, i_2, t)$$

- o reprezentare hibrida (circuitul cu condensator si bobina)

$$i_1 = \hat{i}_1(u_1, i_2, t)$$
$$u_2 = \hat{u}_2(u_1, i_2, t)$$

care se utilizeaza la scrierea ecuatiilor de stare. Iata cateva exemple:

i) Fie un circuit autonom cu doua condensatoare controlate in tensiune avand ecuatiile constitutive $q_1 = \hat{q}_2(u_1)\ si\ q_2 = \hat{q}_2(u_2)$. Exprimam pe $i_1\ si\ i_2$ in functie de variabilele de stare $u_1\ si\ u_2$:

$$i_1 = -\frac{dq_1}{dt} = -\frac{dq_1}{du_1}\dot{u}_1 = -C_1(u_1)\dot{u}_1 \quad cu \quad C_1(u_1) = \frac{dq_1(u_1)}{du_1}$$
$$i_2 = -\frac{dq_2}{dt} = -\frac{dq_2}{du_2}\dot{u}_2 = -C_2(u_2)\dot{u}_2 \quad cu \quad C_2(u_2) = \frac{dq_2(u_2)}{du_2}$$

si ecuatiile de stare sunt: $\dot{u}_1 = -\frac{1}{C_1(u_1)}\hat{i}_1(u_1, u_2),\ \dot{u}_2 = -\frac{1}{C_2(u_2)}\hat{i}_2(u_1, u_2)$

ii) Fie un circuit autonom cu doua condensatoare controlate in sarcina avand ecuatiile constitutive $u_1 = \hat{u}_1(q_1)\ \ si\ \ u_2 = \hat{u}_2(q_2)$. Variabilele de stare fiind q_1 si q_2 rezulta $i_1 = -\dot{q}_1,\ \ i_2 = -\dot{q}_2$ si ecuatiile de stare sunt:

$$\dot{q}_1 = -\hat{i}_1(u_1(q_1), u_2(q_2)) \quad sau \quad \dot{q}_1 = -\tilde{i}_1(q_1, q_2) \quad si \quad \dot{q}_2 = -\tilde{i}_2(q_1, q_2).$$

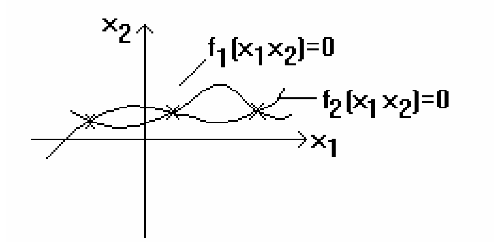
iii) Fie un circuit autonom cu o bobina controlata in curent de ecuatie constitutiva $\phi_1 = \hat{\phi}_1(i_1)$ si o bobina controlata in flux de ecuatie constitutiva $i_2 = \hat{i}_2(\phi_2)$. Exprimam pe $u_1\ \ si\ \ u_2$ in functie de variabilele de stare $i_1\ si\ \phi_2$ tinand seama ca tensiunea asociata dupa regula de la receptoare cu curentul din bobina este $u = \frac{d\phi}{dt}$.

$$\dot{i}_1 = -\frac{1}{L_1(i_1)}\hat{u}_1(i_1, \hat{i}_2(\phi_2)) = -\frac{1}{L_1(i_1)}\tilde{u}_1(i_1, \phi_2)$$
$$\dot{\phi}_2 = -\hat{u}_2(i_1, i_2(\phi_2)) = -\tilde{u}_2(i_1, \phi_2)$$

Celelalte cazuri se trateaza similar.

3.4.6. Comportarea calitativa a unui circuit neliniar in jurul unui punct de echilibru

Starea de echilibru este data de solutiile ecuatiilor $f_1(x_1, x_2) = 0\ \ si\ \ f_2(x_1, x_2) = 0.$ Pentru circuite autonome neliniare curbele corespunzatoare celor doua ecuatii se pot intersecta in mai multe puncte (puncte de echilibru) si deci exista mai multe stari de echilibru. In continuare se studiaza com-



portarea unui circuit neliniar autonom in jurul unui punct de echilibru $Q(x_{1Q}, x_{2Q})$.

Conceptele de traiectorie si portret de faza introduse la studiul circuitelor liniare de ordinul doi pot fi utilizate si pentru circuitele neliniare. Traiectoria este curba care se obtine in planul $x_1 - x_2$ eliminand pe t din expresiile $x_1(t)$ *si* $x_2(t)$. Acesata curba se poate vizualiza aplicand semnalele $x_1(t)$ *si* $x_2(t)$ pe placile de deflexie pe verticala si pe orizontala ale unui osciloscop. Portretul de faza ofera informatii despre comportarea calitativa a circuitului; de exemplu, o traiectorie inchisa inseamna ca circuitul oscileaza si o spirala care converge spre punctul de echilibru inseamna ca oscilatiile sunt amortizate.

Ecuatiile de stare ale circuitului sunt: $\dot{x} = f(x)$ *sau* $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) \end{cases}$

Se dezvolta f_1 *si* f_2 in serie Taylor in jurul punctului de echilibru $Q(x_{1Q}, x_{2Q})$.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_{1Q}, x_{2Q}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_Q (x_1 - x_{1Q}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_Q (x_2 - x_{2Q}) + \ldots$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_{1Q}, x_{2Q}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_Q (x_1 - x_{1Q}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_Q (x_2 - x_{2Q}) + \ldots$$

Deoarece Q este punctul de echilibru $f_1(x_{1Q}, x_{2Q}) = 0$ *si* $f_2(x_{1Q}, x_{2Q}) = 0$. Notam

$\overline{x}_1 = x_1 - x_{1Q}$, $\overline{x}_2 = x_2 - x_{2Q}$ si $a_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_Q$ *si* $a_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_Q$, $a_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_Q$ *si* $a_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_Q$

Daca se pot neglija termenii de ordin superior din dezvoltarea Taylor ecuatiile de stare se pot scrie:

$$\dot{\overline{x}}_1 = a_{11}\overline{x}_1 + a_{12}\overline{x}_2$$
$$\dot{\overline{x}}_2 = a_{21}\overline{x}_1 + a_{22}\overline{x}_2$$

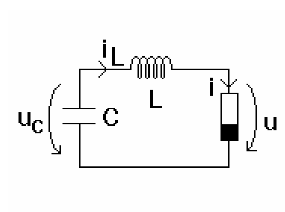
Astfel s-a aproximat ecuatia de stare neliniara cu o ecuatie liniara in jurul punctului de echilibru.

In jurul punctului Q, portretul de faza al circuitului neliniar autonom este similar cu portretul de faza asociat acestei ecuatii liniare. Deci comportarea calitativa a circuitului neliniar in jurul unui punct de echilibru se poate studia cu ajutorul circuitului liniar asociat ecuatiei de stare de mai sus. Daca, de exemplu, pentru circuitul liniar originea este nod stabil sau instabil acelasi lucru se poate spune si despre punctul de echilibru al circuitului neliniar.Aceeasi afirmatie se poate face si pentru focare. Atunci cand originea este centru in ecuatiile neliniare intervin termenii de ordin superior care nu mai pot fi neglijati si nu se mai poate face interpretarea comportarii calitative a circuitului neliniar in functie de modelul liniarizat.

3.4.7. Oscilatii in circuitele neliniare

Orice raspuns al unui circuit autonom neliniar este determinat atat de starea initiala cat si de excitatii (sursele independente de curent continuu). Daca intr-un astfel de circuit exista cel putin un raspuns (tensiune sau curent) care este functie periodica de timp spunem ca circuitul oscileaza (este un oscilator).

Un oscilator simplu utilizat in multe aplicatii este circuitul RLC serie in care elementele



dinamice sunt liniare cu parametri pozitivi *(L>0, C>0)* si rezistorul este neliniar. Starea initiala *($u_C(0)$ si $I_2(0)$)* determina o energie totala $W(0)=\frac{C}{2}u_C{}^2(0)+\frac{L}{2}i_L{}^2(0)\geq 0$ acumulata in elementele dinamice la *t=0*. Daca rezistorul neliniar este strict pasiv *(u ·I>0)* acesta va absorbi o putere pozitiva care se va transforma ireversibil in caldura. Energia disipata de rezistor provine din W(0) deci daca rezistorul este strict pasiv $\lim_{t\to\infty} W(t)=0$ si $u_C(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0,\quad i_L(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$ deci nu poate exista nici un raspuns periodic. Rezulta ca rezistorul trebuie sa fie activ.

Se poate arata ca daca un rezistor controlat in curent cu ecuatia constitutiva $u=\hat{u}(i)$ satisface conditiile

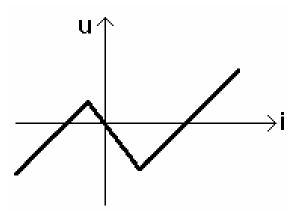
$i)\quad \hat{u}(0)=0$

$ii)\quad \hat{u}'(0)<0$

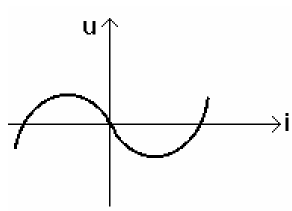
$iii)\quad \lim_{i\to\infty}\hat{u}(i)=+\infty$

$iv)\quad \lim_{i\to-\infty}\hat{u}(i)=-\infty$

atunci circuitul RLC serie oscileaza. De exemplu caracteristica



se poate obtine cu un circuit cu un amplificator operational (vezi paragraful 2), iar caracteristica $u = \frac{i^3}{3} - i$ are o alura similara.



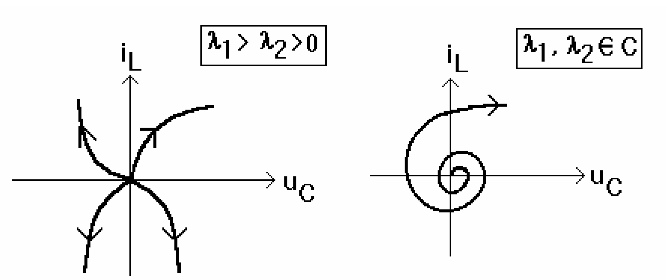
Ecuatiile de stare ale circuitului RLC serie sunt

$$\dot{u}_C = -\frac{i_L}{C} = f_1(u_C, i_L)$$
$$\dot{i}_L = \frac{u_C - \hat{u}(i_L)}{L} = f_2(u_C, i_L)$$

Starea de echilibru se obtine pentru $\dot{u}_C = 0$ si $\dot{i}_L = 0$. Rezulta $i_L = 0, u_C = 0$. Comportarea calitativa a circuitului in jurul originii se determina calculand elementele matricei de stare a circuitului liniar asociat

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial u_C} = 0 \quad a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial i_L} = -\frac{1}{C} \quad a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial u_C} = \frac{1}{L} \quad a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial i_L} = -\frac{\hat{u}'(0)}{C}.$$

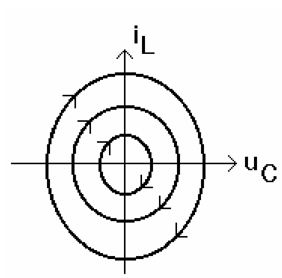
Valorile proprii ale matricei A se calculeaza ca radacini ale ecuatiei $\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0$ unde $\mathrm{T} = a_{11} + a_{22} = -\frac{\hat{u}'(0)}{L} > 0, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \frac{1}{LC}$. Deoarece $T>0$ rezulta ca $\lambda_{1,2}$ sunt sau numere reale pozitive sau numere complexe cu partea reala pozitiva. Daca $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ atunci originea este nod instabil si traiectoriile pornesc toate din origine



indepartandu-se de zona din jurul acesteia. Daca $\lambda_1, \lambda_2 \in C$ originea este focar instabil si traiectoriile se indeparteaza de zona din jurul originii cand $t \to \infty$. Pe masura ce punctul de functionare(de coordinate $u_C(t)$ si $i_L(t)$) se indeparteaza de origine valorile lui i_L cresc si punctul de functionare pe caracteristica $\hat{u}(i_L)$ a rezistorului intra in cadranul I sau III. In acest caz in locul unui rezistor local activ caracterizat de $\hat{u}'(0) < 0$ avem un rezistor pasiv care absoarbe o putere pozitiva $u \cdot i > 0$ care este si local pasiv $(\hat{u}'(i) > 0)$. Acestui rezistor ii corespund valori proprii cu partea reala negativa. Ca urmare intr-o zona care nu este in jurul originii traiectoriile nu tind spre infinit. Deoarece circuitul are un singur punct de echilibru in origine traiectoriile nu pot sa convearga decat spre acest punct. Rezulta ca, deoarece traiectoriile nu se pot intersecta intre ele decat in punctul de echilibru, trebuie sa existe o curba limita spre care tind aceste traiectorii. Aceasta curba este inchisa astfel incat parcurgand-o se obtin forme de unda periodice pentru $i_L \; si \; u_C$. Acest rationament este doar o justificare din considerente fizice fara a fi o demonstratie a existentei si unicitatii ciclului limita. Aparitia oscilatiilor este ilustrata in continuare prin cateva exemple.

Exemplul 1 - Oscilatorul liniar este circuitul RLC serie in care rezistorul are R = 0.

Daca $\hat{u}(i) = 0$ ecuatiile de stare sunt $\dot{u}_C = -\dfrac{i_L}{C}$, $\dot{i}_L = \dfrac{u_C}{C}$ si cu notatiile $\omega_0{}^2 = \dfrac{1}{LC}$ solutia are forma $i_L(t) = A\sin(\omega_0 t - \theta)$, $u_C(t) = \omega_0 LA\cos(\omega_0 t - \theta)$ unde A si θ depind de conditiile initiale. Eliminand timpul, din expresiile $i_L(t) \; si \; u_C(t)$ rezulta ecuatia traiectoriei $i_L{}^2 + \dfrac{u_C{}^2}{L^2\omega_0{}^2} = A^2$ care este o elipsa.



Portretul de faza contine o multime de elipse. In toate punctele unei elipse energia totala este aceeasi $W(t) = \dfrac{C}{2}u_C{}^2(t) + \dfrac{L}{2}i_L{}^2(t) = \dfrac{1}{2}LA^2$ deci oscilatia consta intr-un transfer al energiei acumulate intre condensator si bobina. Aceste traiectorii de nivel energetic constant se numesc *orbite*.

Observatii

i) oscilatorul liniar este un model idealizat care nu tine seama nici de pierderile din condensatoarele si bobinele reale si nici de rezistentele firelor de legatura

ii) spre deosebire de ciclul limita, in orice vecinatate a unei orbite exista traiectorii inchise (orbitele foarte apropiate).

Exemplul 2 Oscilatorul Van der Pol este un ciruit RLC serie in care $\hat{u}(i) = \frac{i^3}{3} - i$. Ecuatiile de stare sunt $\dot{u}_C = -\frac{i_L}{C}, \dot{i}_L = \frac{u_C - (i_L^3/3 - i_L)}{L}$. Facem schimbarea de variabila $\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}$ si rezulta: $\frac{du_C}{dt} = \frac{du_C}{d\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}, \frac{di_L}{dt} = \frac{di_L}{d\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}$ si notand $\varepsilon = \sqrt{\frac{C}{L}}$ ecuatiile de stare devin: $\frac{du_C}{d\tau} = -\frac{i_L}{\varepsilon}, \frac{di_L}{d\tau} = \varepsilon\left[u_C - \left(\frac{i_L^3}{3} - i_L\right)\right]$.

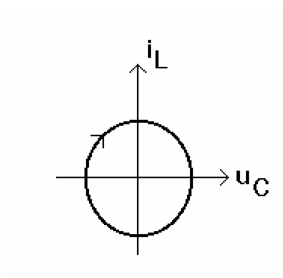
Aceste ecuatii nu au solutie analitica. Pentru anumite valori ale lui ε se pot determina solutii analitice aproximative.

Daca $\varepsilon \to 0$ se pot face urmatoarele aproximatii:

in ecuatia de ordinul 2 pentru i_L $\frac{d^2 i_L}{d\tau^2} = -i_L - \varepsilon(i_L^2 - 1)\frac{di_L}{d\tau}$

se poate considera ca $\varepsilon\frac{di_L}{d\tau} = \varepsilon^2\left[u_C - \left(\frac{i_L^3}{3} - i_L\right)\right] \approx 0$ si rezulta $\frac{d^2 i_L}{d\tau^2} = -i_L$.

Aceasta ecuatie are o solutie de forma $i_L = A\cos(\tau - \theta)$ din care rezulta $u_C = -\frac{1}{C}\int i_L dt = -\frac{A}{\varepsilon}\sin(\tau - \theta)$ deci traiectoria este o elipsa.



In solutia ecuatiei simplificate A depinde de conditiile initiale. Se poate arata (de exemplu prin integrare numerica) ca pentru $\varepsilon < 0{,}1$ solutia ecuatiilor de stare nesimplificate are un ciclu limita eliptic corespunzator valorii A=2. Pentru valori $0{,}3 < \varepsilon < 0{,}7$ ciclul limita este o elipsa deformata.

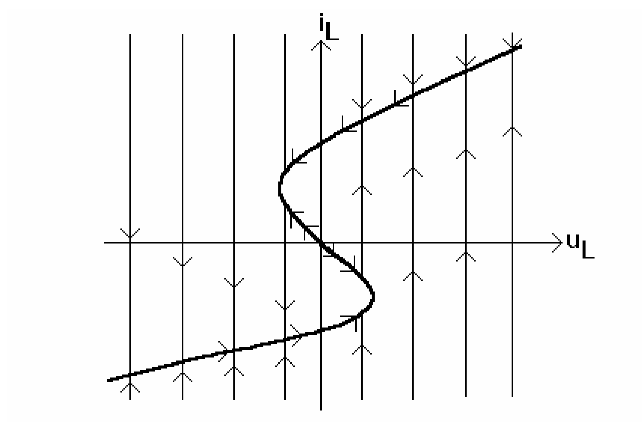
Daca $\varepsilon \to \infty$ rezulta $\frac{du_C}{d\tau} \approx 0$ *deci* $u_C = ct.$ In acest caz, daca $u_C - \hat{u}(i_L) \neq 0$ $\left|\frac{di_L}{d\tau}\right| \to \infty$. Deci daca $u_C - \hat{u}(i_L) \neq 0$ traiectoriile vor fi paralele cu axa i_L. Sensul parcursului dinamic pe aceste traiectorii este:

daca $u_C > \hat{u}(i_L), \frac{di_L}{d\tau} \to +\infty$ si i_L creste

daca $u_C < \hat{u}(i_L), \frac{di_L}{d\tau} \to -\infty$ si i_L scade.

Pentru $u_C \approx \hat{u}(i_L)$ *valoarea* $\frac{di_L}{d\tau} \to \infty \cdot 0$ nu se poate determina.

Se poate insa considera ca $u_C - \hat{u}(i_L) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{di_L}{d\tau} \to 0$ deci si caracteristica $\hat{u}(i_L)$ este traiectorie. Deci pentru $\varepsilon \to \infty$ portretul de faza este:



Acest portret de faza justifica regula de salt de la oscilatorul de relaxare realizat cu un circuit de ordinul I cu condensator liniar si rezistor cu caracteristica $\hat{u}(i)$ (vezi paragraful 3.3.6.). Intr-adevar daca $L \to 0$ in oscilatorul Van der Pol rezulta $\varepsilon \to \infty$ iar circuitul devine de ordinul I. Saltul lui I se face conform portretului de faza al circuitului de ordinul II. Timpul de salt este practic nul deoarece variatia in timp a lui i_L este foarte rapida $\left(\left|\frac{di_L}{dt}\right| \to \infty\right)$. Modelul de ordinul I care are puncte de impas este un model incorect. Modelul corect este cel de ordinul II in care intervine si inductivitatea L. In realitate aceasta inductivitate exista fiind un element parazit de circuit asociat firelor de legatura dintre condensator si rezistorul neliniar.