INTRODUCERE

Circuitele sunt prezente in foarte multe domenii tehnice: in sistemul electroenergetic, in calculatoare, in sistemele de telecomunicatii, in aparatura audio sau TV etc. Un *circuit fizic* este format prin interconectarea mai multor dispozitive electrice: rezistoare, bobine, condensatoare, diode, tranzistoare, amplificatoare operationale, baterii, transformatoare, motoare electrice, generatoare electrice si altele.

Teoria circuitelor foloseste relatii matematice care descriu comportarea electrica a acestor circuite fizice. Unui circuit fizic format din dispozitive electrice i se asociaza un *circuit electric* alcatuit din modele idealizate care se numesc *elemente (ideale) de circuit*. Un element de circuit modeleaza un singur fenomen fizic descris de o relatie matematica simpla intre tensiunile si curentii bornelor. Daca elementul are doua borne, este parcurs de curentul i(t) si are tensiunea u(t) intre borne atunci:

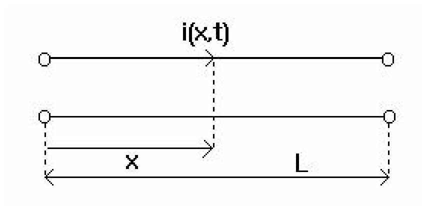
- rezistorul ideal caracterizat de relatia u(t)=Ri(t) modeleaza efectul rezistiv,
- bobina ideala caracterizata de relatia u(t)=Ldi(t)/dt modeleaza efectul inductiv,
- condesatorul ideal caracterizat de relatia i(t)=Cdu(t)/dt modeleaza efectul capacitiv,

unde u si i sunt functii de timpul t iar R, L si C sunt constante in raport cu u(t) si i(t).

Orice model (circuit electric), este *o aproximatie* a circuitului fizic. De exemplu o bobina realizata pe un tor de ferita (la care efectul inductiv predomina in raport cu cel rezistiv si cu cel capacitiv) se poate modela printr-o bobina ideala. Daca rezultatele teoretice obtinute in urma analizei circuitului electric corespund cu rezultatele practice obtinute in urma masuratorilor facute asupra circuitului fizic inseamna ca modelul este corect. Comportarea unui dispozitiv electric poate fi aproximata prin mai multe modele (*scheme echivalente*) in functie de conditiile de lucru (semnale mari sau semnale mici, gama de frecvente a semnalelor utilizate, gama temperaturilor de functionare etc.). De exemplu un tranzistor bipolar are modele diferite pentru semnale mari sau semnale mici si pentru frecvente de ordinul kilohertzilor sau megahertzilor.

Fenomenele electromagnetice se propaga cu o viteza aproximativ egala cu viteza luminii in vid $c=3\ 10^8$ m/s. Fie un semnal sinusoidal $s(t,x)=A\sin 2\pi f(t-x/c)$ de frecventa f care se propaga cu viteza c dupa directia x. Propagarea dupa directia celei mai mari dimensiuni d_{max} a circuitului fizic introduce o intarziere $\Delta t=d_{max}/c$. Daca Δt este neglijabil fata de cea mai mica perioada $T_{min}=1/f_{max}$ (f_{max} -frecventa maxima) a unui semnal de interes practic, este evident ca efectul de propagare poate fi neglijat. In acest caz se poate considera ca semnalele se propaga instantaneu (cu viteza infinita) si un astfel de model se numeste *circuit electric cu parametri concentrati*. Conditia

$\Delta t<<1/f_{max}$ este echivalenta cu $d_{max}<<\lambda_{min}$ unde $\lambda_{min}=c/f_{max}$ este lungimea de unda corespunzatoare frecventei maxime de interes practic. Daca efectul de propagare nu se poate neglija (d_{max} nu se poate neglija fata de λ_{min}) circuitul fizic se modeleaza cu un *circuit electric cu parametri distribuiti*. Intr-un circuit cu parametri distribuiti curentii si tensiunile sunt functii de timp si de variabile spatiale; comportarea circuitului este influentata de pozitia relativa a dispozitivelor electrice. Intr-un circuit cu parametri concentrati, admitand ca propagarea se face instantaneu, curentii si tensiunile sunt functii numai de timp nu si de variabile spatiale; un astfel de model nu tine seama de pozitia relativa a dispozitivelor electrice. Fiind mai simplu, modelul de circuit cu parametri concentrati este de preferat atunci cand poate fi utilizat.



Fie, de exemplu, un cablu cu lungimea L=1Km format din doua conductoare. Daca prin cablu trece un curent i cu f=250KHz rezulta λ =1,2Km≈L si se adopta un model cu parametri distribuiti. In acest caz, daca x este distanta masurata de la un capat al cablului, $i(t,x)=I\sin 2\pi f(t-x/c)=I\sin(2\pi ft-2\pi x/\lambda)$ si la acelasi moment t i are valori diferite in functie de x (de exemplu $i(t,0)=I\sin t2\pi ft$ si $i(t,\lambda/2)=I\sin(2\pi ft-\pi)$). Daca prin cablu trece un curent de frecventa industriala f_1=50Hz rezulta λ =6000Km>>L si $i(t,x)=I\sin 2\pi f_1 t$ nu depinde de x.

Teoria prezentata in continuare se refera numai la circuitele cu parametri concentrati. Teoria circuitelor include analiza calitativa si cantitativa a comportarii circuitelor. In consecinta, instrumentele acestei teorii sunt matematice si conceptele si rezultatele utilizate sunt exprimate prin *variabile de circuit* si *ecuatii de circuit* care leaga intre ele aceste variabile. Teoria circuitelor nu se ocupa de fenomenele fizice care au loc in interiorul unui element de circuit.

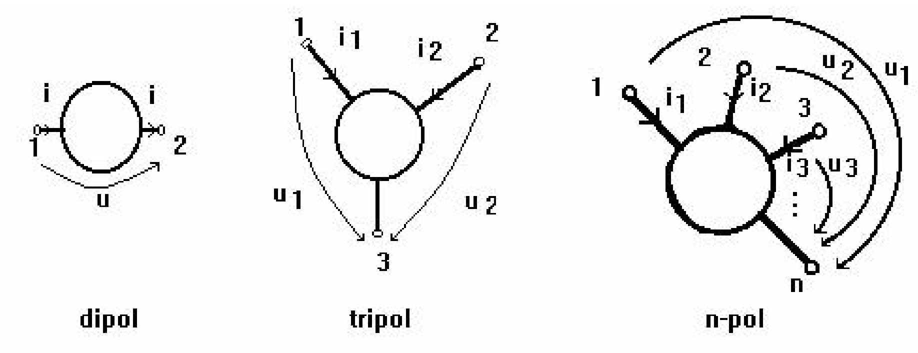
Capitolul 1 trateaza axiomele teoriei circuitelor (teoremele lui Kirchhoff si teorema transferului de putere pe la bornele unui multipol), consecinte ale acestora valabile in orice regim de functionare si elemente de topologie a circuitelor. Capitolul 2 se ocupa de circuitele rezistive incluzand elementele de circuit, ecuatiile circuitelor, teoreme si metode de analiza ale circuitelor rezistive. Capitolul 3 contine o prezentare a elementelor dinamice de circuit, proprietatile acestora, studiul circuitelor de ordinul intai si doi, ecuatiile si metodele de rezolvare a circuitelor dinamice in domeniul timpului; se definesc regimurile de functionare ale circuitelor. Capitolul 4, dedicat se ocupa de regimul sinusoidal al circuitelor liniare (circuitele de curent alternativ monofazat). In capitolul 5 se trateaza circuitele de current alternativ trifazat, iar capitolul 6 se ocupa de regimul nesinusoidal. Capitolul 7 abordeaza, cu ajutorul transformatei Laplace, regimul variabil ca timp al circuitelor liniare.

Cursul este conceput avand in vedere specificul facultatii de automatica si calculatoare. Se utilizeaza concepte din teoria sistemelor (ecuatii de stare, planul fazelor, excitabilitate si observabilitate a modurilor circuitului, etc.) si se prezinta aplicatii specifice (circuite cu amplificatoare operationale, oscilatoare, circuite cu comportare haotica, etc.).

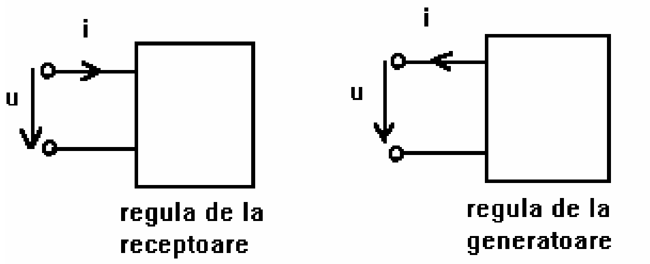
CAPITOLUL 1
TEOREMELE LUI KIRCHHOFF

1.1. Elementele de circuit

Comportarea unui element de circuit este descrisa de relatiile intre curentii bornelor (terminalelor) si tensiunile intre aceste borne. Conditiile in care se pot defini bornele unui dispozitiv electromagnetic astfel incat comportarea acestuia sa fie descrisa de aceste relatii se formuleaza in teoria campului electromagnetic. Elementele de circuit se simbolizeaza astfel:



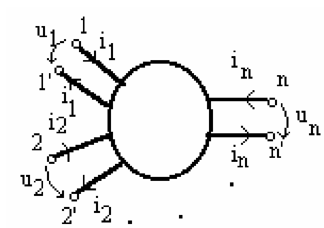
Daca elementul de circuit are n borne (terminale), el se numeste n-pol (cu 2 borne - dipol, cu 3 borne - tripol, cu 4 borne - cuadripol). Un curent al unui terminal are un sens de referinta simbolizat printr-o sageata; o tensiune intre doua borne are un sens de referinta simbolizat prin alta sageata. De exemplu la elementul dipolar curentul i intra in borna 1 si iese din borna 2 iar tensiunea u intre bornele 1 si 2 este $u=v_1-v_2$ unde v_1 si v_2 sunt potentialele bornelor 1 si 2. La n-poli tensiunile se considera fata de o referinta arbitrara (de regula borna n). Atunci cand sagetile curentului si tensiunii “ies din aceeasi borna” u si i sunt asociate dupa regula de la receptoare. Daca sagetile curentului si tensiunii nu “ies din aceeasi borna”, u si i sunt asociate dupa regula de la generatoare.



Orice element de circuit este caracterizat de ecuatia de functionare $F_k(i_1,i_2,...,i_{n-1},u_1,u_2,...,u_{n-1})=0$, $k=1,...,n-1$ care reprezinta dependenta dintre marimile la borne (curenti si tensiuni). Ecuatiile $F_k(\bullet)=0$ pot fi algebrice sau diferentiale in functie de fenomenul fizic modelat. *Elementele rezistive* de circuit sunt caracterizate de ecuatii algebrice, iar *elementele dinamice* de circuit sunt caracterizate de ecuatii diferentiale. Daca orice F_k (.) este functie liniara in raport cu toate variabilele $i_1,i_2,...,i_{n-1},u_1,u_2,...,u_{n-1}$ spunem ca *elementul de circuit este liniar;* daca aceasta conditie nu este satisfacuta spunem ca *elementul de circuit este neliniar* .

Exista multipoli la care bornele pot fi grupate in perechi astfel incat o pereche de borne (care formeaza o *poarta*) este parcursa de acelasi curent. Daca toate bornele sunt grupate in porti multipolul este un *multiport*. Ecuatia de functionare a multiportului este de forma

$F_k(i_1,i_2,....,i_n,u_1,u_2,....,u_n)=0$, $k=1,....,n$.



Daca ecuatiile $F_k(\bullet)=0$ sunt algebrice multiportul este rezistiv, iar daca cel putin o ecuatie este diferentiala multiportul este dinamic. Multiportii pot fi *liniari* sau *neliniari*.

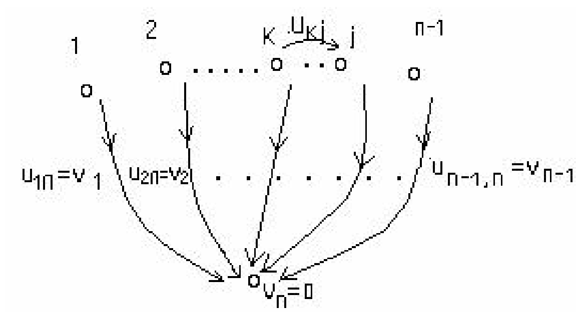
Intr-un circuit fizic bornele dispozitivelor sunt conectate intre ele prin conductoare de legatura. *Un circuit electric este format dintr-o multime de elemente de circuit ale caror borne sunt conectate direct intre ele.* Desi de regula acest model nu tine seama de caracteristicile conductoarelor de legatura, atunci cand este necesar si aceste conductoare pot fi modelate prin elemente de circuit. Locul in care sunt conectate cel putin doua borne este un *nod*; orice borna izolata este considerata nod.

Teoria circuitelor se ocupa de analiza circuitelor electrice admitand ca sunt valabile teoremele lui Kirchhoff, teorema transferului de putere pe la bornele elementelor de circuit si relatiile intre tensiunile si curentii unui element de circuit. Aceste teoreme si relatii, considerate ca axiome in teoria circuitelor electrice, pot fi demonstrate in teoria campului electromagnetic.

1.2.Teoremele lui Kirchhoff

Teorema lui Kirchhoff referitoare la tensiuni (Teorema II)

Intr-un circuit cu n noduri se alege in mod arbitrar un nod de referinta al carui potential se considera nul (v_n=0). Potentialele v_k ale nodurilor 1,...,n-1 sunt functii de timp. Tensiunile intre nodurile 1, ..., n-1 si nodul n sunt $u_{1n} = V_1, u_{2n} = V_2, ..., u_{n-1n} = V_{n-1}$. Circuitul se conside ra *conex*



(plecand dintr-un nod arbitrar se poate ajunge la oricare alt nod parcurgand o cale care trece numai prin elemente de circuit).

Conform primei forme a teoremei lui Kirchhoff referitoare la tensiuni, *tensiunea $u_{kj}(t)$ dintre nodul k si nodul j este diferenta tensiunilor* $u_{kn}(t)$ *si* $u_{jn}(t)$

$$u_{kj}(t) = u_{kn}(t) - u_{jn}(t) \quad (1)$$

Rezulta imediat ca $u_{jk}(t) = u_{jn}(t) - u_{kn}(t) = - u_{kj}(t)$.

Fie o multime de noduri care incepe si se sfarseste cu acelasi nod. Parcurgand aceasta multime prin treceri succesive de la un nod la vecinul acestuia se poate defini o cale inchisa care contine toate nodurile multimii. *Aceasta multime se numeste multime de tip B.*

De exemplu in multimea de tip B {1,2,3,..., k, 1} calea inchisa care pleaca din nodul 2 este {2,3,...,k,1,2}. Conform Teoremei a II-a a lui Kirchhoff se poate scrie:

$u_{12} = u_{1n} - u_{2n}$, $u_{23} = u_{2n} - u_{3n}$, ..., $u_{k-1,\,k} = u_{k-1n} - u_{kn}$, $u_{k1} = u_{kn} - u_{1n}$

Daca adunam aceste relatii se obtine: $u_{12} + u_{23} + ... + u_{k-1,k} + u_{k1} \equiv 0$

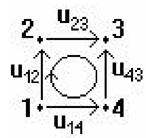
Generalizand se obtine o alta forma a teoremei a II-a a lui Kirchhoff:

Suma algebrica a tuturor tensiunilor care corespund caii inchise care contine toate nodurile unei multimi de tip B este nula, pentru orice t.

$$\sum_{k \in B} u_k(t) = 0 \quad (2)$$

In aceasta suma se iau cu + tensiunile orientate in sensul de parcurgere a buclei si cu - tensiunile orientate in sens contrar acestuia.

De exemplu, pentru multimea de tip B {1,2,3,4,1} din figura de mai jos avem: $u_{12} + u_{23} - u_{43} - u_{14} = 0$



Am aratat mai inainte ca forma (1) implica forma (2). Se poate arata ca si forma (2) implica forma (1). Fie multimea de noduri de tip B {p,q,r,p} pentru care $u_{pq} + u_{qr} + u_{rp} = 0$. Daca se alege $v_r = 0$, tinand seama ca $u_{rp} = -u_{pr}$, rezulta $u_{pq} = u_{pr} - u_{qr}$. Deci *formele (1) si (2) ale teoremei a II-a a lui Kirchoff sunt echivalente*.

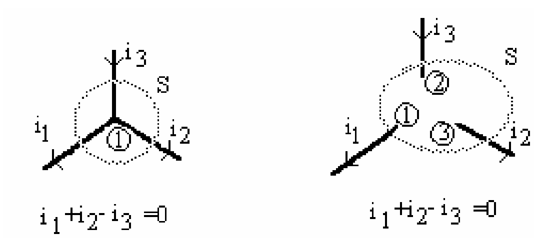
Teorema lui Kirchhoff referitoare la curenti (Teorema I)

Suma algebrica a curentilor care intra si ies dintr-o suprafata inchisa S este nula, pentru orice t.

$$\sum_{k \in S} i_k(t) = 0$$

In aceasta suma se iau cu + curentii care ies din S si cu - curentii care intra in S.

O suprafata inchisa S poate contine in interior unul sau mai multe noduri. De exemplu:



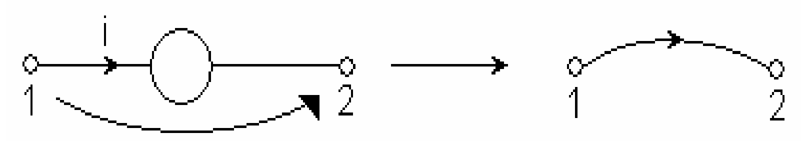
Cele doua teoreme ale lui Kirchhoff conduc la ecuatii algebrice liniare si omogene cu coieficienti de valorile 0, 1, -1.

1.3.Elemente de topologie a circuitelor

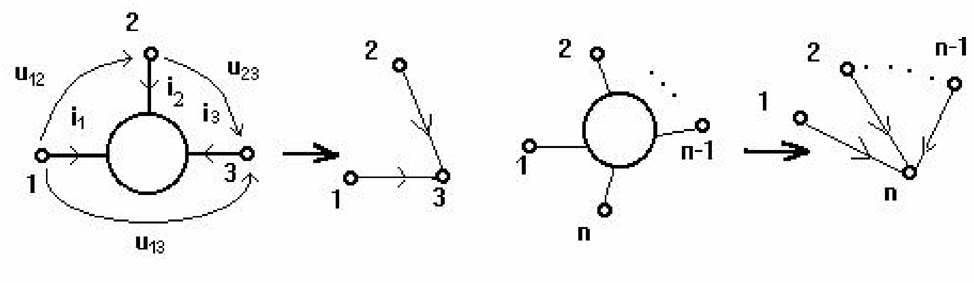
Topologia circuitelor se refera la modul de conectare a elementelor de circuit. Unui circuit electric i se ataseaza un graf constituit dintr-o multime de noduri (1,2,...,N) legate intre ele prin laturi (l_1, l_2 ,...,l_L). Daca laturile sunt orientate (au sens de referinta), graful este orientat. Graful circuitului contine toate informatiile despre interconectarea elementelor de circuit, dar nu contine informatii asupra dependentelor dintre $u_k(t)$ si $i_k(t)$.

Orice element de circuit poate fi reprezentat printr-un element al grafului:

-un dipol se reprezinta printr-o latura a grafului conectata intre cele doua noduri,

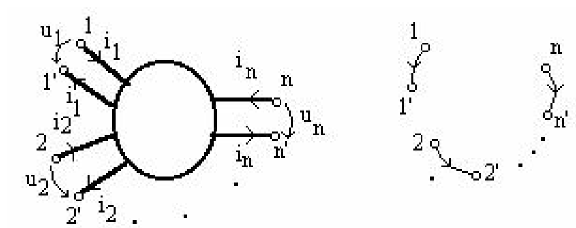


-un tripol si, generalizand, un n-pol se reprezinta astfel

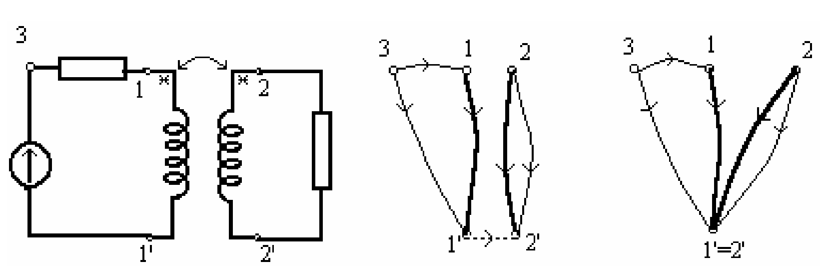


Graful radial cu n noduri si n-1 laturi care reprezinta un n-pol contine numai laturi ale caror tensiuni si curenti sunt marimi liniar independente intre ele. De exemplu, pentru tripol $u_{12} = u_{13} - u_{23}$ si $i_3 = -i_1 - i_2$ iar tensiunea u_{12} si curentul i_3 nu sunt asociate nici unei laturi din graf.

Modul de conectare a unui element multiport cu celelalte elemente de circuit este descris exclusiv cu ajutorul variabilelor $u_k(t)$, $i_k(t)$, k=1,...,n deci graful multiportului este multiplu conex (vezi figura). Un circuit care contine astfel de elemente poate avea un graf multiplu conex.



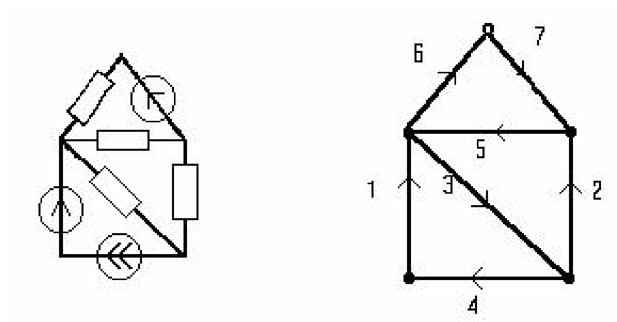
Asa cum se va vedea in continuare scrierea sistematica a ecuatiilor date de teoremele lui Kirchhoff este formulata pentru circuite cu grafuri conexe. Este deci utila transformarea unui graf multiplu conex intr-un graf conex pastrand aceleasi expresii pentru ecuatiile date de teoremele lui Kirchhoff. Modul in care se face aceasta transformare este ilustrat printr-un exemplu. In figura de mai jos



graful transformatorului (care este un diport) este desenat cu linie ingrosata. Tensiunile si curentii raman aceiasi daca in graful circuitului se adauga latura 1’2’ (desenata cu linie punctata); in acest fel graful circuitului devine conex. Curentul prin aceasta latura fiind nul, nodurile 1' si 2' se pot suprapune.

Graful circuitului se obtine reprezentand toate elementele de circuit prin grafuri interconectate intre ele la fel ca elementele carora le corespund. Acesta descrie proprietatile de interconexiune ale circuitului si, daca este orientat, arata si sensurile curentilor si tensiunilor.

Exemplu Circuitului din figura ii corespunde graful alaturat. Sagetile de pe laturi indica sensurile de



referinta ale curentilor si tensiunilor, u_k si i_k fiind asociate dupa regula de la receptoare. Graful are N=5 noduri si L = 7 laturi.

Intr-un graf G cu N noduri si L laturi se definesc urmatoarele multimi de laturi:

1. O *bucla* este o multime de laturi care formeaza o cale inchisa; fiecare latura intra o singura data in aceasta cale. In exemplul precedent $B_1=\{1,5,4\}$ si $B_2=\{5,6,7\}$ sunt bucle. Nodurile buclei formeaza o multime de tip B. Scrisa pe o bucla, teorema a doua a lui Kirchhoff este $\sum_{k\in bucla} u_k(t) = 0$.
2. Un *arbore A* este o multime de laturi care conecteaza intre ele toate nodurile din G fara sa formeze bucle. In exemplul precedent *A* = {1, 3, 5, 6} este un arbore. Un graf poate avea mai multi arbori. O latura a arborelui se numeste *ramura*. Se poate arata usor ca un arbore are N-1 laturi (prima latura uneste primele doua noduri iar pentru fiecare nod incepand cu al treilea se introduce o noua latura in arbore).
3. Un *coarbore C* este format din multimea laturilor grafului care nu sunt continute in arborele corespunzator *A*. În exemplul precedent coarborele *C* = {2, 4, 7} corespunde arborelui *A* = {1, 3, 5, 6}. Numarul coarborilor este acelasi cu al arborilor. Un coarbore contine L-N+1 laturi (L-(N-1)). O latura a coarborelui se numeste *coarda*.
4. *Sistemul fundamental de bucle* este multimea buclelor obtinute atasand la o coarda calea din arbore care uneste nodurile coardei respective. Deci numarul buclelor fundamentale este L-N+1 (acelasi cu numarul coardelor).

5. *Sectiunea* este o multime de laturi intersectate de o suprafata Σ inchisa care are in interior cel putin un nod. Σ_1={1,3,5,7} sau Σ_2={7,6}sunt doua sectiuni in exemplul precedent. Teorema intai a lui Kirchhoff se scrie: $\sum_{k \in sectiune} i_k(t) = 0$

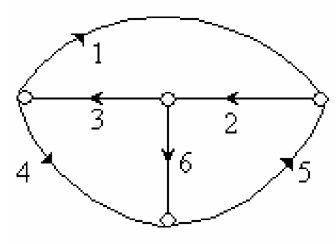
6. *Sistemul fundamental de sectiuni* este multimea sectiunilor pentru care fiecare suprafata Σ_k intersecteaza cate o singura latura a arborelui . Deci numarul sectiunilor fundamentale dintr-un graf este N-1 (acelasi cu numarul ramurilor) .

In exemplul precedent sistemul fundamental de bucle in raport cu arborele {1,3,5,6} este format din L-N+1=3 bucle ({1,4,3}, {3,2,5}, {5,6,7}) si sistemul fundamental de sectiuni este format din N-1=4 sectiuni ({1,4}, {2,3,4}, {2,5,7}, {6,7}).

Teorema a II-a a lui Kirchhoff se poate scrie pentru orice bucla ca de exemplu {1,5,2,4} ($u_1 - u_5 - u_2 + u_4 = 0$). Aceasta ecuatie este diferenta celor corespunzatoare buclelor {1,4,3} si {3,2,5} ($u_1 + u_4 + u_3 = 0, u_2 + u_5 + u_3 = 0$), deci intre aceste trei ecuatii exista o dependenta liniara. Asa cum se va arata in capitolul 2, o problema este corect formulata numai daca ecuatiile sunt liniar independente intre ele. Intereseaza deci numarul maxim al ecuatiilor liniar independente care se pot obtine din teorema a II-a a lui Kirchhoff si algoritmul de scriere al acestora.

Fiecare ecuatie scrisa pe o bucla fundamentala exprima tensiunea coardei in functie de tensiunile unor ramuri. Rezulta ca dintre cele L tensiuni asociate laturilor grafului L-N+1 pot fi exprimate in functie de celelalte N-1 care pot fi considerate independente (pot fi alese arbitrar daca se iau in considerare numai ecuatiile date de teorema a II-a a lui Kirchhoff). Numarul de tensiuni independente nu poate fi mai mare de N-1 deoarece orice tensiune a unei coarde este o suma algebrica de tensiuni ale ramurilor. Numarul de tensiuni independente nu poate fi mai mic de N-1 deaorece laturile arborelui nu formeaza bucle. Numarul de tensiuni independente fiind N-1 rezulta ca numarul de tensiuni dependente este L-(N-1) deci numarul maxim de ecuatii liniar independente este L-N+1. Aceste ecuatii se scriu pe buclele fundamentale. In exemplul precedent (L= 7, N= 5) am ales arborele A={1,3,5,6} si sistemul de bucle fundamentale este format din L-N+1=3 bucle si anume: B_1={1,3,4}, B_2={3,5,2}, B_3={5,6,7}. Ecuatiile date de teorema a II-a a lui Kirchhoff (alegand drept sens de parcurgere al buclei sensul corzii din bucla) sunt: $u_4 + u_1 + u_3 = 0$, $u_2 + u_5 + u_3 = 0$ si $u_5 + u_6 + u_7 = 0$.

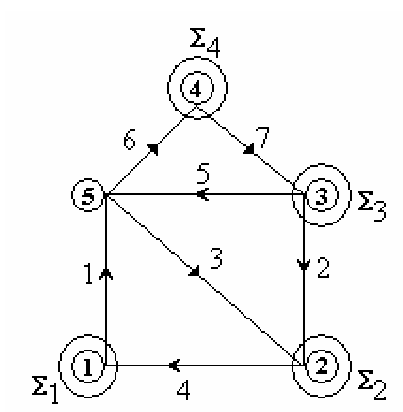
Pentru grafurile simple sistemul de bucle independente se poate determina si pe o cale mult mai simpla, fara a utiliza arborele. De exmplu, graful din figura cu L=6 si N=4 are L-N+1=3 bucle independente.



Acestea se pot determina considerand “ferestrele” {1,2,3}, {6,3,4} si {2,6,5} si avand grija ca fiecare bucla “noua” sa contina cel putin o latura “noua”. Pentru acelasi graf se poate considera si sistemul {1,2,3}, {1,<u>4</u>,<u>5</u>}, {2,5,<u>6</u>} in care am subliniat laturile “noi”.

Problema numarului maxim de ecuatii liniar independente date de teorema I a lui Kirchhoff se trateaza similar. Fiecare ecuatie scrisa pe o sectiune fundamentala exprima curentul ramurii in functie de curentii unor coarde. Rezulta ca dintre cei L curenti asociati laturilor grafului N-1 pot fi exprimati in functie de ceilalti L-N+1 care pot fi considerati independenti. Numarul de curenti independenti nu poate fi mai mare de L-N+1 deoarece orice current al unei ramuri este o suma algebrica a unor curenti ai coardelor. Numarul de curenti independenti nu poate fi mai mic de L-N+1 deoarece laturile coarborelui nu formeaza sectiuni (orice suprafata Σ care defineste o sectiune contine cel putin un nod in interior deci taie o ramura deoarece ramurile unesc toate nodurile). Numarul de curenti independenti fiind L-N+1 rezulta ca numarul de curenti dependenti este N-1 deci numarul maxim de ecuatii liniar independente este N-1. Aceste ecuatii se scriu pe sectiunile fundamentale.

Exemplu: pentru graful din figura (L=7, N=5) si pentru A = {1,3,5,6} sistemul de sectiuni fundamentale este: Σ_1= {1,4}, Σ_2 = {4,3,2}, Σ_3 = {2,5,7}, Σ_4= {7,6}. Ecuatiile date de teorema I a lui Kirchhoff sunt (considerand sens pozitiv pentru latura care iese din suprafata inchisa Σ_k si sens negativ pentru



latura care intra in Σ_k): $i_1 - i_4 = 0$, $-i_2 - i_3 + i_4 = 0$, $i_2 + i_5 - i_7 = 0$, $i_7 - i_6 = 0$.

Asa cum se va arata in capitolul 2, in anumite probleme se impun restrictii cu privire la apartenenta unor laturi la arbore sau coarbore. Daca nu exista astfel de restrictii sectiunile independente pot fi determinate mult mai simplu ca N-1 “sectiuni de incidenta” ale caror suprafete Σ_k contin in interior un singur nod.

1.4. Scrierea matriceala a teoremelor lui Kirchhoff

Pentru scrierea matriceala a ecuatiilor date de teoremele lui Kirchhoff se defineste matricea A de incidenta a laturilor la noduri care este o matrice cu L coloane si N-1 linii. Un element din linia i si coloana j poate avea valoarea:

0 - daca latura j nu este conectata la nodul i,

+1 - daca latura j iese din nodul i,

-1 - daca latura j intra in nodul i.

Teorema I a lui Kirchhoff se scrie matriceal A ·I = 0 unde I este vectorul curentilor laturilor grafului $I^t = [I_1, I_2, \ldots, I_L]$.

Pentru exemplul precedent:

$$A = \begin{array}{c|ccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & +1 & & & -1 & & & \\ 2 & & -1 & -1 & +1 & & & \\ 3 & & +1 & & & +1 & & -1 \\ 4 & & & & & & -1 & +1 \end{array}$$

Considerand vectorul U al tensiunilor laturilor grafului $(U^t = [U_1, \ldots, U_L])$ in care tensiunea U_k este asociata dupa regula de la receptoare cu curentul I_k, teorema a II-a a lui Kirchhoff in forma (1) se scrie $U = A^t \cdot V$ unde V este vectorul potentialelor primelor N-1 noduri ($V^t = [V_1, \ldots, V_{N-1}]$) si $V_N = 0$.

Pentru exemplul considerat cu $V_5 = 0$ rezulta:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

1.5. Teorema lui Tellegen

Fie doua circuite 1 si 2 care au acelasi graf orientat G cu N noduri si L laturi (sensurile tensiunii si curentului se asociaza dupa regula de la receptoare pentru toate laturile). *Daca* $[I]^{(1)} = [i_1,i_2,...,i_l]^t$ *este vectorul curentilor din laturile circuitului 1 care satisfac teorema I a lui Kirchhoff si* $[U]^{(2)} = [u_1,u_2,...,u_l]^t$ *este vectorul tensiunilor laturilor circuitului 2 care satisfac teorema a II-a a lui Kirchhoff, atunci*:

$$\sum_{k=1}^{L} u_k^{(2)}(t) i_k^{(1)}(t) = 0$$

Demonstratie: Teorema lui Tellegen este o consecinta a teoremelor lui Kirchhoff. Trebuie sa aratam ca $[U]^{(2)T}[I]^{(1)} = 0$. Daca $[I]^{(1)}$ si $[U]^{(2)}$ satisfac teoremele lui Kirchhoff, atunci avem: $AI^{(1)} = 0$ si $U^{(2)} = A^t \cdot V^{(2)}$

Rezulta: $[U^{(2)}]^T[I^{(1)}] = [A^t \cdot V^{(2)}]^t \cdot I^{(1)} = V^{(2)\,t} \cdot A \cdot I^{(1)}$. Dar $AI^{(1)} = 0$ deci $U^{(2)\,t} \cdot I^{(1)} = 0$. Q.E.D.

Am demonstrat ca existenta celor doua teoreme ale lui Kirchhoff implica teorema lui Tellegen. Se poate demonstra ca oricare dintre teoremele lui Kirchhoff impreuna cu teorema lui Tellegen implica cealalta teorema a lui Kirchhoff si anume:

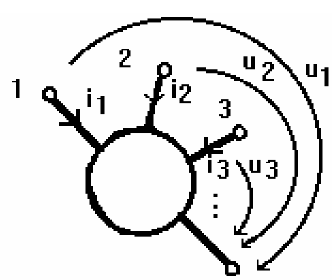
- daca tensiunile satisfac teorema a II-a a lui Kirchhoff ($[C_{bl}]\,[U] = 0$) si este satisfacuta teorema lui Tellegen ($[U]^T[I] = 0$), atunci curentii *I* satisfac teorema I-a a lui Kirchhoff;

- daca curentii satisfac teorema I a lui Kirchhoff ($[C_{\Sigma l}]\,[I] = 0$) si este satisfacuta teorema lui Tellegen ($[U]^T[I] = 0$), atunci tensiunile *U* satisfac teorema a II-a a lui Kirchhoff.

Demonstratiile acestor doua teoreme sunt similare cu demonstratia teoremei lui Tellegen.

1.6. Transferul de putere pe la bornle unui multipol

Fie un n-pol cu marimile la borne: potentialele $v_k(t)$ (k=1,2,...,n-1), $v_n(t)=0$, curentii $i_k(t)$ si

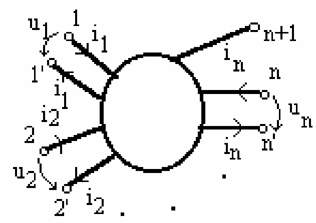


tensiunile $u_k(t)$ considerate ca in figura. Se observa ca $u_k(t)$ si $i_k(t)$ (k=1,2,...,n-1) sunt asociate dupa regula de la receptoare. *Puterea instantanee absorbita de n-pol la momentul t* este

$$p(t) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(t) i_k(t)$$

In cazul unui dipol puterea absorbita este $p_a(t)=u(t)i(t)$ u si i fiind asociate dupa regula de la receptoare. Evident puterea debitata de acelasi dipol va fi $p_d(t)= -p_a(t)=-u(t)i(t)=u'(t)i(t)$, unde $u'(t)= - u(t)$ este tensiunea asociata cu i(t) dupa regula de la generatoare.

Puterea absorbita de un n-port cu bornele 1,1',2,2',...,n,n' se poate exprima numai in functie de u_k si i_k. Intr-adevar daca $v_{n'}=0$, $p_a(t)=v_1(t)i_1(t) + v_{1'}(t)[-i_1(t)]+ \ldots +v_n(t)i_n(t)= \sum_{k=1}^{n} u_k(t)i_k(t)$



Intr-un circuit care contine elemente dipolare, multipolare si multiport produsul $u_k(t)\, i_k(t)$ reprezinta puterea p(t) absorbita sau debitata de latura k a grafului la momentul t. Separand puterile debitate de laturile grafului care corespund unor surse (cu u_k si i_k asociate dupa regula de la generatoare) de cele absorbite de laturile grafului care corespund unor consumatori (cu u_k si i_k asociate dupa regula de la receptoare), teorerma lui Tellegen se poate scrie

$$\sum_{\substack{\text{toate}\\ \text{sursele}}} p_d(t) = \sum_{\substack{\text{toti}\\ \text{consumatorii}}} p_a(t)$$

Aceasta relatie se numeste *bilantul puterilor instantanee* si reprezinta principiul conservarii puterilor (principiul I al termodinamicii).